JANKE—EMDE—LÖSCH

TAFELN HÖHERER FUNKTIONEN

SECHSTE AUFLAGE

Neubearbeitet von F. LÖSCH

B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT. STUTTGART. 1960.

Е. ЯНКЕ, Ф. ЭМДЕ, Ф. ЛЁШ

В161.6
Я62

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

ФОРМУЛЫ, ГРАФИКИ, ТАБЛИЦЫ

ПЕРЕВОД С 6-го ПЕРЕРАБОТАННОГО
НЕМЕЦКОГО ИЗДАНИЯ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Л. И. СЕДОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1964

517.2 (03)
Я 62
УДК 517.6/8(083.3)

АННОТАЦИЯ

Настоящая книга является переводом существенно переработанного Ф. Лёшем издания широко известного во всем мире справочника Е. Янке и Ф. Эмде. Она является совершенно особой энциклопедией по специальным функциям: содержит их определения и множество формул, 73 таблицы и 210 оригинальных чертежей и графиков, представляющих особую ценность. Таблицы дают достаточную для многих прикладных вопросов точность и удобны в обращении, а чертежи ярко иллюстрируют качественную сторону поведения функций (как в действительной, так и в комплексной областях).

Обилие материала и тщательность его обработки делают книгу необходимым подручным пособием для специалистов в области механики, физики, техники. Она будет очень полезна студентам вычислительных специальностей и инженерно-техническим работникам, встречающимся в своей практической деятельности с многочисленными расчетами.

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
физики СО АН СССР
ИНВ. № 24687

Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш

Специальные функции (Формулы, графики, таблицы)

М., 1964 г., 344 стр. с илл.

Редактор *Н. Х. Розов.*

Техн. редактор *В. Н. Крючкова.* Корректор *С. Н. Емельянова*

Сдано в набор 28/V 1963 г. Подписано к печати 7/I 1964 г. Бумага 70×108¹/₁₆. Физ. печ. л. 21,5. Условн. печ. л. 29,46. Уч.-изд. л. 33,46. Тираж 10 500 экз. Цена книги 1 р. 87 к. Заказ № 669.

Издательство «Наука».
Редакция физико-математических справочников.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Гос. типография «Пиргале», г. Вильнюс, ул. Латако, 6. Заказ № 538.

СОДЕРЖАНИЕ

Перечень таблиц 8
Предисловие к русскому изданию 10
Из предисловия к 6-му немецкому изданию 11
Замечания об устройстве таблиц 13

I. Некоторые константы и вспомогательные таблицы 15

A. Часто встречающиеся постоянные 15
B. Постоянная Эйлера C, γ 15
C. Числа Бернулли B_n 15
D. Числа Эйлера E_n 16
E. Постоянная Каталана G 16
F. Вспомогательные таблицы для вычислений с комплексными числами . . . 16
1. Обратные величины 16
2. Квадратные корни 18
3. Прямоугольные и полярные координаты 20
4. Сложение векторов 21

II. Тригонометрические функции 24
1. Некоторые специальные тригонометрические функции 24
2. Элементарные трансцендентные уравнения 24

III. Гиперболические функции 30
1. Определения 30
2. Частные значения 30
3. Основные соотношения 31
4. Представление одной функции через другие 31
5. Формулы сложения 31
6. Функции кратных аргументов 31
7. Степени 32
8. Связь с показательными функциями и логарифмами 32
9. Формулы дифференцирования и интегрирования 32
10. Представления при малых значениях аргументов 33
11. Асимптотика при больших значениях аргументов 33
12. Гиперболическая амплитуда (гудерманиан) 33
13. Некоторые трансцендентные уравнения 35

IV. Тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного 36
1. Синус, косинус 36
2. Арксинус 39
3. Тангенс 40
4. Арктангенс 43
5. Переход от одной функции к другой 44
6. Знак действительной и мнимой части функции 45
7. Приведение к положительным острым углам 46
8. Поведение функций в комплексной плоскости 47

V. Гамма-функции 49
Определения и обозначения 49
A. Гамма-функция $\Gamma(z)$ 52
1. Представления 52
2. Частные значения 54
3. Функциональные уравнения 54
4. Некоторые интегральные формулы 55

B. Логарифмическая производная $\psi(z)$ гамма-функции 56
1. Представления 56
2. Частные значения 57
3. Функциональные уравнения 57
4. Производная $\psi'(z)$ 57
C. Неполные гамма-функции $\Gamma(a, z)$, $\gamma(a, z)$ 60

VI. Интегральная показательная функция и родственные функции 62

1. Интегральная показательная функция и интегральный логарифм . . . 62
2. Интегральный синус и интегральный косинус 65
3. Некоторые интегральные формулы 67

VII. Интеграл ошибок и связанные с ним функции 70

1. Интеграл ошибок 70
2. Интегралы Френеля 82

VIII. Дзета-функция Римана 88

1. Определение и представления 88
2. Частные значения 91
3. Функциональные уравнения 91

IX. Эллиптические интегралы 94

Определения и обозначения 94
A. Приведение эллиптических интегралов к нормальной форме 96
1. Общие замечания 96
2. Приведение к нормальной форме действительных интегралов 96
B. Нормальная форма неполных интегралов 99
1. Представления 99
2. Функциональные уравнения 109
C. Нормальная форма полных интегралов 109
1. Представления 109
2. Функциональные уравнения 116

X. Эллиптические функции 120

Определения и обозначения 120
A. Эллиптические функции Якоби 120
1. Амплитуда Якоби $\mathrm{am}(u, k)$ 120
2. Функции Якоби $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$ 122
3. Частные значения 123
4. Функциональные уравнения 125
5. Дзета-функция Якоби $\mathrm{zn}(u, k)$ 127
B. Эллиптические функции Вейерштрасса 127
1. Функции Вейерштрасса $\wp u$, ζu, σu 127
2. Представления 129
3. Функциональные уравнения 130
4. Соотношения между функциями Якоби и Вейерштрасса 130
C. Тэта-функции 130
1. Определение и представления 130
2. Частные значения 131
3. Функциональные уравнения 132
4. Связь с эллиптическими функциями и эллиптическими интегралами. Модулярная функция 133

XI. Ортогональные полиномы 144

A. Полиномы Чебышева 144
B. Полиномы Лагерра 147
C. Полиномы Эрмита (функции параболического цилиндра) 151

XII. Функции Лежандра (сферические функции) 158

1. Определения и обозначения 158
2. Функции Лежандра 1-го и 2-го рода 159
3. Присоединенные функции Лежандра 1-го и 2-го рода 162
4. Интегральные представления 163
5. Частные значения. Асимптотика 164
6. Функциональные уравнения. Нормированные функции Лежандра . . . 164

XIII. Функции Бесселя (цилиндрические функции) 178

A. Функции Бесселя 1-го, 2-го и 3-го рода 178
1. Определения и обозначения 178
2. Представления с помощью рядов 181
3. Интегральные представления 221
4. Асимптотика 222
5. Нули 229
6. Функциональные уравнения 243
7. Некоторые обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешимые в функциях Бесселя 245
B. Модифицированные функции Бесселя 247
1. Определения и обозначения 247
2. Функции $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ 247
3. Функции Кельвина 264
C. Функции, связанные с функциями Бесселя 287
1. Функции Ангера и Вебера 287
2. Функции Струве 288

XIV. Функции Матье (функции эллиптического цилиндра) 298

1. Определения и обозначения 298
2. Представления для собственных значений 305
3. Разложение в ряды Фурье 305
4. Нули 306
5. Функциональные уравнения. Присоединенные функции Матье 306

XV. Конфлюэнтные гипергеометрические функции 308

1. Функция $\Phi(a, c; z)$ 308
2. Функция $\Psi(a, c; z)$ 315
3. Функции $M_{\kappa,\mu}(z)$, $W_{\kappa,\mu}(z)$ 316
4. Частные случаи 317

XVI. Некоторые специальные функции физики 318

A. Функция излучения Планка 318
B. Функция Ланжевена 320
C. Функции Планка—Эйнштейна и Дебая 320
1. Функции Планка—Эйнштейна 320
2. Функции Дебая 323
D. Функции распространения тепла от источников 326

Библиография 329
Предметный указатель 343

ПЕРЕЧЕНЬ ТАБЛИЦ

I. Некоторые константы и вспомогательные таблицы 15

1. Обратные величины для комплексных чисел 17
2. Квадратные корни из комплексных чисел 18
3. Тригонометрическая форма комплексных чисел 20
4. Сложение векторов 22

II. Тригонометрические функции 24

5. Функции $x \operatorname{tg} x$, $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ и $\frac{\sin x}{x}$ 26

6. Функции $x \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$ и $x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x$ 29

7. Экстремумы функции $\sin x/x$ 29

III. Гиперболические функции 30

8. Показательные и гиперболические функции 34
9. Некоторые вспомогательные величины 35

IV. Тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного 36

10. Функция $\sin(x+iy) = se^{i\sigma}$ 39
11. Функция $\operatorname{tg}(x+iy) = te^{i\tau}$ 42

V. Гамма-функции 49

12. Гамма-функция $\Gamma(x) = (x-1)!$ 58
13. Функции $\psi(x)$ и $\psi'(x)$ 58
14. **Величины, обратные к гамма-функции:** $\frac{1}{\Gamma(1+x)} = \frac{1}{x!}$ и $\frac{1}{\Gamma(1-x)} = \frac{1}{(-x)!}$ 59

VI. Интегральная показательная функция и родственные функции 62

15. Интегральные показательные функции $\mathrm{Ei}^*(x)$ и $-\mathrm{Ei}(-x)$ 64
16. Интегральный синус $\mathrm{Si}(x)$ и интегральный косинус $\mathrm{Ci}(x)$ 68
17. Экстремумы функций $\mathrm{ci}(x)$ и $\mathrm{si}(x)$ 69

VII. Интеграл ошибок и связанные с ним функции 70

18. Интеграл ошибок $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ 73

19. Производные интеграла ошибок $\Phi(x)$ 74
20. Функции $e^{x^2}[1-\Phi(x)]$ и e^{-x^2} 80

21. Функция $y = \int_0^x e^{t^2} dt$ 80

22. Интеграл ошибок $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ и его производная $\varphi(x)$ 81

23. Интегралы Френеля $C(x)$ и $S(x)$ 84
24. Интегралы Френеля $C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ и $S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ 85

VIII. Дзета-функция Римана 88

25. Нули $0{,}5 + i\alpha_n$ дзета-функции Римана $\zeta(x)$ 91
26. Дзета-функция Римана $\zeta(x)$ 92

IX. Эллиптические интегралы 94
27. Неполный эллиптический интеграл 1-го рода $F(\varphi, k)$ 103
28. Неполный эллиптический интеграл 2-го рода $E(\varphi, k)$ 106
29. Полные эллиптические интегралы $\mathsf{K}(\sin\alpha)$ и $\mathsf{E}(\sin\alpha)$ 117
30. Полные эллиптические интегралы $\mathsf{K}(k)$ и $\mathsf{E}(k)$ 118
31. Полные эллиптические интегралы $\mathsf{B}(k)$, $\mathsf{C}(k)$ и $\mathsf{D}(k)$ 118
32. Вспомогательные функции $\mathsf{h}(k)$, $\mathsf{c}(k)$ и $\mathsf{d}(k)$ 119

X. Эллиптические функции 120
33. Тэта-функции и их производные 138
34. Вспомогательная таблица для тэта-функций 139
35. Функция $\ln q$ 140

XI. Ортогональные полиномы 144
36. Функции Лагерра $l_n(x)$ 149
37. Функции параболического цилиндра $\varphi_n(x)$ 155

XII. Функции Лежандра 158
38. Полиномы Лежандра $P_n(x)$ 169
39. Полиномы Лежандра $P_n(\cos\vartheta)$ 171
40. Производные полиномов Лежандра $\frac{d}{d\vartheta}P_n(\cos\vartheta)$ 173
41. Функции Лежандра 2-го рода $Q_n(x)$ 175

XIII. Функции Бесселя 178
42. Функции $\Lambda_n(x)=n!(x/2)^{-n}J_n(x)$ 193
43. Функции Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$ 203
44. Функции Бесселя $J_{n/2}(x)$ 208
45. Функции Бесселя $J_{n/3}(x)$ и $J_{n/4}(x)$ 210
46. Функции Бесселя $J_\nu(n)$ 211
47. Функции Неймана $N_0(x)$ и $N_1(x)$ 216
48. Нули $j_{0,s}$ функции $J_0(x)$ и соответствующие значения функции $J_1(x)$ 232
49. Нули $j_{1,s}$ функции $J_1(x)$ и экстремумы функции $J_0(x)$ 232
50. Нули $j_{n,s}$ функций $J_n(x)$ 232
51. Два первых нуля $j_{\nu,1}$ и $j_{\nu,2}$ функций $J_\nu(x)$ 233
52. Первые шесть корней $x_{\nu,s}$ уравнения $J_\nu(x)N_\nu(kx)-J_\nu(kx)N_\nu(x)=0$ 242
53. Модифицированные функции Бесселя $I_0(x)$ и $I_1(x)$ 251
54. Модифицированные функции Бесселя $I_n(x)$ 255
55. Модифицированные функции Бесселя $\frac{2}{\pi}K_0(x)$ и $\frac{2}{\pi}K_1(x)$ 256
56. Модифицированные функции Бесселя $I_\nu(x)$ и $\frac{2}{\pi}K_\nu(x)$ для $\nu=1/3, 2/3$ 262
57. Первые корни $x_{n,s}$ уравнения $I_n(x)J'_n(x)-J_n(x)I'_n(x)=0$ 263
58. Функции $\mathrm{ber}(x)$, $\mathrm{bei}(x)$ 274
59. Функции $\mathrm{ber}'(x)$, $\mathrm{bei}'(x)$ 276
60. Функции $\mathrm{her}(x)$, $\mathrm{hei}(x)$ 278
61. Функции $\mathrm{her}'(x)$, $\mathrm{hei}'(x)$ 280
62. Функции $\mathrm{ber}(x)$, $\mathrm{bei}(x)$, $\mathrm{ber}'(x)$, $\mathrm{bei}'(x)$, $\mathrm{her}(x)$, $\mathrm{hei}(x)$, $\mathrm{her}'(x)$, $\mathrm{hei}'(x)$ (продолжение) 282
63. Функции $J_n(r\sqrt{i})=b_ne^{i\beta_n}$ и $H_n^{(1)}(r\sqrt{i})=h_ne^{i\eta_n}$ $(n=0, 1)$ 283
64. Функции $J_0(r\sqrt{i})/J_1(r\sqrt{i})$ и $H_0^{(1)}(r\sqrt{-i})/H_1^{(1)}(r\sqrt{i})$ 285
65. Функции Вебера $\mathsf{E}_0(x)$, $\mathsf{E}_1(x)$ и функции Струве $\mathsf{H}_0(x)$, $\mathsf{H}_1(x)$ . . . 289
66 и 67. Неполные функции Ангера и Вебера 297

XVI. Некоторые специальные функции физики 318
68. Функция излучения Планка 319
69. Функция Ланжевена 321
70. Функции Планка—Эйнштейна C_ν и $(U-U_0)/T$ 322
71. Функции Планка—Эйнштейна $-(F-F_0)/T$ и S 323
72. Функции Дебая C_ν и $(U-U_0)/T$ 324
73. Функции Дебая $-(F-F_0)/T$ и S 325

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Написанный много лет назад, справочник Е. Янке и Ф. Эмде получил широкое распространение как в Советском Союзе, так и за границей. Он являлся и является сейчас ценным пособием при решении различных инженерных и прикладных задач, требующих применения аппарата специальных функций. Эта книга будет полезна не только при различного рода численных расчетах, но и при изучении разнообразных задач механики, физики, техники, а также для знакомства со специальными функциями или для быстрого наведения какой-нибудь справки.

В 1960 году появилось новое немецкое издание этого справочника, значительно усовершенствованное, переработанное и расширенное Ф. Лёшем. Внесенные им изменения настолько существенны, что, по существу, можно говорить о появлении новой книги. Нет необходимости останавливаться здесь на этих изменениях — они подробно перечислены в предисловии самого Ф. Лёша к немецкому изданию.

Предлагаемая русскому читателю книга представляет собой заново выполненный перевод с немецкого издания 1960 года. Перевод этот был сделан Г. В. Толстовой; значительное участие в обработке рукописи и ее подготовке к печати принял редактор издательства Н. Х. Розов.

Необходимо указать следующие изменения, внесенные в русское издание по сравнению с немецким оригиналом.

В последних зарубежных изданиях был целиком опущен первый раздел справочника Янке и Эмде, посвященный элементарным функциям. Однако он содержал важные и далеко не «элементарные» сведения о гиперболических функциях, о тригонометрических функциях комплексного аргумента и т. п., а также полезные таблицы. Поэтому издательство сочло целесообразным восстановить подавляющее большинство материала этого раздела, использовав третье русское издание (опущены только главы, посвященные степеням и кубическим уравнениям, стоящие в стороне от основной темы книги). Деление книги на два раздела — элементарные и специальные функции — признано излишним.

В нескольких местах материал немецкого издания был перепланирован по-иному для удобства пользования книгой (так, таблица коэффициентов для квадратичной интерполяции, находившаяся в конце книги, перенесена в предисловие о пользовании таблицами и т. п.) или пополнен из третьего русского издания.

Подстрочные примечания, а также добавления в тексте, взятые в квадратные скобки, включены в книгу Н. Х. Розовым.

В подготовке библиографии для настоящего издания большое участие приняла Н. С. Мельникова.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К 6-му НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание заново тщательно переработано. Вследствие широкого распространения и исключительного одобрения, которые эта книга нашла повсюду, переработка была произведена с чувством глубокой ответственности. Я старался не изменять характера книги, но, с другой стороны, стремился расширить ее и облегчить, насколько возможно, пользование ею.

С этой целью я часто располагал материал по-новому. Объяснению функций и обозначений отведено гораздо больше места, чем это было раньше. При выборе обозначений, которые в области специальных функций все еще не являются едиными, я отдавал предпочтение тем, которые в настоящее время наиболее употребительны в литературе *).

Все таблицы тщательно пересмотрены с целью обеспечить их надежность. В помощь вычислителю большая часть таблиц снабжена разностями, которые позволяют удобным образом производить линейную или квадратичную интерполяцию.

Обновленная библиография находится в конце книги. Так как число учебников и собраний формул и таблиц специальных функций значительно увеличилось за последние десятилетия, то при их перечислении пришлось ограничиться только наиболее значительными работами **).

Выбор материала в прежних изданиях оказался настолько хорошим, что его можно было бы сохранить целиком. Однако значение, которое новые классы специальных функций приобретают в приложениях, было принято во внимание, и поэтому сделаны многочисленные расширения и добавления. Это касается почти всех разделов книги; ниже перечислены только наиболее существенные изменения.

1. Для интеграла ошибок и его производной, чаще всего применяемых в теории вероятности и в статистике, добавлены новые таблицы.

2. Расширены таблицы интегралов Френеля.

3. В разделе об эллиптических функциях приведена таблица для $\ln q$, в которой использованы десятые доли градуса. К таблице тэта-функций, по предложению Ф. Трикоми***), добавлена вспомогательная таблица, которая позволяет удобно получать значения функций вплоть до окрестности $\alpha = 90°$.

4. Изложения полиномов Лагерра и Эрмита, которые были разбросаны в различных местах, собраны в расширенном виде в разделе об ортогональных полиномах и дополнены изложением полиномов Чебышева.

---

*) В настоящем русском издании все обозначения величин и функций приведены по возможности в соответствие с обозначениями, установившимися в отечественной литературе. Для биномиальных коэффициентов сохранено обозначение $\binom{n}{m}$ вместо распространенной у нас записи C_n^m. — *Прим. ред.*

**) В настоящем русском издании в список литературы добавлены многочисленные отечественные книги, справочники и таблицы, более доступные советскому читателю. — *Прим. ред.*

***) Имеется в виду книга F. G. Tricomi, Funzioni Ellittiche, Bologna, 1951. — *Прим. ред.*

5. Раздел о функциях Бесселя подвергся самым многочисленным изменениям: специальный раздел посвящен модифицированным функциям Бесселя; заново вычислена таблица корней уравнения $J_\nu(x)\,N_\nu(kx) - J_\nu(kx)\,N_\nu(x) = 0$; таблица функций Струве, которая была выброшена в двух предыдущих изданиях, вновь включена согласно многочисленным пожеланиям.

6. Раздел о конфлюэнтных гипергеометрических функциях написан заново на основании известных работ Ф. Трикоми *).

7. Раздел о некоторых специальных функциях физики содержит функцию излучения Планка, функцию Ланжевена и функции распространения тепла от источников, а также вновь вычисленные таблицы функций Планка—Эйнштейна и Дебая, имеющие существенное значение в физической химии.

Желание не увеличивать объем книги заставило меня компенсировать предпринятые расширения сокращениями в других местах. Так, были выброшены таблицы функций последействия и индуктивности катушек, которые могут быть взяты из соответствующей технической литературы.

Фридрих Лёш

*) Имеется в виду книга F. G. Tricomi, Funzioni ipergeometriche confluenti, Roma, 1954. См. также работу F. G. Tricomi, Mem. Sciences Math., № 140, Paris, 1959. — *Прим. ред.*

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ УСТРОЙСТВЕ ТАБЛИЦ

Значения функций, содержащиеся в последующих таблицах, получены из более точных значений округлением их обычным образом, а именно: последний десятичный знак увеличен на 1, если величина последующих цифр превосходит 1/2 единицы последнего десятичного знака. Эти табличные значения, следовательно, вообще имеют ошибку самое большее в 1/2 единицы последнего десятичного знака. Только в немногих таблицах возможна ошибка в единицу последнего десятичного знака.

Если для всех табличных значений какого-нибудь столбца (или строки) одна или несколько начальных цифр совпадают, то эти цифры отделены и поставлены жирным шрифтом сверху и снизу этого столбца (или в начале строки). Таким же образом мы поступили, когда отброшенные начальные цифры в рассматриваемом столбце отличаются только на единицу в последнем десятичном знаке. Тогда те табличные значения, для которых происходит изменение, отмечены звездочкой (*).

[В некоторых таблицах употребляются также следующие обозначения: число $(-n)$, прибавленное в скобках после табличного значения, указывает, что это значение должно быть умножено на множитель 10^{-n}. Например, из таблицы 37 получаем: $\varphi_3(1{,}20) = -0{,}030\,396$, а $\varphi_3(1{,}30) = +0{,}092\,024$.]

Табличный шаг везде равен 1, 2 или 5 единицам последнего десятичного знака табличного аргумента. В большинстве случаев нужные значения функций нельзя взять непосредственно из таблицы; тогда их надо получить интерполяцией. Почти все таблицы приспособлены для линейной или квадратичной интерполяции, причем предполагается, что при интерполяции допустима наибольшая ошибка в 2 единицы последнего десятичного знака. Разности 1-го и 2-го порядков, необходимые для интерполяции, присоединены к таблицам; их всегда надо понимать в единицах последнего десятичного знака. В некоторых случаях разности 1-го порядка снабжены предупреждающим знаком (!); он означает, что ошибка при линейной интерполяции, возможно, превосходит 2 единицы, но ни в коем случае не 5 единиц последнего десятичного знака, а для большей степени точности надо применить квадратичную интерполяцию.

Линейная интерполяция. Разности 1-го порядка, служащие для линейной интерполяции, обозначены обычным шрифтом и стоят *между строками таблицы.* Для удобства вычислителя они всегда приведены для табличного шага, равного 1 (в единицах последнего десятичного знака табличного аргумента). Для значения аргумента x, лежащего в табличном интервале $\langle x_0, x_1\rangle$, значение функции $y = f(x)$, следовательно, получается прибавлением к табличному значению $y_0 = f(x_0)$ произведения разности аргументов $x - x_0$ (в единицах последнего знака табличного аргумента) на табличную разность, соответствующую $\langle x_0, x_1\rangle$.

Примеры. 1). Из таблицы 38 надо получить $P_3(0{,}6635)$. Находим: $x_0 = 0{,}66$, $f(x_0) = -0{,}2713$, табличная разность равна 182, $x - x_0 = 0{,}35$; отсюда

$$P_3(0{,}6635) = f(x) = -0{,}2713 + 0{,}35 \cdot 185 \cdot 10^{-4} = -0{,}2649.$$

Точное значение равно $-0{,}2650$.

2). Из таблицы 69 надо получить $L(3{,}126)$. Находим: $x_0 = 3{,}10$, $f(x_0) = 0{,}6815$, табличная разность равна 9,4, $x - x_0 = 2{,}6$; отсюда

$$L(3{,}126) = f(x) = 0{,}6815 + 2{,}6 \cdot 9{,}4 \cdot 10^{-4} = 0{,}6839.$$

Точное значение равно 0,6840.

Квадратичная интерполяция. Разности 2-го порядка, служащие для квадратичной интерполяции, напечатаны курсивом и стоят *в табличных строках.* Обозначив

табличные аргументы	табличные значения	разности 2-го порядка
x_0	$y_0 = f(x_0)$	$\delta^2 y_0$
x_1	$y_1 = f(x_1)$	$\delta^2 y_1$

вычисляют значение функции $y=f(x)$ для значения аргумента x, лежащего в табличном интервале $\langle x_0, x_1\rangle$, по формуле Эверетта — Лапласа:

$$y=(1-t)y_0E_0^2\delta^2y_0+ty_1+E_1^2\delta^2y_1,$$

где $t=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$, а значения коэффициентов E_0^2, E_1^2 должны быть взяты из следующей таблицы.

t	E_0^2	E_1^2		t	E_0^2	E_1^2	
0,00	0,0000 33	0,0000 17	1,00	0,25	−0,0547 11	−0,0391 13	0,75
01	−0,0033 32	−0,0017 16	0,99	26	0558 10	0404 13	74
02	0065 31	0033 17	98	27	0568 10	0417 13	73
03	0096 29	0050 17	97	28	0578 9	0430 13	72
04	0125 29	0067 16	96	29	0587 8	0443 12	71
0,05	−0,0154 28	−0,0083 17	0,95	0,30	−0,0595 7	−0,0455 12	0,70
06	0182 27	0100 16	94	31	0602 7	0467 12	69
07	0209 27	0116 16	93	32	0609 6	0479 11	68
08	0236 25	0132 17	92	33	0615 6	0490 11	67
09	0261 24	0149 16	91	34	0621 5	0501 11	66
0,10	−0,0285 23	−0,0165 16	0,90	0,35	−0,0626 4	−0,0512 10	0,65
11	0308 23	0181 16	89	36	0630 3	0522 10	64
12	0331 21	0197 16	88	37	0633 3	0532 10	63
13	0352 21	0213 16	87	38	0636 2	0542 9	62
14	0373 20	0229 15	86	39	0638 2	0551 9	61
0,15	−0,0393 19	−0,0244 16	0,85	0,40	−0,0640 1	−0,0560 8	0,60
16	0412 18	0260 15	84	41	0641 0	0568 9	59
17	0430 18	0275 15	83	42	0641 0	0577 7	58
18	0448 16	0290 15	82	43	0641 0	0584 7	57
19	0464 16	0305 15	81	44	0641 2	0591 7	56
0,20	−0,0480 15	−0,0320 15	0,80	0,45	−0,0639 1	−0,0598 6	0,55
21	0495 14	0335 14	79	46	0638 3	0604 6	54
22	0509 13	0349 14	78	47	0635 3	0610 6	53
23	0522 13	0363 14	77	48	0632 3	0616 5	52
24	0535 12	0377 14	76	49	0629 4	0621 4	51
0,25	−0,0547	−0,0391	0,75	0,50	−0,0625	−0,0625	0,50
	E_1^2	E_0^2	t		E_1^2	E_0^2	t

Можно получить улучшение формулы Эверетта—Лапласа, если заменить в ней разности 2-го порядка δ^2y на видоизмененные разности 2-го порядка

$$\hat{\delta}^2y=\delta^2y-0{,}184\,\delta^4y.$$

[Формула Эверетта—Лапласа примет тогда вид

$$y=(1-t)\,y_0+E_0^2\hat{\delta}^2y_0+ty_1+E_1^2\hat{\delta}^2y_1;$$

остальные обозначения имеют тот же смысл, что и выше.] В тех случаях, когда это оказывается существенным для получения требуемой точности, в таблицах вместо разностей 2-го порядка даются прямо видоизмененные разности 2-го порядка.

Примеры. 1). Из таблицы 16 надо получить Si (12,2). Находим:

$$x_0=12{,}0,\quad y_0=1{,}5050,\quad \hat{\delta}^2y_0=190,\quad x_1=12{,}5,\quad y_1=1{,}4923,\quad \hat{\delta}^2y_1=205.$$

Так как $t=0{,}4$, то, согласно приведенной выше таблице, $E_0^2=-0{,}064$, $E_1^2=-0{,}056$. Поэтому

$$y=\mathrm{Si}\,(12{,}2)=0{,}6\cdot1{,}5050-0{,}064\cdot190\cdot10^{-4}+0{,}4\cdot1{,}4923-0{,}056\cdot205\cdot10^{-4}=1{,}4976.$$

Точное значение равно 1,4975.

2). Из таблицы 40 надо получить Q_1 (0,8835). Находим:

$$x_0=0{,}88,\quad y_0=0{,}21068,\quad \hat{\delta}^2y_0=391,\quad x_1=0{,}89,\quad y_1=0{,}26551,\quad \hat{\delta}^2y_1=460.$$

Так как $t=0{,}35$, то $E_0^2=-0{,}0626$, $E_1^2=-0{,}0512$. Поэтому

$$y=Q_1(0{,}8835)=0{,}65\cdot0{,}21068-0{,}0626\cdot391\cdot10^{-5}+0{,}35\cdot0{,}26551-0{,}0512\cdot460\cdot10^{-5}=0{,}22939.$$

Точное значение равно 0,22939.

I. НЕКОТОРЫЕ КОНСТАНТЫ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТАБЛИЦЫ

A. ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ ПОСТОЯННЫЕ

$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562 = 1 : 0{,}707\,106\,781$

$\sqrt{3} = 1{,}732\,050\,808 = 1 : 0{,}577\,350\,269$

$\sqrt{10} = 3{,}162\,277\,660 = 1 : 0{,}316\,227\,766$

$\sqrt[3]{2} = 1{,}259\,921\,050 = 1 : 0{,}793\,700\,526$

$\sqrt[3]{10} = 2{,}154\,434\,690 = 1 : 0{,}464\,158\,883$

$e = 2{,}718\,281\,828 = 1 : 0{,}367\,879\,441$

$e^2 = 7{,}389\,056\,099 = 1 : 0{,}135\,335\,283$

$\sqrt{e} = 1{,}648\,721\,271 = 1 : 0{,}606\,530\,660$

$\ln 10 = 2{,}302\,585\,093 = 1 : 0{,}434\,294\,482$

$\lg e = 0{,}434\,294\,482$

$\ln 2 = 0{,}693\,147\,181$

$\ln 3 = 1{,}098\,612\,289$

$\pi = 3{,}141\,592\,654 = 1 : 0{,}318\,309\,886$

$\frac{\pi}{2} = 1{,}570\,796\,327 = 1 : 0{,}636\,619\,772$

$\pi^2 = 9{,}869\,604\,401 = 1 : 0{,}101\,321\,184$

$\pi^3 = 31{,}006\,276\,680 = 1 : 0{,}032\,251\,534$

$\pi\sqrt{2} = 4{,}442\,882\,938 = 1 : 0{,}225\,079\,079$

$\sqrt{\pi} = 1{,}772\,453\,851 = 1 : 0{,}564\,189\,584$

$\sqrt{2\pi} = 2{,}506\,628\,275 = 1 : 0{,}398\,942\,280$

$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1{,}253\,314\,137 = 1 : 0{,}797\,884\,561$

$\sqrt[3]{\pi} = 1{,}464\,591\,888 = 1 : 0{,}682\,784\,063$

$e^{\pi} = 23{,}140\,692\,633 = 1 : 0{,}043\,213\,918$

$e^{\pi/2} = 4{,}810\,477\,381 = 1 : 0{,}207\,879\,576$

$\lg \pi = 0{,}497\,149\,873$

$\ln \pi = 1{,}144\,729\,886$

B. ПОСТОЯННЫЕ ЭЙЛЕРА C, γ

Постоянная Эйлера (или *Эйлера—Маскерони*) C [определяется как предел

$$C = \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right];$$

так же называют постоянную γ, связанную с C соотношениями]

$$C = \ln \gamma, \qquad \gamma = e^C,$$
$$C = 0{,}577\,215\,665, \qquad \gamma = 1{,}781\,072\,418.$$

C. ЧИСЛА БЕРНУЛЛИ B_n

Числами Бернулли B_n называются коэффициенты в разложении

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi.$$

Именно, справедливы равенства

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_{2k+1} = 0, \quad B_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{2 \cdot (2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \quad (k = 1, 2, \ldots);$$

в частности,

$B_2 = 1:6 = 0{,}166\,666\,667$ $\quad B_{12} = -691:2730 = -0{,}253\,113\,553$
$B_4 = -1:30 = -0{,}033\,333\,333$ $\quad B_{14} = 7:6 = 1{,}166\,666\,667$
$B_6 = 1:42 = 0{,}023\,809\,524$ $\quad B_{16} = -3617:510 = -7{,}092\,156\,863$
$B_8 = -1:30 = -0{,}033\,333\,333$ $\quad B_{18} = 43\,867:798 = 54{,}971\,177\,945$
$B_{10} = 5:66 = 0{,}075\,757\,576$ $\quad B_{20} = -174\,611:330 = -529{,}124\,242\,424$

Иногда $(-1)^{n+1}B_{2n}$ называется *n-м числом Бернулли* и обозначается через B_n.

D. ЧИСЛА ЭЙЛЕРА E_n

[*Числами Эйлера* E_n называются коэффициенты в разложении

$$\frac{2}{e^z+e^{-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} z^n, \qquad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Именно, справедливы равенства

$$E_0 = 1, \qquad E_{2k+1} = 0, \qquad E_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{4^{k+1}\cdot(2k)!}{\pi^{2k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

в частности,

$E_2 = -1$ $\quad E_{12} = 2\,702\,765$
$E_4 = 5$ $\quad E_{14} = -199\,360\,981$
$E_6 = -61$ $\quad E_{16} = 19\,391\,512\,145$
$E_8 = 1385$ $\quad E_{18} = -2\,404\,879\,675\,441$
$E_{10} = -50\,251$ $\quad E_{20} = 370\,371\,188\,237\,525$

E. ПОСТОЯННАЯ КАТАЛАНА G

Постоянной Каталана G называется величина

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx, \quad G = 0{,}915\,965\,594.]$$

F. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Все следующие формулы остаются верными, если в обеих частях равенств заменить i на $-i$.

1. Обратные величины

Таблица 1 позволяет находить величины (рис. 1)

$$\frac{1}{1+ix} = u - iv = \frac{1-ix}{1+x^2}, \qquad \frac{1}{x+i} = v - iu.$$

В общем случае

$$0 < b < a: \qquad x = \frac{b}{a}, \qquad \frac{1}{\pm a + ib} = \pm\frac{u}{a} - i\frac{v}{a};$$

$$0 < a < b: \qquad x = \frac{a}{b}, \qquad \frac{1}{\pm a + ib} = \pm\frac{v}{b} - i\frac{u}{b}.$$

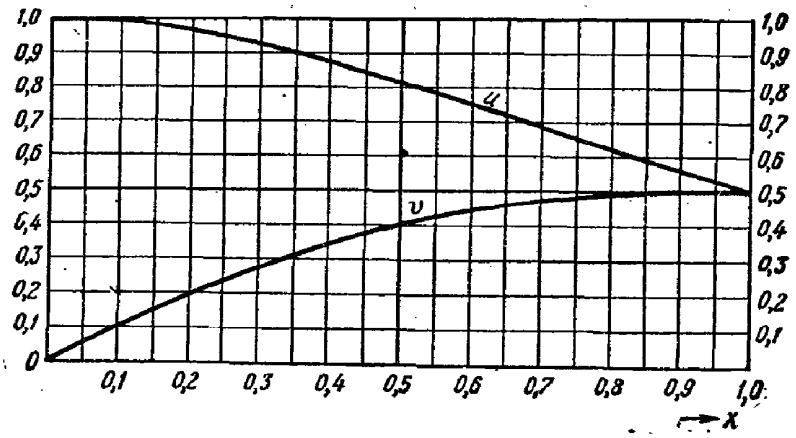


Рис. 1. $\frac{1}{1+ix}=u-iv$, $\frac{1}{x+i}=v-iu$.

Таблица 1. Обратные величины для комплексных чисел

$1:(1+ix)=u-iv$ $1:(x+i)=v-iu$

x	u	v	x	u	v	x	u	v
0	1	0	0,35	0,8909	0,3118	0,70	0,6711	0,4698
0,01	0,9999	0,0²9999	0,36	0,8853	0,3187	0,71	0,6648	0,4720
0,02	0,9996	0,01999	0,37	0,8796	0,3254	0,72	0,6586	0,4742
0,03	0,9991	0,02997	0,38	0,8738	0,3321	0,73	0,6524	0,4762
0,04	0,9984	0,03994	0,39	0,8680	0,3385	0,74	0,6462	0,4782
0,05	0,9975	0,04988	0,40	0,8621	0,3448	0,75	0,6400	0,4800
0,06	0,9964	0,05978	0,41	0,8561	0,3510	0,76	0,6339	0,4817
0,07	0,9951	0,06966	0,42	0,8501	0,3570	0,77	0,6278	0,4834
0,08	0,9936	0,07949	0,43	0,8440	0,3629	0,78	0,6217	0,4850
0,09	0,9920	0,08928	0,44	0,8378	0,3686	0,79	0,6157	0,4864
0,10	0,9901	0,09901	0,45	0,8316	0,3742	0,80	0,6098	0,4878
0,11	0,9880	0,10868	0,46	0,8254	0,3797	0,81	0,6038	0,4891
0,12	0,9858	0,11830	0,47	0,8191	0,3850	0,82	0,5979	0,4903
0,13	0,9834	0,12784	0,48	0,8127	0,3901	0,83	0,5921	0,4914
0,14	0,9808	0,13731	0,49	0,8064	0,3951	0,84	0,5863	0,4925
0,15	0,9780	0,14670	0,50	0,8000	0,4000	0,85	0,5806	0,4935
0,16	0,9750	0,15601	0,51	0,7936	0,4047	0,86	0,5748	0,4944
0,17	0,9719	0,16523	0,52	0,7872	0,4093	0,87	0,5692	0,4952
0,18	0,9686	0,17435	0,53	0,7807	0,4138	0,88	0,5636	0,4959
0,19	0,9652	0,1834	0,54	0,7742	0,4181	0,89	0,5580	0,4966
0,20	0,9615	0,1923	0,55	0,7678	0,4223	0,90	0,5525	0,4972
0,21	0,9578	0,2011	0,56	0,7613	0,4263	0,91	0,5470	0,4978
0,22	0,9538	0,2098	0,57	0,7548	0,4302	0,92	0,5416	0,4983
0,23	0,9498	0,2184	0,58	0,7483	0,4340	0,93	0,5362	0,4987
0,24	0,9455	0,2269	0,59	0,7418	0,4377	0,94	0,5309	0,4990
0,25	0,9412	0,2353	0,60	0,7353	0,4412	0,95	0,5256	0,4993
0,26	0,9367	0,2435	0,61	0,7288	0,4446	0,96	0,5204	0,4996
0,27	0,9321	0,2517	0,62	0,7223	0,4478	0,97	0,5152	0,4998
0,28	0,9273	0,2596	0,63	0,7159	0,4510	0,98	0,5101	0,4999
0,29	0,9224	0,2675	0,64	0,7094	0,4540	0,99	0,5050	0,5000
0,30	0,9174	0,2752	0,65	0,7030	0,4569	1,00	0,5000	0,5000
0,31	0,9123	0,2828	0,66	0,6966	0,4597			
0,32	0,9071	0,2903	0,67	0,6902	0,4624			
0,33	0,9018	0,2976	0,68	0,6838	0,4650			
0,34	0,8964	0,3048	0,69	0,6775	0,4674			

2. Квадратные корни

Таблица 2 позволяет находить величины (рис. 2)

$$\sqrt{1+ix}=\pm(u+iv),\quad \left.\begin{matrix}u^2\\v^2\end{matrix}\right\}=\frac{\sqrt{1+x^2}\pm 1}{2},$$

$$\sqrt{x+i}=\pm(U+iV),\quad \left.\begin{matrix}U^2\\V^2\end{matrix}\right\}=\frac{\sqrt{1+x^2}\pm x}{2}.$$

Положив $x=\operatorname{sh}2t$, получим также

$$u=\operatorname{ch}t,\quad v=\operatorname{sh}t,\quad U=\sqrt{0{,}5}\,e^{t},\quad V=\sqrt{0{,}5}\,e^{-t}.$$

В общем случае

$$0<b<a:\quad x=\frac{b}{a},\quad \sqrt{a+ib}=\pm(u\sqrt{a}+iv\sqrt{a}),$$

$$\sqrt{-a+ib}=\pm(v\sqrt{a}+iu\sqrt{a});$$

$$0<a<b:\quad x=\frac{a}{b},\quad \sqrt{a+ib}=\pm(U\sqrt{b}+iV\sqrt{b}),$$

$$\sqrt{-a+ib}=\pm(V\sqrt{b}+iU\sqrt{b}).$$

Таблица 2. **Квадратные корни из комплексных чисел**

$\sqrt{1+ix}=u+iv$ $\qquad$ $\sqrt{-1+ix}=v+iu$

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,00	00	00	00	01	02	03	04	06	08	10
	0,0	000	050	100	150	200	250	300	350	400	450
0,1	1,00	12	15	18	21	24	28	32	36	40	45
	0,0	499	549	599	649	698	748	798	847	896	946
0,2	1,00	49	54	60	65	71	77	83	89	96	*02
	0,0	995	*044	*093	*142	*192	*240	*289	*338	*387	*435
0,3	1,01	09	17	24	32	40	48	56	64	73	82
	0,1	484	532	580	629	677	724	772	820	868	915
0,4	1,0	191	200	209	219	229	239	249	259	269	280
	0,1	963	010	*057	*104	*151	*198	*244	*291	*337	*383
0,5	1,0	291	302	313	324	336	347	359	371	383	395
	0,2	429	475	521	567	612	658	703	748	793	838
0,6	1,0	407	420	432	445	458	471	484	497	510	524
	0,2	883	927	972	*016	*060	*104	*148	*192	*235	*278
0,7	1,0	537	551	565	579	593	607	621	635	649	664
	0,3	322	365	408	450	493	536	578	620	662	704
0,8	1,0	678	693	708	723	738	753	768	783	798	814
	0,3	746	787	829	870	911	952	993	*034	*075	*115
0,9	1,0	829	844	860	876	891	907	923	939	955	971
	0,4	156	196	236	276	315	355	394	434	473	512

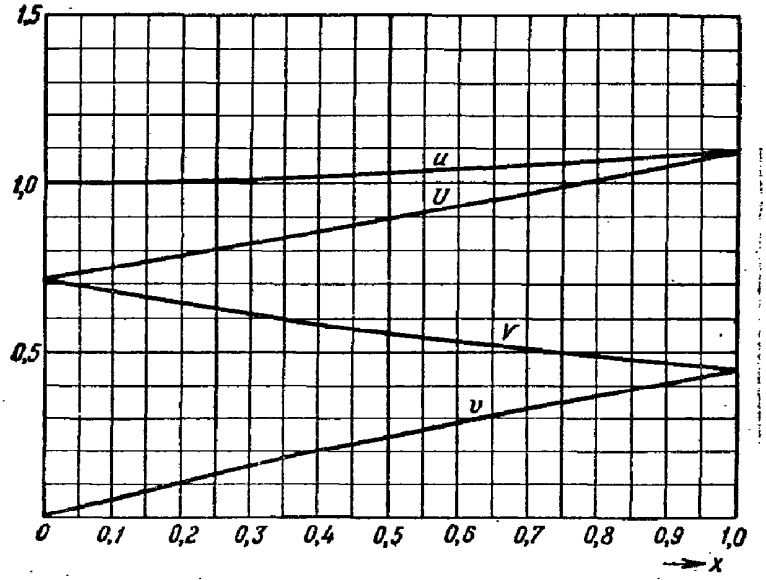


Рис. 2. $\sqrt{1+ix}=\pm(u+iv)$, $\sqrt{x+i}=\pm(U+iV)$.

Продолжение табл. 2

$\sqrt{x+i}=U+iV$ $\sqrt{-x+i}=V+iU$

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,7	071	107	142	178	214	250	286	323	359	396
	0,7	071	036	001	*966	*931	*897	*862	*828	*794	*760
0,1	0,7	433	470	507	545	582	620	657	695	733	771
	0,6	727	693	660	627	595	562	530	497	466	434
0,2	0,7	810	848	886	925	964	*002	*041	*080	*119	*158
	0,6	402	371	340	309	279	248	218	188	158	129
0,3	0,8	198	237	276	316	355	395	435	474	514	554
	0,6	099	070	041	013	*984	*956	*928	*900	*873	*845
0,4	0,8	594	634	674	714	754	794	834	874	914	954
	0,5	818	791	765	738	712	686	660	634	609	584
0,5	0,8	995	*035	*075	*115	*156	*196	*236	*276	*317	*357
	0,5	559	534	510	485	461	437	414	390	367	344
0,6	0,9	397	438	478	518	558	599	639	679	719	759
	0,5	321	298	275	253	231	209	187	166	144	123
0,7	0,9	800	840	880	920	960	*000	*040	*080	*120	*160
	0,5	102	081	061	040	020	000	*980	*960	*941	*921
0,8	1,0	200	239	279	319	359	398	438	477	517	556
	0,4	902	883	864	845	827	809	790	772	754	737
0,9	1,0	596	635	674	714	753	792	831	870	909	948
	0,4	719	701	684	667	650	633	616	600	583	567

3. Прямоугольные и полярные координаты

Таблица 3 позволяет находить величины (рис. 3)

$$1+ix=me^{i\mu}, \qquad x+i=me^{i(90^\circ-\mu)}.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{tg}\mu=x, \qquad m=\sqrt{1+x^2}=1+x\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}=\frac{1}{\cos\mu}.$$

В общем случае пусть

$$\pm a+ib=re^{i\varrho}.$$

Даны a, b; определяются r, ϱ:

$$0<b<a: \quad x=\frac{b}{a}, \quad r=am, \quad \begin{cases}\varrho=\mu,\\ \varrho=180^\circ-\mu;\end{cases}$$

$$0<a<b: \quad x=\frac{a}{b}, \quad r=bm, \quad \varrho=90^\circ\mp\mu.$$

Даны r, ϱ; определяются a, b:

$$\left.\begin{array}{ll}0<\varrho<45^\circ: & \mu=\varrho,\\ 135^\circ<\varrho<180^\circ: & \mu=180^\circ-\varrho,\end{array}\right\} \quad a=\frac{r}{m}, \quad b=\frac{r}{m}x;$$

$$45^\circ<\varrho<135^\circ: \quad \mu=|90^\circ-\varrho|, \quad a=\frac{r}{m}x, \quad b=\frac{r}{m}.$$

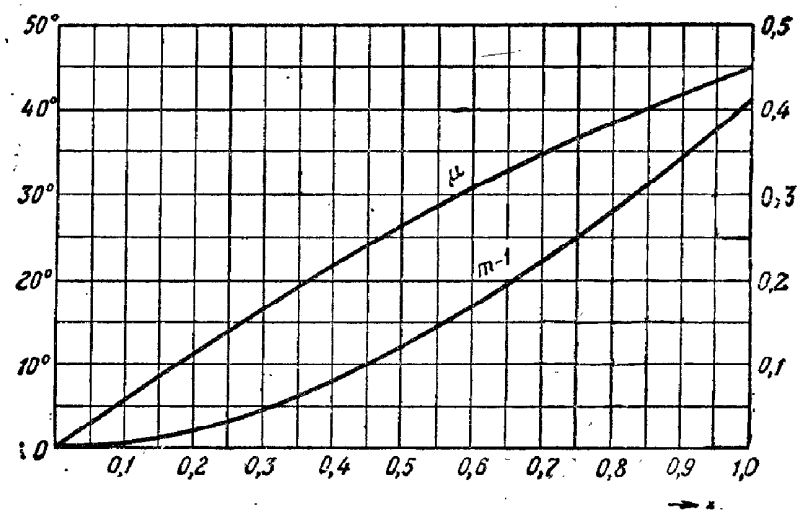


Рис. 3. $1+ix=me^{i\mu}$, $x+i=me^{i(90^\circ-\mu)}$.

Таблица 3. **Тригонометрическая форма комплексных чисел**

$1+ix=me^{i\mu}$ $\qquad$ $x+i=me^{i(90^\circ-\mu)}$

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	1,0000 0,	000 0000°	005 0573°	020 1146°	045 1719°	080 2292°	125 2865°	180 3438°	245 4011°	320 4584°	405 5157°
1	1,000 0,	0500 5729°	0605 6302°	0720 6875°	0845 7448°	0980 8021°	1125 8594°	1280 9167°	1445 9740°	1620 *0312°	1805 *0885°
2	1,000 1,	2000 1458°	2205 2030°	2420 2603°	2645 3176°	2880 3748°	3124 4321°	3379 4894°	3644 5466°	3919 6039°	4204 6611°
0,03	1,000 1,	4499 7184°	4804 7756°	5119 8328°	5444 8901°	5778 9473°	6123 *0045°	6478 *0618°	6843 *1190°	7217 *1762°	7602 *2334°

Продолжение табл. 3

$1+ix=me^{i\mu}$ $\qquad$ $x+i=me^{i(90°-\mu)}$

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,04	1,000	7997	8401	8816	9241	9675	*0120	*0573	*1037	*1513	*1998
	2,	2906°	3478°	4050°	4622°	5194°	5766°	6337°	6909°	7481°	8052°
5	1,001	2492	2997	3511	4035	4569	5114	5668	6232	6806	7390
	2,	8624°	9196°	9767°	*0338°	*0910°	*1481°	*2052°	*2623°	*3194°	*3765°
6	1,001	7984	8588	9202	9825	*0459	*1103	*1756	*2420	*3093	*3777
	3,	4336°	4907°	5478°	6049°	6619°	7190°	7760°	8331°	8901°	9472°
7	1,002	4470	5173	5886	6610	7343	8086	8839	9601	*0374	*1156
	4,	0042°	0612°	1182°	1752°	2322°	2891°	3461°	4031°	4600°	5170°
8	1,003	1948	2751	3564	4386	5218	6060	6912	7774	8645	9527
	4,	5739°	6308°	6878°	7447°	8016°	8585°	9153°	9722°	*0291°	*0859°
9	1,004	0418	1320	2231	3152	4083	5024	5974	6935	7905	8886
	5,	1428°	1996°	2564°	3132°	3700°	4268°	4836°	5404°	5971°	6539°
0,1	1,0	0499	0603	0717	0841	0975	1119	1272	1435	1607	1789
	—	5,711°	6,277°	6,843°	7,407°	7,970°	8,531°	9,090°	9,648°	10,204°	10,758°
2	1,0	1980	2181	2391	2611	2840	3078	3325	3581	3846	4120
	10×1,	1310°	1860°	2407°	2953°	3496°	4036°	4574°	5110°	5642°	6172°
3	1,0	4403	4695	4995	5304	5622	5948	6283	6626	6977	7336
	10×1,	6699°	7223°	7745°	8263°	8778°	9290°	9799°	*0305°	*0807°	*1306°
4	1,0	7703	8079	8462	8853	9252	9659	*0073	*0494	*0923	*1360
	10×2,	1801°	2294°	2782°	3268°	3750°	4228°	4702°	5174°	5641°	6105°
5	1,1	1803	2254	2712	3177	3649	4127	4613	5105	5603	6108
	10×2,	6565°	7022°	7474°	7924°	8369°	8811°	9249°	9683°	*0114°	*0541°
6	1,1	6619	7137	7661	8190	8727	9269	9817	*0371	*0930	*1495
	10×3,	0964°	1383°	1799°	2211°	2619°	3024°	3425°	3822°	4216°	4606°
7	1,2	2066	2642	3224	3811	4403	5001	5603	6211	6823	7440
	10×3,	4992°	5375°	5754°	6129°	6501°	6870°	7235°	7596°	7954°	8309°
8	1,2	8063	8690	9322	9958	*0599	*1245	*1894	*2548	*3207	*3870
	10×3,	8660°	9008°	9352°	9693°	*0030°	*0365°	*0696°	*1023°	*1348°	*1669°
9	1,3	4537	5208	5882	6562	7242	7932	8623	9316	*0015	*0716
	10×4,	1987°	2302°	2614°	2923°	3229°	3531°	3831°	4128°	4421°	4712°

4. Сложение векторов

[Таблица 4 позволяет находить величины

$$1+re^{i\frac{\pi}{2}\varrho}=se^{i\frac{\pi}{2}\sigma}, \qquad r+e^{i\frac{\pi}{2}\varrho}=se^{i\frac{\pi}{2}(\varrho-\sigma)}.$$

Очевидно, что

$$s=\sqrt{1+r^2+2r\cos\varrho}, \qquad \operatorname{ctg}\sigma=\operatorname{ctg}\varrho+\frac{1}{r\sin\varrho}.$$

Если в общем случае надо сложить заданные векторы $ae^{i\frac{\pi}{2}\alpha}$ и $be^{i\frac{\pi}{2}\beta}$, $0<b<a$, то их сумма $ae^{i\frac{\pi}{2}\alpha}+be^{i\frac{\pi}{2}\beta}=ce^{i\frac{\pi}{2}\gamma}$ находится так: определим по таблице 4 величины s и σ, соответствующие

$$r=\frac{b}{a}, \qquad \varrho=|\alpha-\beta|;$$

тогда

$$c=as, \qquad \gamma=\begin{cases}\alpha+\sigma, & \text{если } \alpha<\beta,\\ \alpha-\sigma, & \text{если } \alpha>\beta.\end{cases}]$$

Таблица 4. **Сложение векторов**

s

q	$r=0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,00	1,1000	1,2000	1,3000	1,4000	1,5000	1,6000	1,7000	1,8000	1,9000	2,0000
0,05	1,0997	1,1995	1,2993	1,3991	1,4990	1,5988	1,6987	1,7986	1,8985	1,9985
0,10	1,0989	1,1979	1,2972	1,3965	1,4959	1,5954	1,6949	1,7945	1,8942	1,9938
0,15	1,0977	1,1954	1,2936	1,3921	1,4908	1,5896	1,6886	1,7877	1,8869	1,9861
0,20	1,0955	1,1918	1,2887	1,3859	1,4836	1,5815	1,6797	1,7781	1,8767	1,9754
0,25	1,0931	1,1872	1,2823	1,3781	1,4744	1,5712	1,6684	1,7658	1,8636	1,9616
0,30	1,0900	1,1817	1,2746	1,3685	1,4632	1,5586	1,6545	1,7509	1,8477	1,9447
0,35	1,0865	1,1752	1,2655	1,3572	1,4500	1,5438	1,6382	1,7333	1,8289	1,9249
0,40	1,0825	1,1677	1,2552	1,3443	1,4349	1,5267	1,6195	1,7130	1,8073	1,9021
0,45	1,0780	1,1594	1,2435	1,3298	1,4179	1,5075	1,5983	1,6902	1,7829	1,8764
0,50	1,0730	1,1501	1,2306	1,3137	1,3990	1,4861	1,5748	1,6647	1,7558	1,8478
0,55	1,0677	1,1401	1,2164	1,2960	1,3782	1,4626	1,5489	1,6368	1,7260	1,8163
0,60	1,0619	1,1292	1,2011	1,2768	1,3556	1,4371	1,5208	1,6064	1,6935	1,7820
0,65	1,0557	1,1176	1,1847	1,2562	1,3314	1,4096	1,4905	1,5735	1,6585	1,7450
0,70	1,0492	1,1053	1,1672	1,2342	1,3054	1,3801	1,4579	1,5383	1,6209	1,7053
0,75	1,0424	1,0923	1,1487	1,2108	1,2778	1,3488	1,4233	1,5008	1,5808	1,6629
0,80	1,0353	1,0787	1,1293	1,1863	1,2486	1,3156	1,3866	1,4610	1,5383	1,6180
0,85	1,0280	1,0646	1,1091	1,1605	1,2180	1,2807	1,3479	1,4190	1,4934	1,5706
0,90	1,0204	1,0500	1,0881	1,1336	1,1859	1,2441	1,3073	1,3749	1,4462	1,5208
0,95	1,0128	1,0351	1,0663	1,1058	1,1526	1,2059	1,2648	1,3287	1,3969	1,4686
1,00	1,0050	1,0198	1,0440	1,0770	1,1180	1,1662	1,2207	1,2806	1,3454	1,4142
1,05	0,9972	1,0043	1,0212	1,0475	1,0824	1,1251	1,1748	1,2306	1,2918	1,3576
1,10	0,9893	0,9886	0,9981	1,0173	1,0457	1,0827	1,1274	1,1789	1,2363	1,2989
1,15	0,9815	0,9729	0,9746	0,9865	1,0082	1,0392	1,0785	1,1251	1,1789	1,2382
1,20	0,9738	0,9573	0,9511	0,9554	0,9700	0,9946	1,0283	1,0703	1,1197	1,1756
1,25	0,9662	0,9418	0,9276	0,9240	0,9313	0,9491	0,9769	1,0138	1,0589	1,1111
1,30	0,9588	0,9265	0,9042	0,8926	0,8922	0,9329	0,9243	0,9558	0,9964	1,0450
1,35	0,9516	0,9116	0,8812	0,8614	0,8529	0,8562	0,8709	0,8967	0,9325	0,9772
1,40	0,9447	0,8972	0,8587	0,8305	0,8138	0,8091	0,8168	0,8364	0,8672	0,9080
1,45	0,9381	0,8833	0,8369	0,8003	0,7750	0,7620	0,7621	0,7753	0,8006	0,8373
1,50	0,9320	0,8701	0,8159	0,7709	0,7368	0,7151	0,7071	0,7131	0,7329	0,7654
1,55	0,9262	0,8578	0,7961	0,7427	0,6997	0,6690	0,6523	0,6507	0,6643	0,6922
1,60	0,9210	0,8464	0,7776	0,7161	0,6641	0,6238	0,5978	0,5879	0,5948	0,6180
1,65	0,9162	0,8360	0,7605	0,6913	0,6304	0,5804	0,5443	0,5251	0,5246	0,5429
1,70	0,9120	0,8268	0,7452	0,6687	0,5992	0,5393	0,4925	0,4630	0,4541	0,4669
1,75	0,9084	0,8188	0,7319	0,6488	0,5711	0,5013	0,4434	0,4022	0,3834	0,3902
1,80	0,9054	0,8121	0,7207	0,6318	0,5468	0,4677	0,3981	0,3440	0,3132	0,3129
1,85	0,9031	0,8069	0,7117	0,6181	0,5269	0,4395	0,3587	0,2902	0,2444	0,2351
1,90	0,9014	0,8031	0,7053	0,6082	0,5122	0,4181	0,3275	0,2443	0,1793	0,1569
1,95	0,9003	0,8008	0,7013	0,6021	0,5031	0,4046	0,3071	0,2120	0,1247	0,0785
2,00	0,9000	0,8000	0,7000	0,6000	0,5000	0,4000	0,3000	0,2000	0,1000	0,0000

Продолжение табл. 4

σ

ϱ	$r=0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,05	0,00454	0,00833	0,01153	0,01428	0,01666	0,01875	0,02059	0,02222	0,02368	0,02500
0,10	0,00906	0,01663	0,02304	0,02854	0,03330	0,03745	0,04116	0,04443	0,04738	0,05000
0,15	0,01354	0,02487	0,03448	0,04274	0,04990	0,05617	0,06171	0,06663	0,07103	0,07500
0,20	0,01796	0,03303	0,04584	0,05685	0,06642	0,07481	0,08221	0,08880	0,09469	0,10000
0,25	0,02229	0,04107	0,05707	0,07086	0,08285	0,09337	0,10266	0,11093	0,11834	0,12500
0,30	0,02652	0,04897	0,06816	0,08473	0,09916	0,11184	0,12304	0,13302	0,14196	0,15000
0,35	0,03063	0,05669	0,07905	0,09842	0,11533	0,13019	0,14334	0,15506	0,16555	0,17500
0,40	0,03458	0,06420	0,08974	0,11192	0,13132	0,14840	0,16354	0,17703	0,18911	0,20000
0,45	0,03838	0,07147	0,10016	0,12517	0,14710	0,16645	0,18361	0,19899	0,2126	0,2250
0,50	0,04198	0,07848	0,11030	0,13815	0,16265	0,18431	0,20355	0,2207	0,2361	0,2500
0,55	0,04538	0,08518	0,12010	0,15082	0,17793	0,20195	0,2233	0,2424	0,2596	0,2750
0,60	0,04855	0,09154	0,12953	0,16313	0,19290	0,2193	0,2429	0,2640	0,2829	0,3000
0,65	0,05147	0,09752	0,13855	0,17504	0,2075	0,2364	0,2623	0,2854	0,3063	0,3250
0,70	0,05413	0,10309	0,14710	0,18650	0,2217	0,2532	0,2814	0,3067	0,3295	0,3500
0,75	0,05650	0,10821	0,15513	0,19745	0,2355	0,2696	0,3003	0,3278	0,3526	0,3750
0,80	0,05857	0,11284	0,16260	0,2078	0,2487	0,2856	0,3188	0,3487	0,3757	0,4000
0,85	0,06031	0,11695	0,16944	0,2176	0,2614	0,3011	0,3370	0,3694	0,3986	0,4250
0,90	0,06172	0,12048	0,17559	0,2266	0,2734	0,3161	0,3548	0,3898	0,4214	0,4500
0,95	0,06276	0,12340	0,18098	0,2349	0,2847	0,3304	0,3721	0,4098	0,4441	0,4750
1,00	0,06345	0,12567	0,18555	0,2422	0,2952	0,3440	0,3888	0,4296	0,4665	0,5000
1,05	0,06375	0,12723	0,18921	0,2486	0,3047	0,3568	0,4049	0,4488	0,4888	0,5250
1,10	0,06366	0,12806	0,19189	0,2539	0,3131	0,3687	0,4203	0,4676	0,5108	0,5500
1,15	0,06317	0,12811	0,19351	0,2580	0,3203	0,3795	0,4348	0,4859	0,5326	0,5750
1,20	0,06228	0,12734	0,19396	0,2607	0,3262	0,3890	0,4483	0,5034	0,5540	0,6000
1,25	0,06097	0,12572	0,19318	0,2619	0,3304	0,3971	0,4606	0,5201	0,5750	0,6250
1,30	0,05925	0,12321	0,19105	0,2615	0,3328	0,4034	0,4715	0,5358	0,5955	0,6500
1,35	0,05712	0,11980	0,18750	0,2592	0,3332	0,4077	0,4807	0,5503	0,6153	0,6750
1,40	0,05459	0,11545	0,18243	0,2548	0,3312	0,4096	0,4877	0,5633	0,6345	0,7000
1,45	0,05166	0,11016	0,17576	0,2482	0,3265	0,4087	0,4923	0,5745	0,6526	0,7250
1,50	0,04835	0,10393	0,16744	0,2392	0,3186	0,4043	0,4936	0,5832	0,6695	0,7500
1,55	0,04467	0,09677	0,15740	0,2275	0,3072	0,3958	0,4910	0,5888	0,6848	0,7750
1,60	0,04066	0,08871	0,14564	0,2130	0,2919	0,3825	0,4833	0,5902	0,6978	0,8000
1,65	0,03632	0,07978	0,13216	0,19553	0,2729	0,3633	0,4691	0,5861	0,7075	0,8250
1,70	0,03170	0,07005	0,11700	0,17508	0,2474	0,3371	0,4465	0,5741	0,7126	0,8500
1,75	0,02683	0,05959	0,10027	0,15164	0,2175	0,3029	0,4130	0,5507	0,7103	0,8750
1,80	0,02173	0,04849	0,08212	0,12536	0,18239	0,2595	0,3656	0,5105	0,6958	0,9000
1,85	0,01646	0,03686	0,06274	0,09654	0,14221	0,2065	0,3011	0,4451	0,6586	0,9250
1,90	0,01105	0,02481	0,04239	0,06562	0,09761	0,14416	0,2171	0,3423	0,5747	0,9500
1,95	0,00555	0,01248	0,02137	0,03320	0,04963	0,07424	0,11446	0,19138	0,3832	0,9750
2,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	—

II. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Некоторые специальные тригонометрические функции

Таблицы 5, 6 позволяют находить значения часто встречающихся функций $x\operatorname{tg} x$, $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$ (рис. 4).

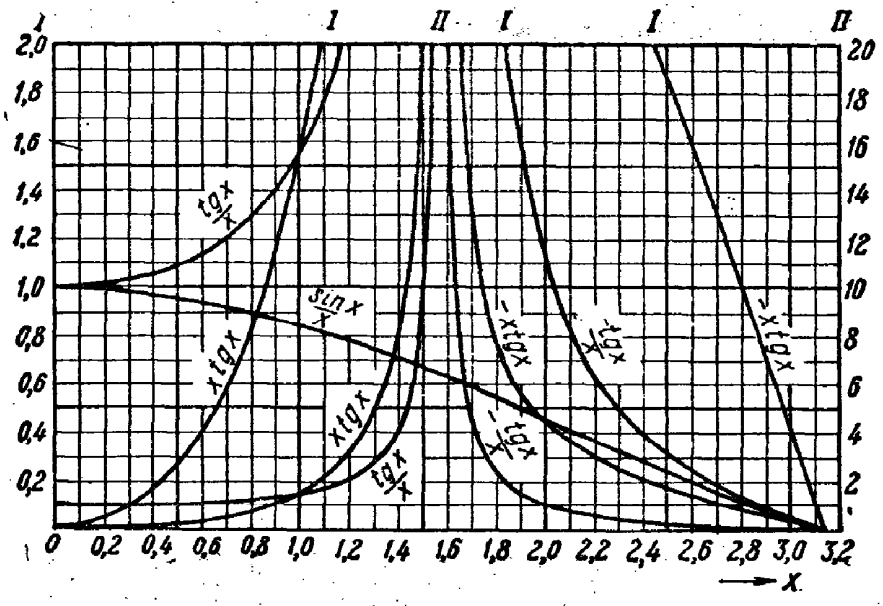


Рис. 4. Функции $x\operatorname{tg} x$, $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ и $\frac{\sin x}{x}$.

[Рис. 5, 6 дают представление о корнях трансцендентных уравнений $x\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x=u$ и $x\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}x=v$, а таблица 7 — об экстремальных точках функции $\frac{\sin x}{x}$.]

2. Элементарные трансцендентные уравнения

α) $\operatorname{tg} x=x$ или $\operatorname{tg}\xi=\frac{1}{x}$, где $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi-\xi=a-\xi$.

Решение: $x=a-\frac{1}{a}-\frac{2}{3a^3}-\frac{13}{15a^5}-\frac{146}{105a^7}-\ldots$

β) $\operatorname{tg} x=\frac{2x}{2-x^2}$: $x_1=0$, $x_2=119{,}26\cdot\frac{\pi}{180}$, $x_3=340{,}35\cdot\frac{\pi}{180}$, ...

γ) $\operatorname{tg} x=\frac{x^3-9x}{4x^2-9}$: $x_1=0$, $x_2=3{,}3422$, ...

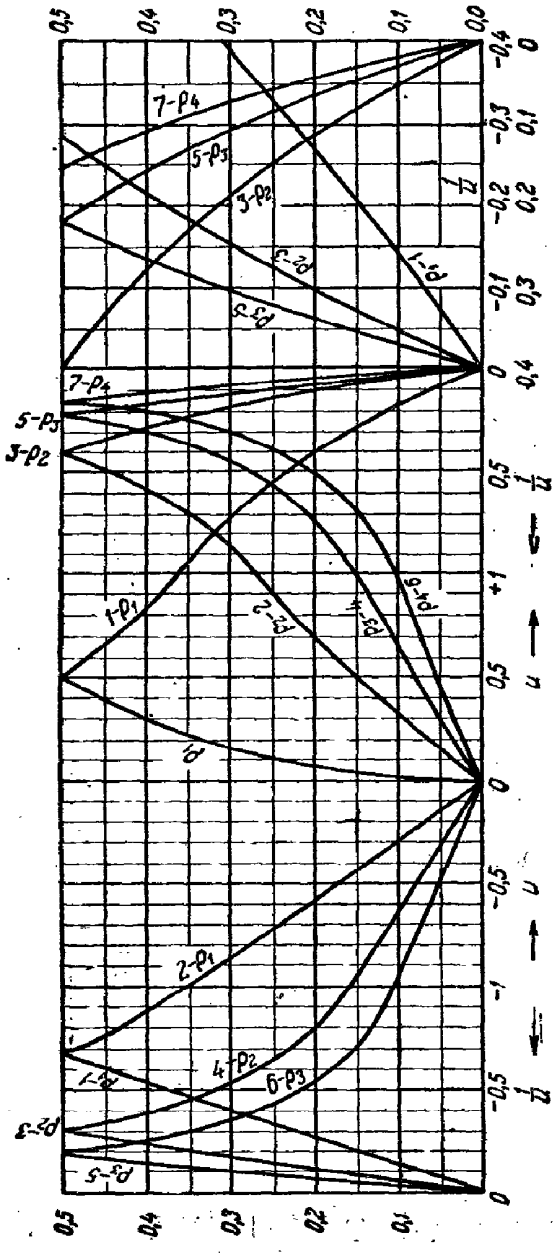


Рис. 5. Корни Q_n уравнения $x \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x = u$ как функции u.

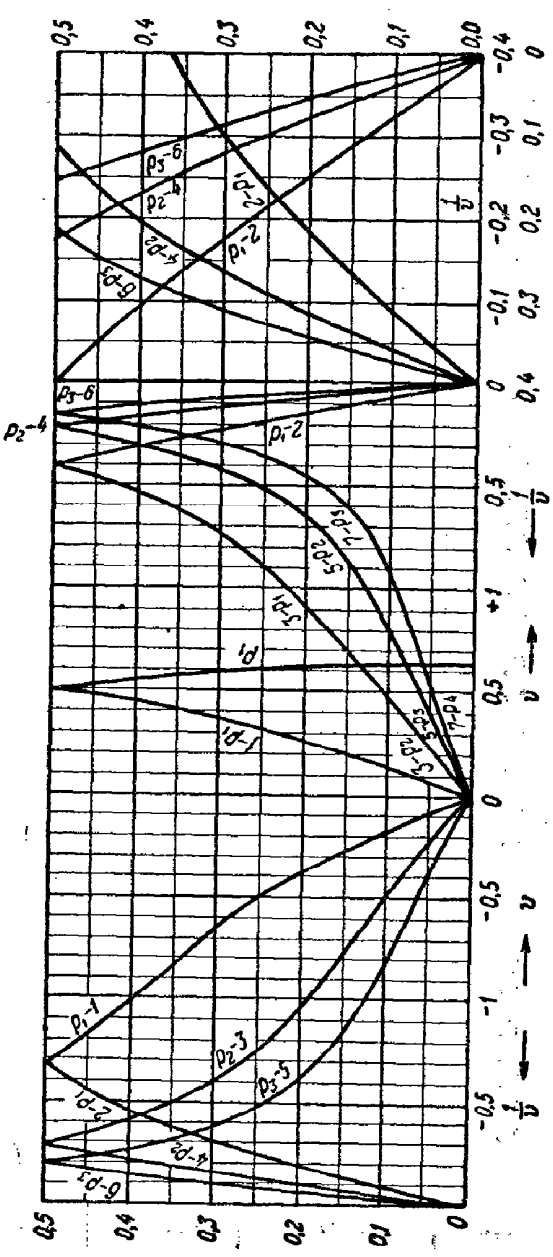


Рис. 6. Корни Q_n уравнения $x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x = v$ как функции v.

Таблица 5. Функции $x \operatorname{tg} x$, $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ и $\frac{\sin x}{x}$

$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$	$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$
0,00	0	1	1	0,53	0,3105	1,1055	0,9538
0,01	$0,0^{3}10000$	1,0000	1,0000	0,54	0,3237	1,1101	0,9521
0,02	$0,0^{3}4001$	1,0001	0,9999	0,55	0,3372	1,1147	0,9503
0,03	$0,0^{3}9003$	1,0003	0,9998	0,56	0,3511	1,1196	0,9485
0,04	$0,0^{2}16009$	1,0005	0,9997	0,57	0,3654	1,1245	0,9467
0,05	$0,0^{2}2502$	1,0008	0,9996	0,58	0,3800	1,1296	0,9449
0,06	$0,0^{2}3604$	1,0012	0,9994	0,59	0,3950	1,1348	0,9430
0,07	$0,0^{2}4908$	1,0016	0,9992	0,60	0,4105	1,1402	0,9411
0,08	$0,0^{2}6414$	1,0021	0,9989	0,61	0,4263	1,1458	0,9391
0,09	$0,0^{2}8122$	1,0027	0,9987	0,62	0,4426	1,1515	0,9372
0,10	0,010033	1,0033	0,9983	0,63	0,4593	1,1573	0,9352
0,11	0,012149	1,0041	0,9980	0,64	0,4765	1,1633	0,9331
0,12	0,014470	1,0048	0,9976	0,65	0,4941	1,1695	0,9311
0,13	0,016996	1,0057	0,9972	0,66	0,5122	1,1759	0,9290
0,14	0,01973	1,0066	0,9967	0,67	0,5308	1,1825	0,9268
0,15	0,02267	1,0076	0,9963	0,68	0,5499	1,1892	0,9247
0,16	0,02582	1,0086	0,9957	0,69	0,5695	1,1961	0,9225
0,17	0,02918	1,0097	0,9952	0 70	0,5896	1,2033	0,9203
0,18	0,03275	1,0109	0,9946	0,71	0,6103	1,2106	0,9181
0,19	0,03654	1,0122	0,9940	0,72	0,6315	1,2181	0,9158
0,20	0,04054	1,0136	0,9933	0,73	0,6533	1,2259	0,9135
0,21	0,04476	1,0150	0,9927	0,74	0,6757	1,2339	0,9112
0,22	0,04920	1,0165	0,9920	0,75	0,6987	1,2421	0,9089
0,23	0,05385	1,0180	0,9912	0,76	0,7223	1,2506	0,9065
0,24	0,05873	1,0197	0,9904	0,77	0,7466	1,2593	0,9041
0,25	0,06384	1,0214	0 9896	0,78	0,7716	1,2683	0 9016
0,26	0,06917	1,0232	0,9888	0,79	0,7973	1,2775	0,8992
0,27	0,07473	1,0250	0,9879	0,80	0,8237	1,2870	0,8967
0,28	0,08051	1,0270	0,9870	0,81	0,8509	1,2969	0,8942
0,29	0,08654	1,0290	0,9860	0,82	0,8788	1,3070	0,8916
0,30	0,09280	1,0311	0,9851	0,83	0,9075	1,3174	0,8891
0,31	0,09930	1,0333	0,9841	0,84	0,9371	1,3281	0,8865
0,32	0,10604	1,0356	0,9830	0,85	0,9676	1,3392	0,8839
0,33	0,11303	1,0380	0,9819	0,86	0,9989	1,3506	0,8812
0,34	0,12027	1,0404	0,9808	0,87	1,0312	1,3624	0,8785
0,35	0,12776	1,0429	0,9797	0,88	1,0645	1,3746	0,8758
0,36	0,13550	1,0456	0,9785	0,89	1,0988	1,3872	0,8731
0,37	0,14351	1,0483	0,9773	0,90	1,1341	1,4002	0,8704
0,38	0,15178	1,0511	0,9761	0,91	1,1706	1,4136	0,8676
0,39	0,16031	1,0540	0,9748	0,92	1,2082	1,4275	0,8648
0,40	0,16912	1,0570	0,9735	0,93	1,2470	1,4418	0,8620
0,41	0,1782	1,0601	0,9722	0,94	1,2871	1,4566	0,8591
0,42	0,1876	1,0633	0,9709	0,95	1,3285	1,4720	0,8562
0,43	0,1972	1,0666	0,9695	0,96	1,3712	1,4879	0,8533
0,44	0,2071	1,0700	0,9680	0,97	1,4154	1,5043	0,8504
0,45	0,2174	1,0735	0,9666	0,98	1,4611	1,5214	0,8474
0,46	0,2279	1,0771	0,9651	0,99	1,5084	1,5391	0,8445
0,47	0,2387	1,0808	0,9636	1,00	1,5574	1,5574	0,8415
0,48	0,2499	1,0846	0,9620	1,01	1,6081	1,5764	0,8384
0,49	0,2614	1,0885	0,9605	1,02	1,6607	1,5962	0,8354
0,50	0,2732	1,0926	0,9589	1,03	1,7152	1,6167	0,8323
0,51	0,2853	1,0968	0,9572	1,04	1,7718	1,6381	0,8292
0,52	0,2977	1,1011	0,9555	1,05	1,8305	1,6603	0,8261

Продолжение табл. 5

$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$	$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$
1,06	1,891	1,6834	0,8230	$\frac{\pi}{2}$	∞	∞	*0,6366*
1,07	1,955	1,7075	0,8198				
1,08	2,021	1,7326	0,8166	1,58	—171,67	—68,77	0,6329
1,09	2,090	1,7588	0,8134	1,59	—82,79	—32,75	0,6288
1,10	2,161	1,7861	0,8102	1,60	—54,77	—21,40	0,6247
1,11	2,236	1,8147	0,8069	1,61	—41,05	—15,835	0,6206
1,12	2,314	1,845	0,8037	1,62	—32,90	—12,535	0,6165
1,13	2,395	1,876	0,8004	1,63	—27,50	—10,350	0,6124
1,14	2,481	1,909	0,7970	1,64	—23,66	—8,797	0,6083
1,15	2,570	1,943	0,7937	1,65	—20,79	—7,636	0,6042
1,16	2,663	1,979	0,7903	1,66	—18,56	—6,735	0,6000
1,17	2,761	2,017	0,7870	1,67	—16,779	—6,016	0,5959
1,18	2,864	2,057	0,7836	1,68	—15,323	—5,429	0,5917
1,19	2,973	2,099	0,7801	1,69	—14,110	—4,940	0,5875
1,20	3,087	2,143	0,7767	1,70	—13,084	—4,527	0,5833
1,21	3,207	2,190	0,7732	1,71	—12,205	—4,174	0,5791
1,22	3,334	2,240	0,7698	1,72	—11,442	—3,868	0,5749
1,23	3,468	2,293	0,7663	1,73	—10,775	—3,600	0,5707
1,24	3,611	2,348	0,7627	1,74	—10,185	—3,364	0,5665
1,25	3,762	2,408	0,7592	1,75	—9,661	—3,155	0,5623
1,26	3,923	2,471	0,7556	1,76	—9,191	—2,967	0,5580
1,27	4,094	2,538	0,7520	1,77	—8,768	—2,799	0,5538
1,28	4,277	2,610	0,7484	1,78	—8,384	—2,646	0,5495
1,29	4,473	2,688	0,7448	1,79	—8,035	—2,508	0,5453
1,30	4,683	2,771	0,7412	1,80	—7,715	—2,381	0,5410
1,31	4,909	2,860	0,7375	1,81	—7,422	—2,265	0,5368
1,32	5,152	2,957	0,7339	1,82	—7,151	—2,159	0,5325
1,33	5,416	3,062	0,7302	1,83	—6,901	—2,061	0,5282
1,34	5,703	3,176	0,7265	1,84	—6,669	—1,970	0,5239
1,35	6,015	3,300	0,7228	1,85	—6,453	—1,885	0,5196
1,36	6,356	3,436	0,7190	1,86	—6,251	—1,807	0,5153
1,37	6,731	3,586	0,7153	1,87	—6,062	—1,7336	0,5110
1,38	7,145	3,752	0,7115	1,88	—5,885	—1,6651	0,5067
1,39	7,604	3,936	0,7077	1,89	—5,719	—1,6009	0,5024
1,40	8,117	4,141	0,7039	1,90	—5,561	—1,5406	0,4981
1,41	8,693	4,373	0,7001	1,91	—5,413	—1,4838	0,4937
1,42	9,345	4,635	0,6962	1,92	—5,273	—1,4304	0,4894
1,43	10,089	4,934	0,6924	1,93	—5,140	—1,3799	0,4851
1,44	10,947	5,279	0,6885	1,94	—5,014	—1,3321	0,4807
1,45	11,945	5,681	0,6846	1,95	—4,893	—1,2869	0,4764
1,46	13,123	6,157	0,6807	1,96	—4,779	—1,2440	0,4720
1,47	14,534	6,726	0,6768	1,97	—4,670	—1,2033	0,4677
1,48	16,255	7,421	0,6729	1,98	—4,566	—1,1646	0,4634
1,49	18,40	8,288	0,6690	1,99	—4,466	—1,1277	0,4590
1,50	21,15	9,401	0,6650	2,00	—4,370	—1,0925	0,4546
1,51	24,81	10,880	0,6610	2,01	—4,278	—1,0590	0,4503
1,52	29,90	12,940	0,6570	2,02	—4,190	—1,0269	0,4459
1,53	37,48	16,012	0,6531	2,03	—4,106	—0,9963	0,4416
1,54	49,99	21,08	0,6490	2,04	—4,024	—0,9669	0,4372
1,55	74,52	31,02	0,6450	2,05	—3,945	—0,9388	0,4329
1,56	144,49	59,37	0,6410	2,06	—3,870	—0,9118	0,4285
1,57	1971,55	799,85	0,6369	2,07	—3,796	—0,8860	0,4241

Продолжение табл. 5

$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$	$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$
2,08	— 3,726	— 0,8611	0,4198	2,62	— 1,5057	— 0,2193	0,1902
2,09	— 3,657	— 0,8372	0,4154	2,63	— 1,4766	— 0,2135	0,1861
				2,64	— 1,4477	— 0,2077	0,1821
2,10	— 3,591	— 0,8142	0,4111	2,65	— 1,4189	— 0,2021	0,17812
2,11	— 3,526	— 0,7921	0,4067	2,66	— 1,3902	— 0,1965	0,17413
2,12	— 3,464	— 0,7707	0,4023	2,67	— 1,3616	— 0,1910	0,17015
2,13	— 3,403	— 0,7502	0,3980	2,68	— 1,3331	— 0,1856	0,16618
2,14	— 3,345	— 0,7303	0,3936	2,69	— 1,3047	— 0,1803	0,16223
2,15	— 3,287	— 0,7112	0,3893	2,70	— 1,2764	— 0,17508	0,15829
2,16	— 3,232	— 0,6926	0,3849	2,71	— 1,2481	— 0,16994	0,15436
2,17	— 3,177	— 0,6747	0,3805	2,72	— 1,2199	— 0,16488	0,15045
2,18	— 3,124	— 0,6574	0,3762	2,73	— 1,1917	— 0,15990	0,14655
2,19	— 3,073	— 0,6407	0,3718	2,74	— 1,1636	— 0,15499	0,14266
2,20	— 3,022	— 0,6245	0,3675	2,75	— 1,1355	— 0,15015	0,13879
2,21	— 2,973	— 0,6088	0,3632	2,76	— 1,1075	— 0,14538	0,13493
2,22	— 2,925	— 0,5935	0,3588	2,77	— 1,0795	— 0,14069	0,13108
2,23	— 2,878	— 0,5787	0,3545	2,78	— 1,0515	— 0,13605	0,12725
2,24	— 2,832	— 0,5644	0,3501	2,79	— 1,0235	— 0,13148	0,12344
2,25	— 2,787	— 0,5505	0,3458	2,80	— 0,9955	— 0,12697	0,11964
2,26	— 2,743	— 0,5370	0,3415	2,81	— 0,9675	— 0,12253	0,11585
2,27	— 2,699	— 0,5239	0,3372	2,82	— 0,9395	— 0,11814	0,11208
2,28	— 2,657	— 0,5111	0,3328	2,83	— 0,9115	— 0,11381	0,10833
2,29	— 2,615	— 0,4987	0,3285	2,84	— 0,8835	— 0,10954	0,10459
2,30	— 2,574	— 0,4866	0,3242	2,85	— 0,8554	— 0,10532	0,10087
2,31	— 2,534	— 0,4749	0,3199	2,86	— 0,8273	— 0,10115	0,09716
2,32	— 2,494	— 0,4634	0,3156	2,87	— 0,7992	— 0,09703	0,09347
2,33	— 2,455	— 0,4523	0,3113	2,88	— 0,7711	— 0,09296	0,08980
2,34	— 2,417	— 0,4414	0,3070	2,89	— 0,7428	— 0,08894	0,08614
2,35	— 2,379	— 0,4308	0,3028	2,90	— 0,7146	— 0,08497	0,08250
2,36	— 2,342	— 0,4205	0,2985	2,91	— 0,6862	— 0,08104	0,07888
2,37	— 2,305	— 0,4104	0,2942	2,92	— 0,6579	— 0,07715	0,07527
2,38	— 2,269	— 0,4006	0,2899	2,93	— 0,6294	— 0,07331	0,07168
2,39	— 2,234	— 0,3910	0,2857	2,94	— 0,6008	— 0,06951	0,06811
2,40	— 2,198	— 0,3817	0,2814	2,95	— 0,5722	— 0,06575	0,06455
2,41	— 2,164	— 0,3725	0,2772	2,96	— 0,5435	— 0,06203	0,06101
2,42	— 2,129	— 0,3636	0,2730	2,97	— 0,5147	— 0,05835	0,05749
2,43	— 2,095	— 0,3549	0,2687	2,98	— 0,4858	— 0,05470	0,05399
2,44	— 2,062	— 0,3463	0,2645	2,99	— 0,4568	— 0,05109	0,05051
2,45	— 2,029	— 0,3380	0,2603	3,00	— 0,4276	— 0,04752	0,04704
2,46	— 1,996	— 0,3298	0,2561	3,01	— 0,3984	— 0,04397	0,04359
2,47	— 1,963	— 0,3218	0,2519	3,02	— 0,3690	— 0,04046	0,04016
2,48	— 1,931	— 0,3140	0,2477	3,03	— 0,3395	— 0,03698	0,03675
2,49	— 1,899	— 0,3063	0,2436	3,04	— 0,3099	— 0,03353	0,03336
2,50	— 1,868	— 0,2988	0,2394	3,05	— 0,2801	— 0,03011	0,02999
2,51	— 1,836	— 0,2915	0,2352	3,06	— 0,2502	— 0,02672	0,02663
2,52	— 1,8051	— 0,2843	0,2311	3,07	— 0,2202	— 0,02336	0,02330
2,53	— 1,7743	— 0,2772	0,2269	3,08	— 0,1899	— 0,02002	0,01998
2,54	— 1,7437	— 0,2703	0,2228	3,09	— 0,15956	— 0,016711	0,016689
2,55	— 1,7133	— 0,2635	0,2187	3,10	— 0,12901	— 0,013425	0,013413
2,56	— 1,6831	— 0,2568	0,2146	3,11	— 0,09829	— 0,010162	0,010157
2,57	— 1,6531	— 0,2503	0,2105	3,12	— 0,06738	— 0,006922	0,006920
2,58	— 1,6233	— 0,2439	0 2064	3,13	— 0,03629	— 0,003704	0,003704
2,59	— 1,5936	— 0,2376	0,2023	3,14	— $0,0^{2}5001$	— $0,0^{3}5072$	$0,0^{3}5072$
2,60	— 1,5642	— 0,2314	0,1983	π	0	0	0
2,61	— 1,5348	— 0,2253	0,1942				

Таблица 6. Функции $x \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$ и $x \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}x$

x	$x \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$	$x \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}x$	x	$x \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$	$x \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}x$	x	$x \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$	$x \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}x$
0,0	0,000000	0,6366	3,0	$\pm\infty$	$\pm$ 0,0000	6,0	$\mp$ 0,0000	$\mp\infty$
0,1	0,015838	0,6314	3,1	— 19,573	— 0,4910	6,1	+ 0,9861	+ 38,51
0,2	0,06498	0,6155	3,2	— 9,849	— 1,0397	6,2	2,0145	19,082
0,3	0,15286	0,5888	3,3	— 6,477	— 1,6814	6,3	3,210	12,364
0,4	0,2906	0,5506	3,4	— 4,680	— 2,470	6,4	4,650	8,809
0,5	0,5000	0,5000	3,5	— 3,500	— 3,500	6,5	6,500	6,500
0,6	0,8258	0,4359	3,6	— 2,616	— 4,955	6,6	9,084	4,795
0,7	1,3738	0,3567	3,7	— 1,8852	— 7,262	6,7	13,149	3,414
0,8	2,462	0,2599	3,8	— 1,2347	— 11,695	6,8	20,93	2,209
0,9	5,682	0,14255	3,9	— 0,6177	— 24,62	6,9	43,56	1,0928
1,0	$\pm\infty$	$\pm$ 0,00000	4,0	$\mp$ 0,0000	$\mp\infty$	7,0	$\pm\infty$	$\pm$ 0,0000
1,1	— 6,945	— 0,17422	4,1	+ 0,6494	+ 25,89	7,1	— 44,83	— 1,1245
1,2	— 3,693	— 0,3899	4,2	1,3647	12,926	7,2	— 22,159	— 2,3394
1,3	— 2,551	— 0,6624	4,3	2,191	8,439	7,3	— 14,327	— 3,720
1,4	— 1,9269	— 1,0172	4,4	3,197	6,056	7,4	— 10,185	— 5,376
1,5	— 1,5000	— 1,5000	4,5	4,500	4,500	7,5	— 7,500	— 7,500
1,6	— 1,1625	— 2,202	4,6	6,331	3,342	7,6	— 5,522	— 10,461
1,7	— 0,8662	— 3,336	4,7	9,224	2,395	7,7	— 3,923	— 15,112
1,8	— 0,5849	— 5,540	4,8	14,773	1,5596	7,8	— 2,5344	— 24,006
1,9	— 0,3009	— 11,996	4,9	30,94	0,7761	7,9	— 1,2512	— 49,879
2,0	$\mp$ 0,0000	$\mp\infty$	5,0	$\pm\infty$	$\pm$ 0,0000	8,0	$\mp$ 0,0000	$\mp\infty$
2,1	0,3326	+ 13,259	5,1	— 32,20	— 0,8078	8,1	+ 1,2839	+ 51,14
2,2	0,7148	6,771	5,2	— 16,004	— 1,6896	8,2	2,6643	25,237
2,3	1,1719	4,514	5,3	— 10,402	— 2,709	8,3	4,229	16,290
2,4	1,7437	3,303	5,4	— 7,432	— 3,923	8,4	6,103	11,562
2,5	2,5000	2,500	5,5	— 5,500	— 5,500	8,5	8,500	8,500
2,6	3,579	1,8890	5,6	— 4,069	— 7,708	8,6	11,837	6,248
2,7	5,299	1,3757	5,7	— 2,904	— 11,187	8,7	17,075	4,433
2,8	8,617	0,9098	5,8	— 1,8845	— 17,851	8,8	27,084	2,8593
2,9	18,310	0,4593	5,9	— 0,9345	— 37,25	8,9	56,19	1,4096
3,0	$\pm\infty$	$\pm$ 0,0000	6,0	$\mp$ 0,0000	$\mp\infty$	9,0	$\pm\infty$	$\pm$ 0,0000

Таблица 7. Экстремумы функции $\frac{\sin x}{x}$

n	x_n	$\max_{\min}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$	n	x_n	$\max_{\min}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$
1	0	1	9	26,6664	+ 0,0375
2	4,4934	— 0,2172	10	29,8116	— 0,0335
3	7,7253	+ 0,1284	11	32,9554	+ 0,0303
4	10,9041	— 0,0913	12	36,1006	— 0,0277
5	14,0662	+ 0,0709	13	39,2444	+ 0,0255
6	17,2208	— 0,0580	14	42,3879	— 0,0236
7	20,3713	+ 0,0490	15	45,5311	+ 0,0220
8	23,5195	— 0,0425	16	48,6741	— 0,0205
			17	51,8170	+ 0,0193

III. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Определения

$$\operatorname{sh} x=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots, \qquad \operatorname{ch} x=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots,$$

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+\ldots\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right), \qquad \operatorname{cth} x=\frac{1}{\operatorname{th} x};$$

$$\operatorname{Arsh} x=x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^7}{7}+\ldots(|x|<1), \qquad \operatorname{Arch} x=\operatorname{Arsh}\sqrt{x^2-1},$$

$$\operatorname{Arth} x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots(|x|<1).$$

Графики функций см. на рис. 7.

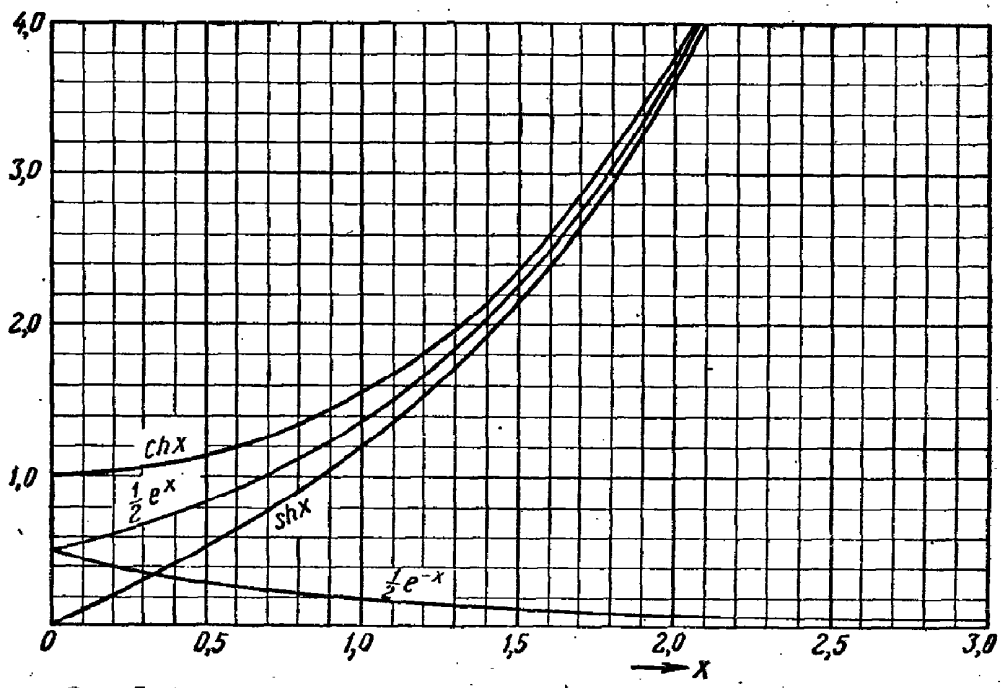


Рис. 7. Показательная функция, гиперболические синус и косинус.

2. Частные значения

$\operatorname{sh} 0=0$, $\operatorname{ch} 0=1$, $\operatorname{th} 0=0$, $\operatorname{sh}\infty=\infty$, $\operatorname{ch}\infty=\infty$, $\operatorname{th}\infty=1$.

Другие значения приведены ниже в таблице 8.

3. Основные соотношения

$$\operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh}x,\quad \operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch}x,\quad \operatorname{th}(-x)=-\operatorname{th}x,$$
$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1,\quad (\operatorname{ch}x\pm\operatorname{sh}x)^n=\operatorname{ch}nx\pm\operatorname{sh}nx.$$

4. Представление одной функции через другие

$$\operatorname{sh}x=\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}=\frac{\operatorname{th}x}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2x}},\quad \operatorname{ch}x=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2x}=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2x}},$$
$$\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2x}}=\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2x-1}}{\operatorname{ch}x},\quad \frac{\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x}=\frac{1+\operatorname{th}x}{1-\operatorname{th}x};$$
$$\operatorname{Arsh}x=\operatorname{Arch}\sqrt{x^2+1}=\operatorname{Arth}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$
$$\operatorname{Arch}x=\operatorname{Arsh}\sqrt{x^2-1}=\operatorname{Arth}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=2\operatorname{Arch}\sqrt{\frac{x+1}{2}}=2\operatorname{Arsh}\sqrt{\frac{x-1}{2}},$$
$$\operatorname{Arth}x=\operatorname{Arsh}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{Arch}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\operatorname{Arsh}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{1}{2}\operatorname{Arch}\frac{1+x^2}{1-x^2}=\frac{1}{2}\operatorname{Arth}\frac{2x}{1+x^2}.$$

5. Формулы сложения

$$\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y,\quad \operatorname{th}(x\pm y)=\frac{\operatorname{th}x\pm\operatorname{th}y}{1\pm\operatorname{th}x\operatorname{th}y};$$
$$\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y,$$
$$\operatorname{sh}x+\operatorname{sh}y=2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2},\quad \operatorname{ch}x+\operatorname{ch}y=2\operatorname{ch}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2},$$
$$\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}y=2\operatorname{ch}\frac{x+y}{2}\operatorname{sh}\frac{x-y}{2},\quad \operatorname{ch}x-\operatorname{ch}y=2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{sh}\frac{x-y}{2},$$
$$\operatorname{th}x\pm\operatorname{th}y=\frac{\operatorname{sh}(x\pm y)}{\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y};$$
$$2\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y=\operatorname{ch}(x+y)-\operatorname{ch}(x-y),\quad 2\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y=\operatorname{ch}(x+y)+\operatorname{ch}(x-y),$$
$$2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y=\operatorname{sh}(x+y)+\operatorname{sh}(x-y),\quad 2\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y=\operatorname{sh}(x+y)-\operatorname{sh}(x-y);$$
$$\operatorname{Arsh}x\pm\operatorname{Arsh}y=\operatorname{Arsh}(x\sqrt{1+y^2}\pm y\sqrt{1+x^2}),\quad \operatorname{Arth}x\pm\operatorname{Arth}y=\operatorname{Arth}\frac{x\pm y}{1\pm xy};$$
$$\operatorname{Arch}x\pm\operatorname{Arch}y=\operatorname{Arch}(xy\pm\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}),$$
$$A\operatorname{ch}x+B\operatorname{sh}x=\sqrt{A^2-B^2}\operatorname{ch}\left(x+\operatorname{Arth}\frac{B}{A}\right)=\sqrt{B^2-A^2}\operatorname{sh}\left(x+\operatorname{Arth}\frac{A}{B}\right).$$

6. Функции кратных аргументов

$$\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x=\frac{2\operatorname{th}x}{1-\operatorname{th}^2x},\quad \operatorname{sh}3x=4\operatorname{sh}^3x+3\operatorname{sh}x=\operatorname{sh}x(4\operatorname{ch}^2x-1),$$
$$\operatorname{sh}(n+1)x=2\operatorname{ch}x\operatorname{ch}nx-\operatorname{sh}(n-1)x,$$
$$\operatorname{sh}nx=n\operatorname{sh}x\operatorname{ch}^{n-1}x+\binom{n}{3}\operatorname{sh}^3x\operatorname{ch}^{n-3}x+\binom{n}{5}\operatorname{sh}^5x\operatorname{ch}^{n-5}x+\ldots;$$
$$\operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x=\frac{1+\operatorname{th}^2x}{1-\operatorname{th}^2x},\quad \operatorname{ch}3x=4\operatorname{ch}^3x-3\operatorname{ch}x=\operatorname{ch}x(4\operatorname{sh}^2x+1),$$
$$\operatorname{ch}(n+1)x=2\operatorname{ch}x\operatorname{ch}nx-\operatorname{ch}(n-1)x,$$
$$\operatorname{ch}nx=\operatorname{ch}^nx+\binom{n}{2}\operatorname{sh}^2x\operatorname{ch}^{n-2}x+\binom{n}{4}\operatorname{sh}^4x\operatorname{ch}^{n-4}x+\ldots;$$
$$\operatorname{th}2x=\frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x},\quad \operatorname{th}3x=\frac{\operatorname{th}^3x+3\operatorname{th}x}{3\operatorname{th}^2x+1},\quad 2\operatorname{cth}2x=\operatorname{th}x+\operatorname{cth}x,$$
$$\operatorname{th}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x+1}=\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{sh}x}.$$

7. Степени

$$2\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x - 1, \quad 4\operatorname{sh}^3 x = \operatorname{sh} 3x - 3\operatorname{sh} x, \quad 8\operatorname{sh}^4 x = \operatorname{ch} 4x - 4\operatorname{ch} 2x + 3,$$
$$16\operatorname{sh}^5 x = \operatorname{sh} 5x - 5\operatorname{sh} 3x + 10\operatorname{sh} x,$$
$$32\operatorname{sh}^6 x = \operatorname{ch} 6x - 6\operatorname{ch} 4x + 15\operatorname{ch} 2x - 10,$$
$$64\operatorname{sh}^7 x = \operatorname{sh} 7x - 7\operatorname{sh} 5x + 21\operatorname{sh} 3x - 35\operatorname{sh} x,$$
$$128\operatorname{sh}^8 x = \operatorname{ch} 8x - 8\operatorname{ch} 6x + 28\operatorname{ch} 4x - 56\operatorname{ch} 2x + 35;$$
$$2\operatorname{ch}^2 x = \operatorname{ch} 2x + 1, \quad 4\operatorname{ch}^3 x = \operatorname{ch} 3x + 3\operatorname{ch} x, \quad 8\operatorname{ch}^4 x = \operatorname{ch} 4x + 4\operatorname{ch} 2x + 3,$$
$$16\operatorname{ch}^5 x = \operatorname{ch} 5x + 5\operatorname{ch} 3x + 10\operatorname{ch} x,$$
$$32\operatorname{ch}^6 x = \operatorname{ch} 6x + 6\operatorname{ch} 4x + 15\operatorname{ch} 2x + 10,$$
$$64\operatorname{ch}^7 x = \operatorname{ch} 7x + 7\operatorname{ch} 5x + 21\operatorname{ch} 3x + 35\operatorname{ch} x,$$
$$128\operatorname{ch}^8 x = \operatorname{ch} 8x + 8\operatorname{ch} 6x + 28\operatorname{ch} 4x + 56\operatorname{ch} 2x + 35.$$

8. Связь с показательными функциями и логарифмами

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}},$$
$$\operatorname{th} x = 1 - \frac{e^{-x}}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = 1 + \frac{e^{-x}}{\operatorname{sh} x};$$
$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{ch}\frac{x}{2} + \operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}\frac{x}{2} - \operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \frac{1 + \operatorname{th}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}\frac{x}{2}}, \quad e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{ch}\frac{x}{2} - \operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}\frac{x}{2} + \operatorname{sh}\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{th}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{th}\frac{x}{2}};$$
$$\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = -\ln\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right),$$
$$\operatorname{Arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = -\ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right),$$
$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}, \quad \operatorname{Arth}\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\ln\frac{x + 1}{x - 1};$$
$$\ln x = \operatorname{Arsh}\frac{x^2 - 1}{2x} = \operatorname{Arch}\frac{x^2 + 1}{2x} = \operatorname{Arth}\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

9. Формулы дифференцирования и интегрирования

$$d\operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x\, dx, \quad d\operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x\, dx, \quad d\operatorname{th} x = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x};$$
$$d\operatorname{Arsh} x = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad d\operatorname{Arch} x = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}},$$
$$d\operatorname{Arth} x = \frac{dx}{1 - x^2}\ (|x| < 1), \quad d\operatorname{Arcth} x = \frac{-dx}{x^2 - 1}\ (|x| > 1).$$
$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x, \quad \int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x, \quad \int \operatorname{th} x\, dx = \ln \operatorname{ch} x,$$
$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \ln \operatorname{th}\frac{x}{2}, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{th} x} = \ln \operatorname{sh} x, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{arcsin} \operatorname{th} x = \operatorname{amph} x,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{Arsh} x, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{Arch} x, \quad \int \frac{dx}{x^2 - 1} = -\operatorname{Arcth} x \quad (x > 1),$$
$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \operatorname{Arth} x \quad (x < 1), \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}} = -\operatorname{Arsh}\frac{1}{x}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}} = -\operatorname{Arch}\frac{1}{x},$$
$$\int \operatorname{sh}^n x\, dx = \frac{\operatorname{sh}^{n-1} x \operatorname{ch} x}{n} - \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sh}^{n-2} x\, dx,$$
$$\int \operatorname{ch}^n x\, dx = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{ch}^{n-2} x\, dx,$$
$$\int \operatorname{th}^n x\, dx = -\frac{\operatorname{th}^{n-1} x}{n-1} + \int \operatorname{th}^{n-2} x\, dx \quad (n \geqslant 2),$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^n x} = -\frac{\operatorname{ch} x}{(n-1)\operatorname{sh}^{n-1} x} - \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{n-2} x} \qquad (n \geqslant 2),$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^n x} = \frac{\operatorname{sh} x}{(n-1)\operatorname{ch}^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n-2} x} \qquad (n \geqslant 2),$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{th}^n x} = -\frac{1}{(n-1)\operatorname{th}^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\operatorname{th}^{n-2} x} \qquad (n \geqslant 2);$$

$$\int \operatorname{Arsh} x\, dx = x \operatorname{Arsh} x - \sqrt{x^2+1},$$

$$\int \operatorname{Arch} x\, dx = x \operatorname{Arch} x - \sqrt{x^2-1},$$

$$\int \operatorname{Arth} x\, dx = x \operatorname{Arth} x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2).$$

10. Представления при малых значениях аргументов

$$\frac{\operatorname{sh} x}{x} \approx 1 + \frac{x^2}{6} \approx \sqrt[3]{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{x^2}{2}, \quad \frac{\operatorname{th} x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{3} \approx \frac{2}{\sqrt[3]{\operatorname{ch}^2 x}};$$

$$\operatorname{ch} x + \cos y \approx 2, \quad \operatorname{sh} x + \sin y \approx x + y, \quad \frac{\operatorname{sh} x}{x} - \frac{\sin y}{y} \approx \frac{x^2+y^2}{6},$$

$$\operatorname{ch} x - \cos y \approx \frac{x^2+y^2}{2}, \quad \operatorname{sh} x - \sin x \approx \frac{x^3}{3};$$

$$\frac{\operatorname{Arsh} x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{6}, \quad \frac{\operatorname{Arth} x}{x} \approx 1 + \frac{x^2}{3}, \quad \operatorname{Arch} x \approx \sqrt{2(x-1)},$$

$$\operatorname{Arch}(1+x) = \sqrt{2x} - \frac{x}{6}\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{3x^2}{80}\sqrt{\frac{x}{2}} - \frac{5x^2}{448}\sqrt{\frac{x}{2}} + \ldots$$

11. Асимптотика при больших значениях аргументов

$$\operatorname{sh} x \approx \operatorname{ch} x \approx \frac{1}{2}e^x, \quad \operatorname{th} x \approx 1 - 2e^{-2x}; \quad \lg(2\operatorname{sh} x) \approx \lg(2\operatorname{ch} x) \approx x \lg e;$$

$$\operatorname{Arsh} x \approx \ln(2x) + \frac{1}{(2x)^2}, \quad \operatorname{Arch} x \approx \ln(2x) - \frac{1}{(2x)^2}, \quad \operatorname{Arth}(1-x) \approx \frac{1}{2}\ln\frac{2}{x} - \frac{x}{4}.$$

12. Гиперболическая амплитуда (гудерманиан)

Гудерманиан определяется равенством (рис. 8, таблица 8)

$$\gamma = \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = 2\operatorname{arctg} e^x - \frac{\pi}{2} \equiv \operatorname{amph} x \equiv \operatorname{gd} x.$$

$$x = \int_0^\gamma \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \ln 10 \cdot \lg\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2} + 45^\circ\right);$$

$$\operatorname{sh} x = \operatorname{tg}\gamma, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos\gamma}, \quad \operatorname{th} x = \sin\gamma, \quad e^x = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{th}\frac{x}{2};$$

$$\frac{\pi}{2} - \gamma = \frac{1}{\operatorname{ch} x} + \frac{1}{6\operatorname{ch}^3 x} + \ldots, \quad \frac{\gamma}{2} = \operatorname{th}\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{th}^3\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\operatorname{th}^5\frac{x}{2} - \ldots,$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5\frac{\gamma}{2} + \ldots,$$

$$\gamma = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} - \frac{61x^7}{5040} + \ldots, \quad x = \gamma + \frac{\gamma^3}{6} + \frac{\gamma^5}{24} + \frac{61\gamma^7}{5040} + \ldots \left(\gamma < \frac{\pi}{2}\right);$$

$$d\operatorname{amph} x = d\operatorname{gd} x = \frac{dx}{\operatorname{ch} x}.$$

Если $\gamma = \operatorname{amph} x_1$, то $ix = \operatorname{amph} i\gamma$. Если положить

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2, \quad x = x_1 + ix_2,$$

то получим

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{\operatorname{sh} x_1}{\cos x_2}, \quad \operatorname{th} x_1 = \frac{\sin\gamma_1}{\operatorname{ch}\gamma_2}, \quad \operatorname{th}\gamma_2 = \frac{\sin x_2}{\operatorname{ch} x_1}, \quad \operatorname{tg} x_2 = \frac{\operatorname{sh}\gamma_2}{\cos\gamma_1}.$$

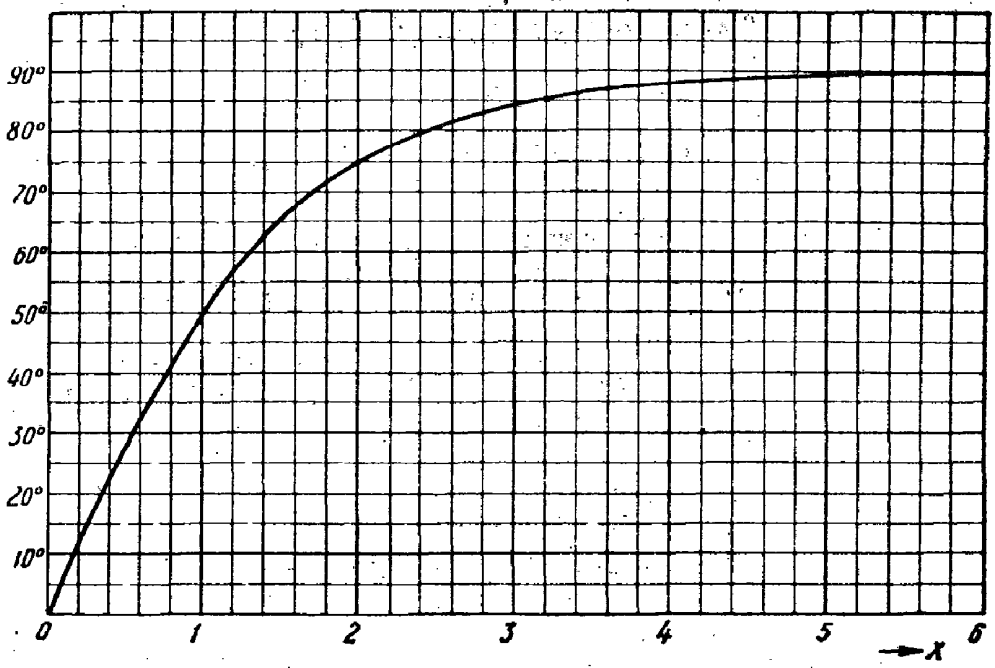


Рис. 8. Гиперболическая амплитуда (гудерманиан) $\operatorname{amph} x = \operatorname{gd} x$.

Таблица 8. Показательные и гиперболические функции

x	$e^{\frac{\pi}{2}x}$	$e^{-\frac{\pi}{2}x}$	$\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}x$	$\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}x$	$\operatorname{th}\frac{\pi}{2}x$	$\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}x$	$\frac{2}{\pi}\operatorname{amph}\frac{\pi}{2}x$
0,0	1,0000	1,0000	0,00000	1,0000	0,00000	∞	0,00000
0,1	1,1701	0,8546	0,15773	1,0124	0,15580	6,418	0,09959
0,2	1,3691	0,7304	0,3194	1,0498	0,3042	3,287	19679
0,3	1,6020	0,6242	0,4889	1,1131	0,4392	2,2769	2895
0,4	1,8745	0,5335	0,6705	1,2040	0,5569	1,7957	3760
0,5	2,1933	0,4559	0,8687	1,3246	0,6558	1,5249	4553
0,6	2,5663	0,3897	1,0883	1,4780	0,7364	1,3580	5269
0,7	3,003	0,3330	1,3349	1,6679	0,8003	1,2495	5907
0,8	3,514	0,2846	1,6145	1,8991	501	1,1763	6470
0,9	4,111	4324	1,9340	2,1772	883	1,1258	6898
1,0	4,811	0788	2,3013	2,5092	0,9172	1,0903	7390
1,1	5,629	0,17766	2,726	2,903	388	652	7761
1,2	6,586	5184	3,217	3,369	549	472	0,8081
1,3	7,706	2976	3,788	3,918	669	343	357
1,4	9,017	1090	4,453	4,564	757	249	594
1,5	10,551	0,09478	5,228	5,323	822	181	797
1,6	12,345	8100	6,132	6,213	870	132	971
1,7	14,445	6923	7,188	7,257	905	1,0096	0,9120
1,8	16,902	5916	8,421	8,481	930	70	248
1,9	19,777	5056	9,863	9,914	949	51	357
2,0	23,141	4321	11,549	11,592	963	37	450

13. Некоторые трансцендентные уравнения

α) $x \operatorname{th} x = 1$ или $\operatorname{cth} x = x$: $x = 1{,}199\,678\ldots$

β) a) $\operatorname{th} x = -\operatorname{ctg} x$, или $\cos(x\sqrt{2i}) = c\sqrt{i}$ (c — вещественное), или $\operatorname{tg}\xi = e^{-2x}$, где $x = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi - \xi$, или $\cos 2x \operatorname{ch} 2x = -1$, или *) $\operatorname{gd} 2x = (2n-1)\pi \pm 2x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$x_0 = 0{,}93755, \quad x_1 = 2{,}3470, \quad x_2 = 5{,}4978, \ldots$$

b) $\operatorname{th} x = -\operatorname{tg} x$, или $\sin(x\sqrt{2i}) = s\sqrt{-i}$ (s — действительное), или $\operatorname{tg}\xi = e^{-2x}$, где $x = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi + \xi$, или $\cos 2x \operatorname{ch} 2x = +1$:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 2{,}3650, \quad x_2 = 5{,}4978, \ldots$$

c) $\operatorname{th} x = \operatorname{tg} x$, или $\sin(x\sqrt{2i}) = s\sqrt{i}$ (s — действительное), или $\operatorname{tg}\xi = e^{-2x}$, где $x = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi - \xi$, или $\cos 2x \operatorname{ch} 2x = +1$:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 3{,}9266, \quad x_2 = 7{,}0686, \ldots$$

d) $\operatorname{th} x = \operatorname{ctg} x$ или $\cos(x\sqrt{2i}) = c\sqrt{-i}$ (c — действительное), или $\operatorname{tg}\xi = e^{-2x}$, где $x = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi + \xi$, или $\cos 2x \operatorname{ch} 2x = -1$:

$$x_0 = 0{,}9375, \quad x_1 = 3{,}9274, \quad x_2 = 7{,}0686, \ldots$$

e) Общее для этих четырех случаев уравнение:

$$\cos 2x \operatorname{ch} 2x = \pm 1;$$

его решения:

$$x_{n+1} = \left(n + 1 \pm \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} + (-1)^n \xi_n,$$

где

$$\xi_n = \frac{1}{a} \pm (-1)^n \frac{2}{a^2} + \frac{17}{3a^3} \pm (-1)^n \frac{56}{3a^4} + \ldots, \quad a = e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}.$$

[Для вычисления величин $\left(n \pm \frac{1}{4}\right)\pi$ и $\frac{1}{a} = e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}$ может быть использована таблица 9.]

Таблица 9. **Некоторые вспомогательные величины**

n	$\left(n-\frac{1}{4}\right)\pi$	$\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi$	$\frac{1}{a}$
0	—	0,785 398	0,207 880
1	2,356 195	3,926 991	0,898 329 (—2)
2	5,497 787	7,068 584	0,388 203 (—3)
3	8,639 380	10,210 176	0,167 758 (—4)
4	11,780 973	13,351 769	0,724 947 (—6)

*) Исправления внесены по книге Ф. Трикоми, Интегральные уравнения, ИЛ, 196, стр. 46.—*Прим. ред.*

IV. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

$$z = x + iy = re^{i\varphi}$$

1. Синус, косинус

$$\sin z = se^{i\sigma} = u + iv \quad \text{(рис. 9, 10, 11; таблица 10)},$$

$$\cos z = ce^{i\gamma} = u_1 + iv_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right);$$

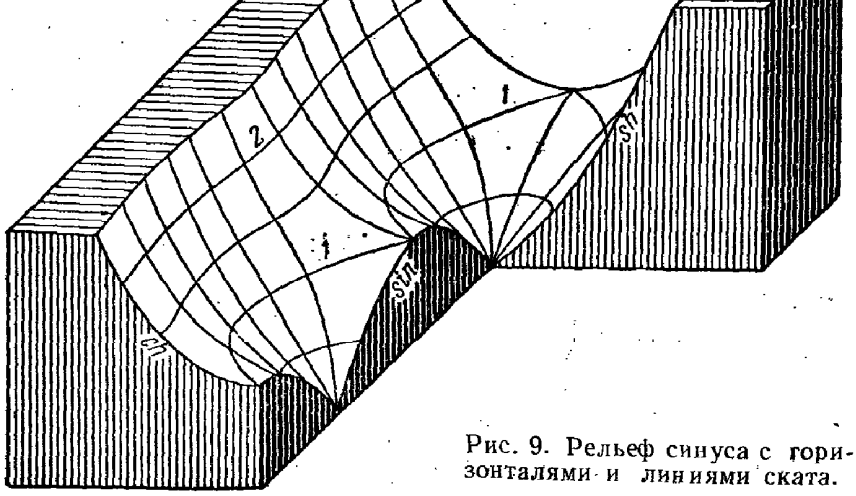


Рис. 9. Рельеф синуса с горизонталями и линиями ската.

$$u = \sin x \operatorname{ch} y, \quad v = \cos x \operatorname{sh} y, \quad u_1 = \cos x \operatorname{ch} y, \quad v_1 = -\sin x \operatorname{sh} y;$$

$$s^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y, \quad c^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y, \quad 2s^2 = \operatorname{ch} 2y - \cos 2x, \quad 2c^2 = \operatorname{ch} 2y + \cos 2x,$$

$$\operatorname{tg}\sigma = \operatorname{ctg} x \operatorname{th} y, \quad \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg} x \operatorname{th} y.$$

Для $r \ll 1$ имеем:

$$s = r - \frac{r^3}{6}\cos 2\varphi + \frac{r^5}{144}\left(1 + \frac{1}{5}\cos 4\varphi\right) - \ldots, \quad \sigma = \varphi - \frac{r^2}{6}\sin 2\varphi - \frac{r^4}{180}\sin 4\varphi - \ldots,$$

$$c = 1 - \frac{r^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{r^4}{16}\left(1 - \frac{1}{3}\cos 4\varphi\right) - \ldots, \quad \gamma = -\frac{r^2}{2}\sin 2\varphi - \frac{r^4}{12}\sin 4\varphi - \ldots;$$

для $y \gg 1$

$$s = 0{,}5e^{y} - 0{,}5e^{-y}\cos 2x + 0{,}125e^{-3y}(1 - \cos 4x) - \ldots,$$

$$\sigma = \pi/2 - x - e^{-2y}\sin 2x - 0{,}5\,e^{-4y}\sin 4x - \ldots,$$

$$c = 0{,}5e^{y} + 0{,}5e^{-y}\cos 2x + 0{,}125e^{-3y}(1 - \cos 4x) + \ldots,$$

$$\gamma = -x + e^{-2y}\sin 2x - 0{,}5e^{-4y}\sin 4x + \ldots$$

Между s, σ, c и γ существуют соотношения

$$s^2\cos 2\sigma + c^2\cos 2\gamma = 1, \quad \operatorname{ctg} 2\sigma + \operatorname{ctg}(-2\gamma) = \frac{1}{s^2\sin 2\sigma} = \frac{1}{c^2\sin(-2\gamma)},$$

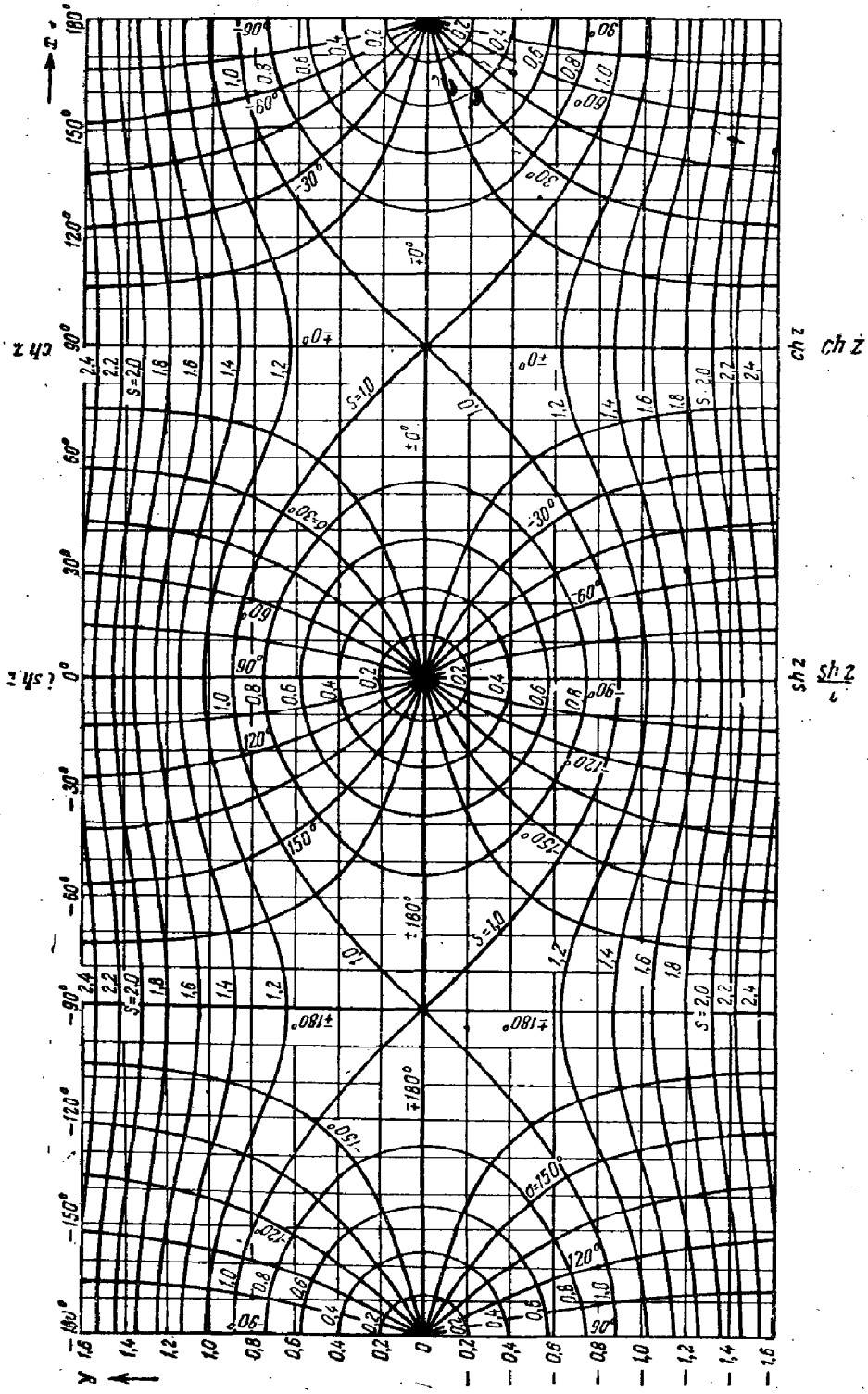


Рис. 10. Функция $\sin(x+iy)=se^{i\sigma}$. Карта горизонталей рельефа синуса. Если рассматривать карту с различных сторон, то получим функции $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, $\pm i \operatorname{sh} z$ в зависимости от выбора начала координат.

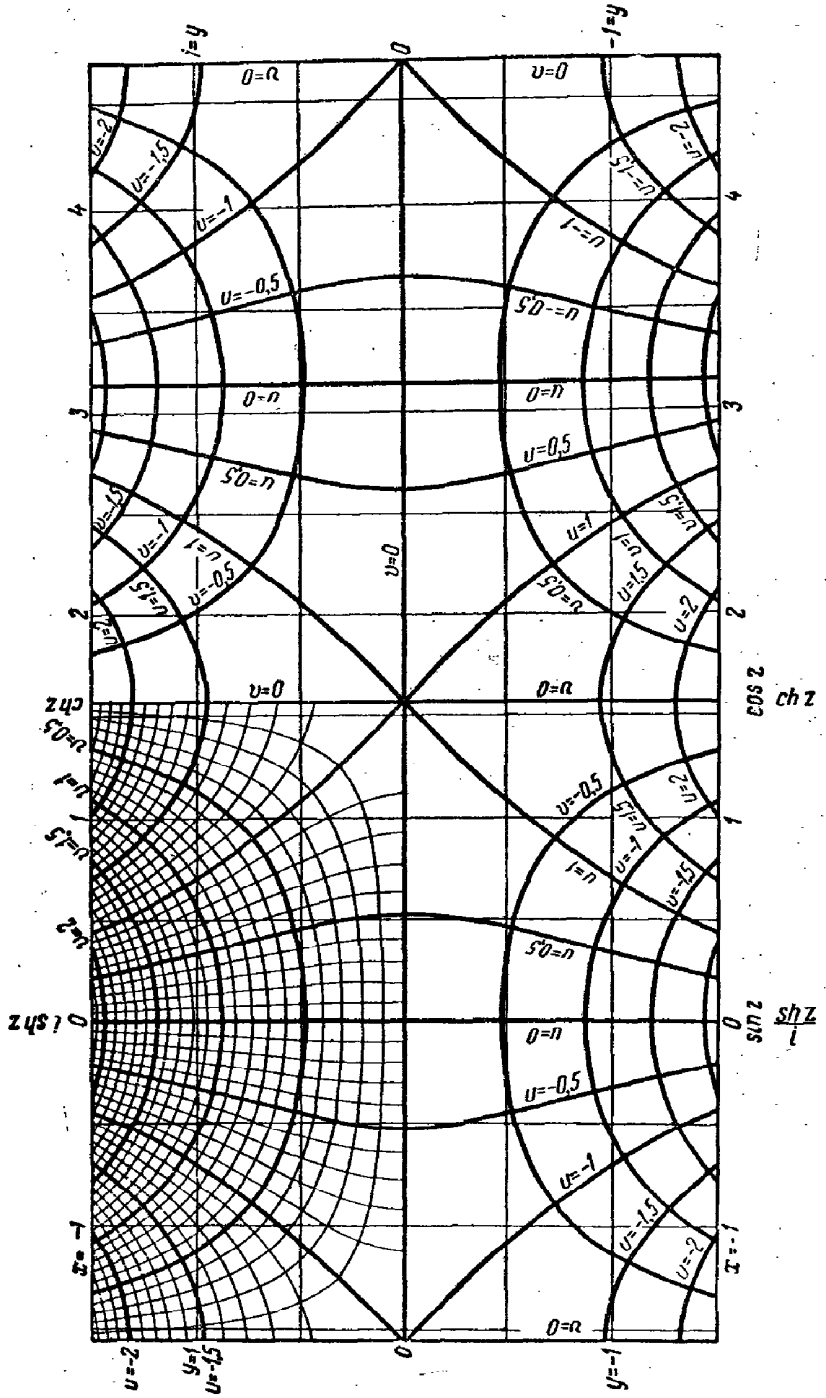


Рис. 11. Функция $\sin z = u + iv$. Кривые $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ в плоскости $z = x + iy$. Карта дает представление также о функциях $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, $\pm i \operatorname{sh} z$.

Таблица 10. **Функция** $\sin(x+iy)=se^{i\sigma}$

x в радианах

s	σ=0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,2	0,2014	0,1941	0,1732	0,1405	0,0987	0,0508	0,0000
0,4	0,4115	0,3941	0,3457	0,2748	0,1901	0,0967	0,0000
0,6	0,6435	0,6059	0,5136	0,3957	0,2673	0,1345	0,0000
0,8	0,9273	0,8311	0,6656	0,4959	0,3286	0,1637	0,0000
1,0	1,5708	1,0371	0,7854	0,5719	0,3747	0,1857	0,0000
1,2	1,5708	1,1585	0,8667	0,6261	0,4084	0,2019	0,0000
1,4	1,5708	1,2149	0,9182	0,6640	0,4329	0,2139	0,0000
1,6	1,5708	1,2439	0,9511	0,6906	0,4509	0,2228	0,0000
1,8	1,5708	1,2608	0,9730	0,7097	0,4643	0,2297	0,0000
2,0	1,5708	1,2717	0,9881	0,7237	0,4745	0,2349	0,0000
2,2	1,5708	1,2792	0,9991	0,7342	0,4823	0,2390	0,0000

x в градусах

s	σ=0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,2	11,54	11,12	9,92	8,05	5,65	2,91	0,00
0,4	23,58	22,58	19,81	15,75	10,89	5,54	0,00
0,6	36,87	34,71	29,43	22,67	15,31	7,70	0,00
0,8	53,13	47,62	38,14	28,41	18,83	9,38	0,00
1,0	90,00	59,42	45,00	32,76	21,47	10,64	0,00
1,2	90,00	66,37	49,66	35,87	23,40	11,57	0,00
1,4	90,00	69,61	52,61	38,05	24,80	12,25	0,00
1,6	90,00	71,27	54,49	39,57	25,84	12,77	0,00
1,8	90,00	72,24	55,75	40,66	26,60	13,16	0,00
2,0	90,00	72,86	56,62	41,46	27,18	13,46	0,00
2,2	90,00	73,29	57,24	42,07	27,63	13,70	0,00

y

s	σ=0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,2	0,0000	0,0527	0,1013	0,1423	0,1732	0,1923	0,1987
0,4	0,0000	0,1119	0,2110	0,2898	0,3458	0,3790	0,3900
0,6	0,0000	0,1878	0,3380	0,4450	0,5156	0,5558	0,5688
0,8	0,0000	0,3026	0,4884	0,6055	0,6787	0,7195	0,7327
1,0	0,0000	0,4890	0,6585	0,7643	0,8314	0,8692	0,8814
1,2	0,6224	0,7130	0,8287	0,9143	0,9719	1,0051	1,0160
1,4	0,8670	0,9093	0,9853	1,0520	1,1000	1,1285	1,1380
1,6	1,0462	1,0721	1,1248	1,1767	1,2165	1,2408	1,2490
1,8	1,1929	1,2099	1,2485	1,2896	1,3226	1,3434	1,3504
2,0	1,3170	1,3293	1,3588	1,3920	1,4197	1,4375	1,4436
2,2	1,4254	1,4349	1,4583	1,4855	1,5090	1,5244	1,5297.

2. Арксинус

$$\cos 2x = c^2 - s^2, \qquad \operatorname{ch} 2y = c^2 + s^2,$$

$$2\cos^2 x = c^2 + (1+s)(1-s), \qquad 2\operatorname{sh}^2 y = c^2 + (s+1)(s-1),$$

где

$$c^2 = \sqrt{1 - 2s^2\cos 2\sigma + s^4}, \qquad s^2 = \sqrt{1 - 2c^2\cos 2\gamma + c^4},$$

$$c^2 = \sqrt{(s^2-1)^2 + (2s\sin\sigma)^2}, \qquad s^2 = \sqrt{(c^2-1)^2 + (2c\sin\gamma)^2}.$$

При $s \ll 1$ имеем:

$$x = s\cos\sigma + \frac{s^3}{6}\cos 3\sigma + \frac{3s^5}{40}\cos 5\sigma + \frac{5s^7}{112}\cos 7\sigma + \ldots,$$

$$y = s\sin\sigma + \frac{s^3}{6}\sin 3\sigma + \frac{3s^5}{40}\sin 5\sigma + \frac{5s^7}{112}\sin 7\sigma + \ldots,$$

а при $s \gg 1$

$$x = \frac{\pi}{2} - \sigma - \frac{\sin 2\sigma}{(2s)^2} - \frac{3}{2}\frac{\sin 4\sigma}{(2s)^4} - \frac{10}{3}\frac{\sin 6\sigma}{(2s)^6} - \frac{35}{4}\frac{\sin 8\sigma}{(2s)^8} - \ldots,$$

$$y = \ln 2s - \frac{\cos 2\sigma}{(2s)^2} - \frac{3}{2}\frac{\cos 4\sigma}{(2s)^4} - \frac{10}{3}\frac{\cos 6\sigma}{(2s)^6} - \frac{35}{4}\frac{\cos 8\sigma}{(2s)^8} - \ldots$$

Если $|s-1| \ll 1$ и $\sigma \ll 0{,}5$, то сначала подсчитывается

$$\frac{c^2}{2} = \sqrt{\left(\frac{s+1}{2}\right)^2 (s-1)^2 + (s\sin\sigma)^2} \approx \sqrt{(s-1)^2 + \sin^2\sigma},$$

и тогда

$$\cos x = \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{1+s}{2}(1-s)} \approx \sqrt{\frac{c^2}{2} + 1 - s},$$

$$\operatorname{sh} y = \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{s+1}{2}(s-1)} \approx \sqrt{\frac{c^2}{2} + s - 1}.$$

3. Тангенс

$\operatorname{tg} z = te^{i\tau} = U + iV$ (рис. 12, 13, 14; таблица 11), $\operatorname{ctg} z = \frac{1}{t}e^{-i\tau} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$,

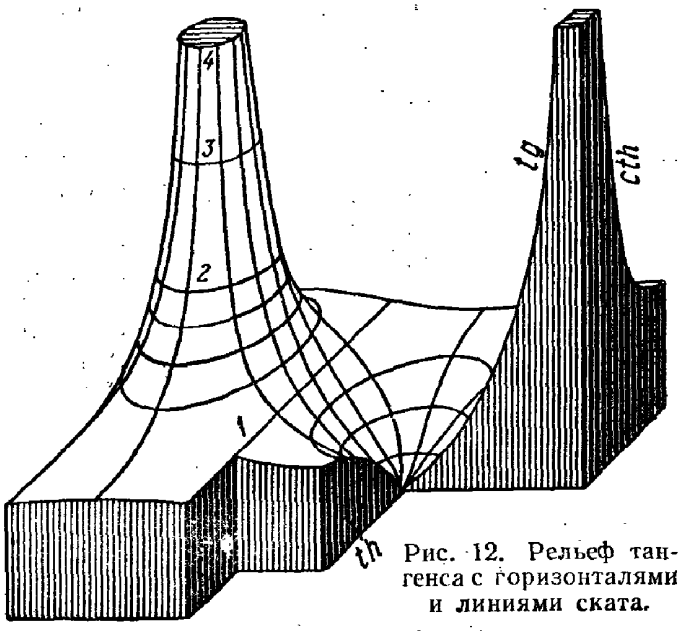


Рис. 12. Рельеф тангенса с горизонталями и линиями ската.

$$U = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y},$$

$$V = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y},$$

$$t^2 = \frac{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} = \frac{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x},$$

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\sin 2x}.$$

Для $x = 45°$ получим $t = 1$, $\tau = \operatorname{amph} 2y$,

$$U = \cos\tau = \frac{1}{\operatorname{ch} 2y},$$

$$V = \sin\tau = \operatorname{th} 2y,$$

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{sh} 2y.$$

Если $r \ll 1$, то имеем:

$$t = r + \frac{r^3}{3}\cos 2\varrho + \frac{r^5}{36}\left(1 + \frac{19}{4}\cos 4\varrho\right) + \ldots,$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{r} - \frac{r}{3}\cos 2\varrho + \frac{r^3}{36}\left(1 - \frac{9}{5}\cos 4\varrho\right) - \ldots, \quad \tau = \varrho + \frac{r^2}{3}\sin 2\varrho + \frac{7r^4}{90}\sin 4\varrho + \ldots$$

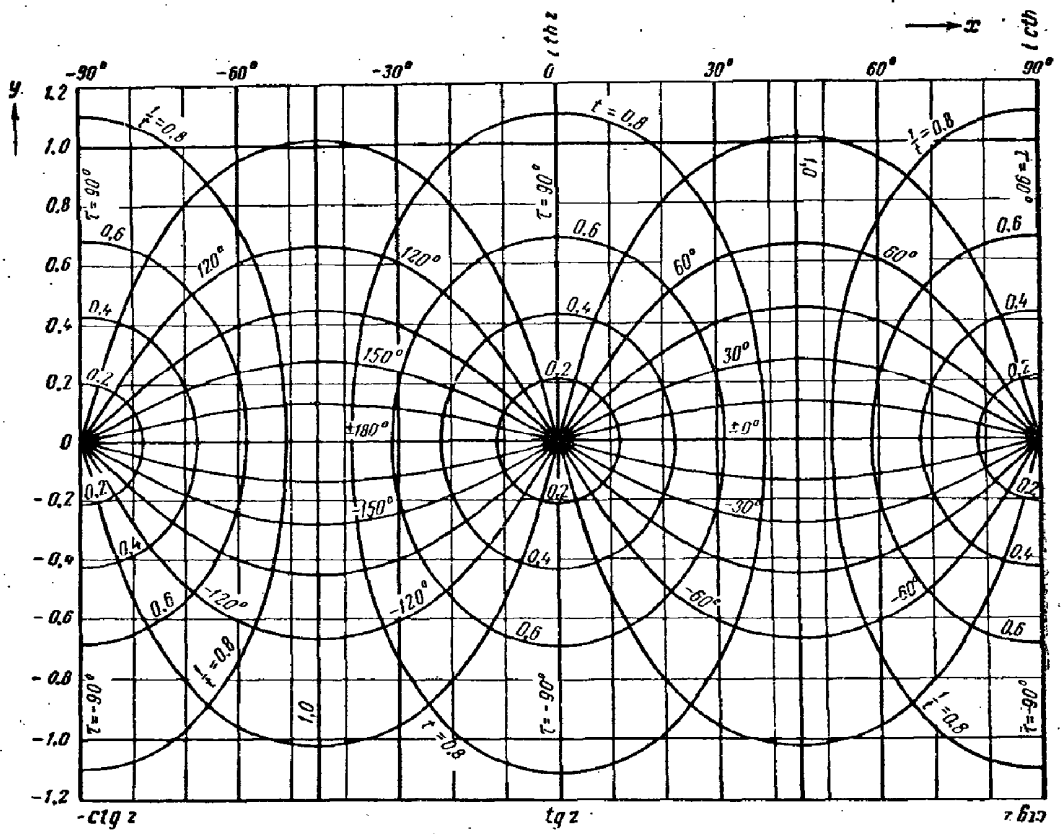


Рис. 13. Функция $\operatorname{tg}(x+iy)=te^{i\tau}$. Карта горизонталей рельефа тангенса. Если рассматривать карту с различных сторон, то получим функции $\operatorname{tg} z$, $-\operatorname{ctg} z$, $i\operatorname{th} z$, $i\operatorname{cth} z$, $\operatorname{ctg} z$ в зависимости от выбора начала координат.

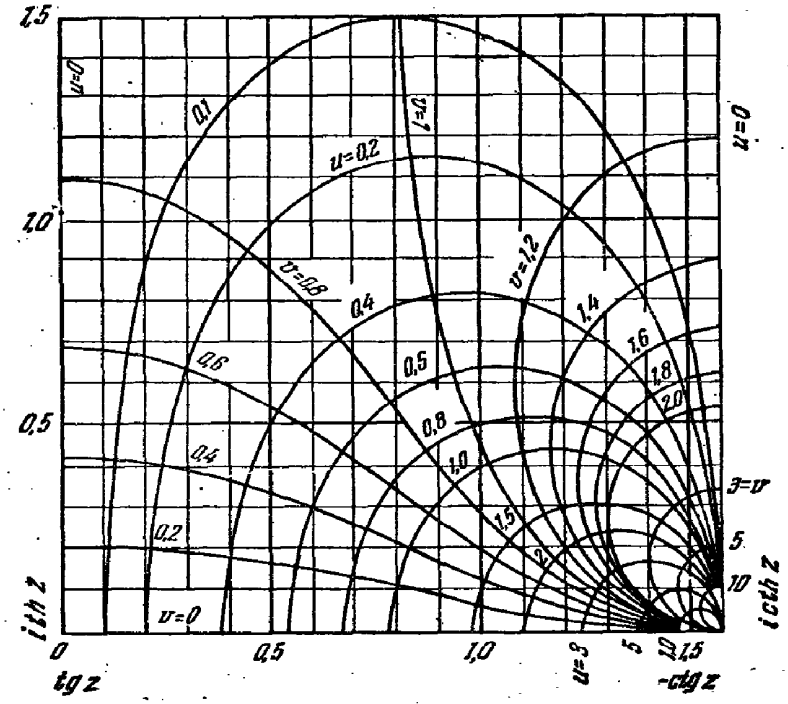


Рис. 14. Функция $\operatorname{tg} z=u+iv$. Кривые $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$ в плоскости $z=x+iy$. Карта дает представление также о функциях $-\operatorname{ctg} z$, $i\operatorname{th} z$, $i\operatorname{cth} z$.

Если $y \gg 1$, то имеем:

$$U = 2e^{-2y}\sin 2x - 2e^{-4y}\sin 4x + \ldots,$$
$$V = 1 - 2e^{-2y}\cos 2x + 2e^{-4y}\cos 4x - \ldots,$$
$$t = 1 - 2e^{-2y}\cos 2x + e^{-4y}(1+\cos 4x) - \ldots,$$
$$\operatorname{ctg}\tau = 2e^{-2y}\sin 2x(1 + e^{-4y} + \ldots);$$

затем при $p = \dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}$

$$t = \sqrt{\frac{1-p}{1+p}} = 1 - p + \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{2} + \frac{3p^4}{8} - \ldots$$

и при $q = \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{sh} 2y} = \operatorname{ctg}\tau$

$$\tau = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} q = \frac{\pi}{2} - q + \frac{q^3}{3} - \frac{q^5}{5} + \ldots$$

Таблица 11. **Функция $\operatorname{tg}(x+iy) = te^{i\tau}$**

y

t	$\tau=0°$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,2	0,0000	0,0499	0,0974	0,1395	0,1732	0,1951	0,2027
0,4	0,0000	0,0902	0,1798	0,2665	0,3444	0,4019	0,4237
0,6	0,0000	0,1162	0,2368	0,3657	0,5030	0,6322	0,6931
0,8	0,0000	0,1290	0,2666	0,4239	0,6190	0,8794	1,0987
1,0	0,0000	0,1324	0,2747	0,4407	0,6585	1,0137	∞

x в радианах

t	$\tau=0°$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,2	0,1974	0,1913	0,1732	0,1433	0,1027	0,0537	0,0000
0,4	0,3805	0,3719	0,3448	0,2963	0,2222	0,1208	0,0000
0,6	0,5404	0,5332	0,5094	0,4623	0,3766	0,2259	0,0000
0,8	0,6747	0,6710	0,6583	0,6314	0,5740	0,4276	0,0000
1,0	0,7854	0,7854	0,7854	0,7854	0,7854	0,7854	x

x в градусах

t	$\tau=0°$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,2	11,31	10,96	9,92	8,21	5,88	3,08	0,00
0,4	21,80	21,31	19,76	16,98	12,73	6,92	0,00
0,6	30,96	30,55	29,19	26,49	21,58	12,94	0,00
0,8	38,66	38,44	37,72	36,17	32,89	24,50	0,00
1,0	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	x

1/y

t	$\tau=75°$	80°	85°	90°	t	$\tau=75°$	80°	85°	90°
0,80	1,1371	1,0225	0,9409	0,9102	0,96	0,9922	0,8300	0,6595	0,5139
0,82	1,1087	0,9879	0,8991	0,8644	0,98	0,9878	0,8232	0,6441	0,4352
0,84	1,0830	0,9557	0,8584	0,8189					
0,86	1,0603	0,9262	0,8191	0,7732	0,990	0,9867	0,8215	0,6401	0,3778
0,88	1,0405	0,8997	0,7814	0,7269	0,999	0,9864	0,8209	0,6387	0,2631
					$1-10^{-6}$	0,9864	0,8209	0,6387	0,1378
0,90	1,0238	0,8765	0,7455	0,6792	$1-10^{-9}$	0,9864	0,8209	0,6387	0,0934
0,92	1,0102	0,8569	0,7124	0,6293	1,00	0,9864	0,8209	0,6387	0,0000
0,94	0,9996	0,8413	0,6831	0,5754					

Продолжение табл. 11

x в радианах

t	$\tau=75°$	80°	85°	90°
0,80	0,427[illegible]	0,3986	0,1848	0,0000
0,82	0,4567	0,3578	0,2057	0,0000
0,84	0,487[illegible]	0,3904	0,2308	0,0000
0,86	0,5208	0,4269	0,2612	0,0000
0,88	0,5555	0,4[illegible]75	0,2986	0,0000
0,90	0,5[illegible]18	0,5123	0,3451	0,0000
0,92	0,6294	0,5613	0,4035	0,0000
0,94	0,[illegible]680	0,6141	0,4766	0,0000
0,96	0,7072	0,6699	0,5663	0,0000
0,98	0,7464	0,7275	0,6715	0,0000
0,990	0,7660	0,7565	0,7280	0,0000
0,999	0,7835	0,7825	0,7797	0,0000
$1-10^{-6}$	0,7854	0,7854	0,7854	0,0000
$1-10^{-9}$	0,7854	0,7854	0,7854	0,0000
1,00	0,7854	0,7854	0,7854	x

x в градусах

t	$\tau=75°$	80°	85°	90°
0,80	24,50	18,83	10,59	0,00
0,82	26,17	20,50	11,79	0,00
0,84	27,95	22,37	13,22	0,00
0,86	29,84	24,46	14,96	0,00
0,88	31,83	26,78	17,11	0,00
0,90	33,91	29,35	19,77	0,00
0,92	36,06	32,16	23,12	0,00
0,94	38,27	35,19	27,30	0,00
0,96	40,52	38,38	32,45	0,00
0,98	42,77	41,68	38,47	0,00
0,990	43,89	43,34	41,71	0,00
0,999	44,89	44,83	44,67	0,00
$1-10^{-6}$	45,00	45,00	45,00	0,00
$1-10^{-9}$	45,00	45,00	45,00	0,00
1,00	45,00	45,00	45,00	x

4. Арктангенс

$$\operatorname{tg} 2x=\frac{2\cos\tau}{\frac{1}{t}-t}=\frac{2U}{1-U^2-V^2}=-\frac{\cos\tau}{\operatorname{sh}\vartheta}, \qquad \operatorname{th} 2y=\frac{2\sin\tau}{\frac{1}{t}+t}=\frac{2V}{1+U^2+V^2}=\frac{\sin\tau}{\operatorname{ch}\vartheta},$$

где $\vartheta=\ln t$; следовательно, $\ln\operatorname{tg} z=\vartheta+i\tau$.

Положив

$$N^2=\operatorname{sh}^2\vartheta+\cos^2\tau=\operatorname{ch}^2\vartheta-\sin^2\tau, \qquad 2N^2=\operatorname{ch} 2\vartheta+\cos 2\tau,$$

получим:

$$N\sin 2x=\cos\tau, \qquad N\cos 2x=-\operatorname{sh}\vartheta,$$
$$N\operatorname{sh} 2y=\sin\tau, \qquad N\operatorname{ch} 2y=\operatorname{ch}\vartheta.$$

Для $t=1$ и $-90°<\tau<90°$ получим:

$$x=45°, \qquad \operatorname{th} y=\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}.$$

Для $\tau=90°$ имеем соответственно:

$t<1$,	$t=1$,	$t>1$
$x=0$,	x произвольно,	$x=\pm 90°$,
$y=\operatorname{Arth} t$,	$y=\infty$,	$y=\operatorname{Arcth} t$.

Если $t\ll 1$, то

$$x=t\cos\tau-\frac{t^3}{3}\cos 3\tau+\frac{t^5}{5}\cos 5\tau-\ldots, \qquad y=t\sin\tau-\frac{t^3}{3}\sin 3\tau+\frac{t^5}{5}\sin 5\tau-\ldots,$$

а при $t\gg 1$

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{\cos\tau}{t}+\frac{\cos 3\tau}{3t^3}-\frac{\cos 5\tau}{5t^5}+\ldots, \qquad y=\frac{\sin\tau}{t}-\frac{\sin 3\tau}{3t^3}+\frac{\sin 5\tau}{5t^5}-\ldots$$

Пусть t стремится к 1 и τ стремится к прямому углу; положим:

$$-\operatorname{sh}\vartheta=T=\frac{1-t^2}{2t}=\frac{1-\frac{1-t}{2}}{\frac{1}{1-t}-1}, \qquad T^2+\cos^2\tau=N^2.$$

Тогда имеем:

$$\operatorname{tg} 2x=\frac{\cos\tau}{T}=\frac{\cos\tau}{1-t}-\frac{\cos\tau}{2}-\frac{1-t}{4}\frac{\cos\tau}{1-\frac{1-t}{2}}, \qquad \operatorname{sh} 2y=\frac{\sin\tau}{N},$$

$$\operatorname{ch} 4y=\frac{2+T^2-\cos^2\tau}{N^2}, \qquad y\approx\frac{1}{4}\ln\frac{4}{N^2}+\frac{T^2-\cos^2\tau}{8}-\frac{3T^4+3\cos^4\tau-2T^2\cos^2\tau}{64}.$$

5. Переход от одной функции к другой

	$\sin z =$	$\cos z =$	$i \operatorname{sh} z =$	$\operatorname{ch} z =$
$=\sin$	$\pi - z$	$\frac{\pi}{2} \pm z$	iz $\pi - iz$	$\frac{\pi}{2} \pm iz$
$=\cos$	$\pm\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$	$-z$	$\pm\left(iz - \frac{\pi}{2}\right)$	$\pm iz$
$=i \operatorname{sh}$	$-iz$ $i(z \pm \pi)$	$i\left(\pm z - \frac{\pi}{2}\right)$	$i\pi - z$	$\pm z - i\frac{\pi}{2}$
$=\operatorname{ch}$	$\pm i\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$	$\pm iz$	$\pm\left(z + i\frac{\pi}{2}\right)$	$-z$

	$\operatorname{tg} z =$	$\operatorname{ctg} z =$	$i \operatorname{th} z =$	$i \operatorname{cth} z =$
$=\operatorname{tg}$	z	$-z \pm \frac{\pi}{2}$	iz	$iz \pm \frac{\pi}{2}$
$=\operatorname{ctg}$	$-z \pm \frac{\pi}{2}$	z	$-iz \pm \frac{\pi}{2}$	$-iz$
$=i \operatorname{th}$	$-iz$	$i\left(z \pm \frac{\pi}{2}\right)$	z	$z \pm i\frac{\pi}{2}$
$=i \operatorname{cth}$	$i\left(-z \pm \frac{\pi}{2}\right)$	iz	$z \pm i\frac{\pi}{2}$	z

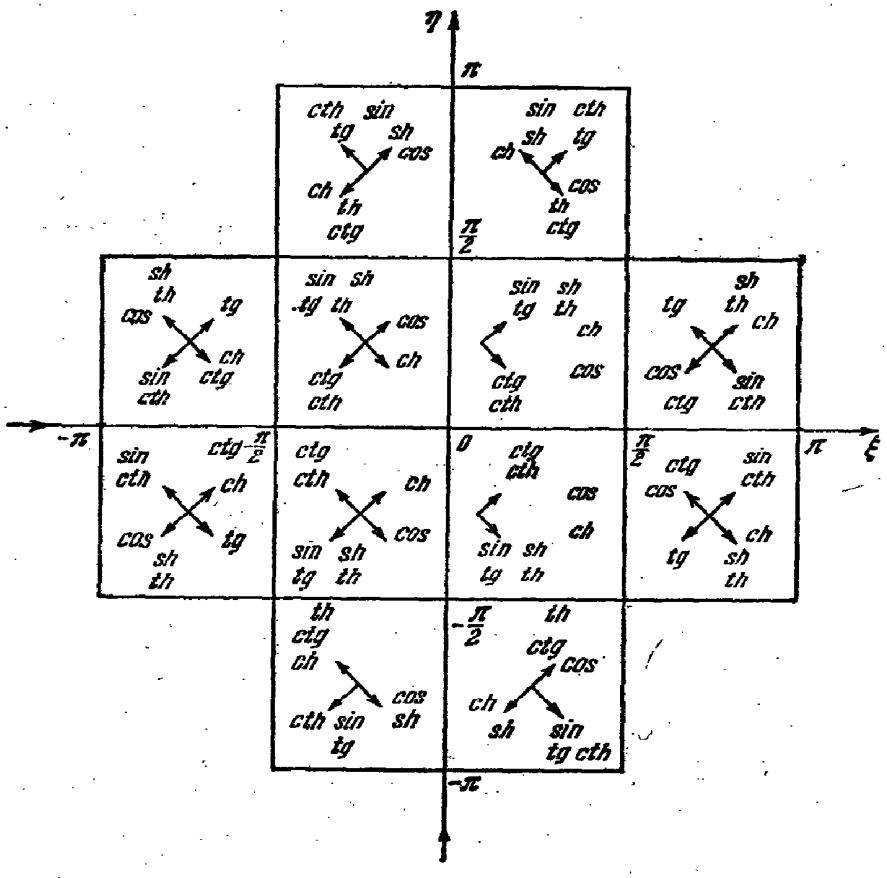
	$\arcsin z =$	$\arccos z =$ $i \operatorname{Arch} z =$	$i \operatorname{Arsh} z =$
$=\arcsin$	z	$\sqrt{1 - z^2}$	iz
$=\arccos$ $=\imath \operatorname{Arch}$	$\sqrt{1 - z^2}$	z	$\sqrt{1 + z^2}$
$=i \operatorname{Arsh}$	$-iz$	$-\sqrt{z^2 - 1}$	z

	$\operatorname{arctg} z =$	$i \operatorname{arcctg} z =$	$i \operatorname{Arth} z =$	$i \operatorname{Arcth} z =$
$=\operatorname{arctg}$	z	$\frac{1}{z}$	iz	$\frac{i}{z}$
$=\operatorname{arcctg}$	$\frac{1}{z}$	z	$\frac{1}{iz}$	$-iz$
$=i \operatorname{Arth}$	$-iz$	$\frac{1}{iz}$	z	$\frac{1}{z}$
$=i \operatorname{Arcth}$	$\frac{i}{z}$	iz	$\frac{1}{z}$	z

6. Знак действительной и мнимой части функции

Аргумент	sin	th	cth	ctg	tg	sh	ch	cos	Объяснение
⌜	⌜	⌜	⌜	⌜	⌜	⌜	⌜	⌜	Изменение знака у мнимой части
⌟	⌟	⌟	⌟	⌟	⌟	⌟	⌜	⌜	Изменение знака у действительной части
$90°-x$		P	P	P	P				Переход к углу, дополнительному до прямого
$180°-x$	⌜	⌜	⌜	⌟	⌟	⌟	⌟	⌟	Переход к углу, дополнительному до двух прямых

Символ P означает, что модуль функции переходит в обратную величину. Поворот горизонтальной стороны прямого угла ⌞ означает перемену знака



Гис. 15. Знаки действительной и мнимой частей тригонометрических и гиперболических функций от $\xi+i\eta$.

у действительной части; поворот вертикальной стороны означает перемену знака мнимой части.

В схеме, изображенной на рис. 15, символ ↗ обозначает первую четверть, ↖ — вторую, ↙ — третью и ↘ — четвертую. [Эта схема позволяет сразу определять, в каком квадранте комплексной плоскости значений лежат точки, соответствующие $\sin\zeta$, $\cos\zeta$ и т. д., $\zeta=\xi+i\eta$, т. е. находить знаки действительной и мнимой частей этих функций.]

Пример. Для аргумента $\zeta=\xi+i\eta$, где ξ заключено между 0 и $\frac{\pi}{2}$, а η — между $\frac{\pi}{2}$ и π, имеем схему в правом верхнем квадрате на рис. 15, из которой следует: значения $\sin\zeta$, $\operatorname{tg}\zeta$ и $\operatorname{cth}\zeta$ лежат в первой четверти (т. е. их действительные и мнимые части положительны), $\operatorname{sh}\zeta$ и $\operatorname{ch}\zeta$ — во второй (действительные части отрицательны, а мнимые положительны), $\cos\zeta$, $\operatorname{ctg}\zeta$ и $\operatorname{th}\zeta$ — в четвертой (действительные части положительны, а мнимые отрицательны).

7. Приведение к положительным острым углам

(Прежде всего надо найти приближенные значения по рис. 10 или 13.)

[Помещенные ниже схемы позволяют решать для функций синус и тангенс следующие основные задачи:

a) Дан комплексный аргумент; определяется функция.

b) Дана функция; определяется комплексный аргумент.]

a)

$se^{i\varphi}=\sin$ $x'+iy$		sh $y+ix'$	sh $-y+ix'$
x'	φ	φ	φ
$-(180°-x)$	$-(180°-\sigma)$	$-(90°+\sigma)$	$-(90°-\sigma)$
$-x$	$180°-\sigma$	$-(90°-\sigma)$	$-(90°+\sigma)$
x	σ	$90°-\sigma$	$90°+\sigma$
$180°-x$	$-\sigma$	$90°+\sigma$	$90°-\sigma$
$se^{i\varphi}=\sin$ $x'-iy$		sh $y-ix'$	sh $-y-ix'$

$\sin(x+iy)=se^{\sigma}$,

$0<\frac{x}{\sigma}<90°$,

$0<\frac{y}{s}<\infty$.

(См. таблицу 10)

a)

$se^{i\varphi}=\cos(x'+iy)$ $=\operatorname{ch}(-y+ix)$	
x'	φ
$-(90°+x)$	$180°-\sigma$
$-(90°-x)$	σ
$90°-x$	$-\sigma$
$90°+x$	$-(180°-\sigma)$
$se^{i\varphi}=\cos(x'-iy)$ $=\operatorname{ch}(y+ix')$	

b)

	sh
$se^{i\left(\frac{\pi}{2}-\sigma\right)}$	$y+ix$ $-y+i(\pi-x)$
$se^{i\left(\frac{\pi}{2}+\sigma\right)}$	$-y+ix$ $y+i(\pi-x)$

b)

	sin	cos	ch
$se^{i\sigma}$	$x+iy$ $(\pi-x)-iy$	$\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-iy$ $-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+iy$	$y+i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ $-y-i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
$se^{i(\pi-\sigma)}$	$-x+iy$ $-(\pi-x)-iy$	$\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-iy$ $-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+iy$	$y+i\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ $-y-i\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

a)

$t^{-n}e^{i\varphi}=\operatorname{ctg}\ x'-iy$			$\operatorname{cth}\ y-ix'$	$\operatorname{cth}\ -y-ix'$
$t^{n}e^{i\varphi}=\operatorname{tg}\ x'+iy$			$\operatorname{th}\ y+ix'$	$\operatorname{th}\ -y+ix'$
x'	n	φ	φ	φ
$90°+x$ $-(90°-x)$	-1	$180°-\tau$	$-(90°-\tau)$	$-(90°+\tau)$
$180°-x$ $-x$	$+1$			
x $-(180°-x)$	$+1$	τ	$90°-\tau$	$90°+\tau$
$90°-x$ $-(90°+x)$	-1			
$t^{-n}e^{-i\varphi}=\operatorname{ctg}\ x'+iy$			$\operatorname{cth}\ y+ix'$	$\operatorname{cth}\ -y+ix'$
$t^{n}e^{-i\varphi}=\operatorname{tg}\ x'-iy$			$\operatorname{th}\ y-ix'$	$\operatorname{th}\ -y-ix'$

$\operatorname{tg}(x+iy)=te^{i\tau}$,
$0<x<45°$,
$0<y<\infty$,
$0<t<1$,
$0<\tau<90°$

(См. таблицу 11)

b)

	tg	ctg		th	cth
$te^{i\tau}$	$x+iy$	$\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-iy$	$te^{i\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)}$	$y+ix$	$y-i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
$te^{i(\pi-\tau)}$	$-x+iy$	$-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-iy$	$te^{i\left(\frac{\pi}{2}+\tau\right)}$	$-y+ix$	$-y-i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
$\frac{1}{t}e^{i\tau}$	$\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+iy$	$x-iy$	$\frac{1}{t}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)}$	$y+i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$	$y-ix$
$\frac{1}{t}e^{i(\pi-\tau)}$	$-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+iy$	$-x+iy$	$\frac{1}{t}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\tau\right)}$	$-y+i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$	$-y-ix$

8. Поведение функций в комплексной плоскости

[Схемы, приведенные на рис. 16 и 17, описывают поведение тригонометрических функций комплексного аргумента при его постоянной мнимой части и гиперболических функций—при постоянной действительной части аргумента.]

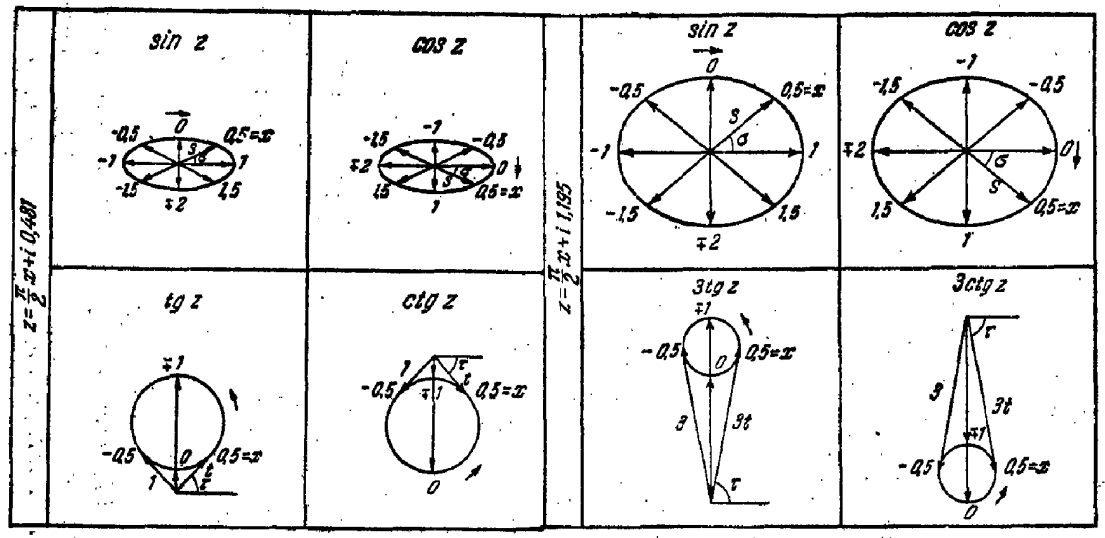


Рис. 16. Поведение тригонометрических функций от $x\frac{\pi}{2}+iy$ в четырех квадрантах или октантах при постоянном y.

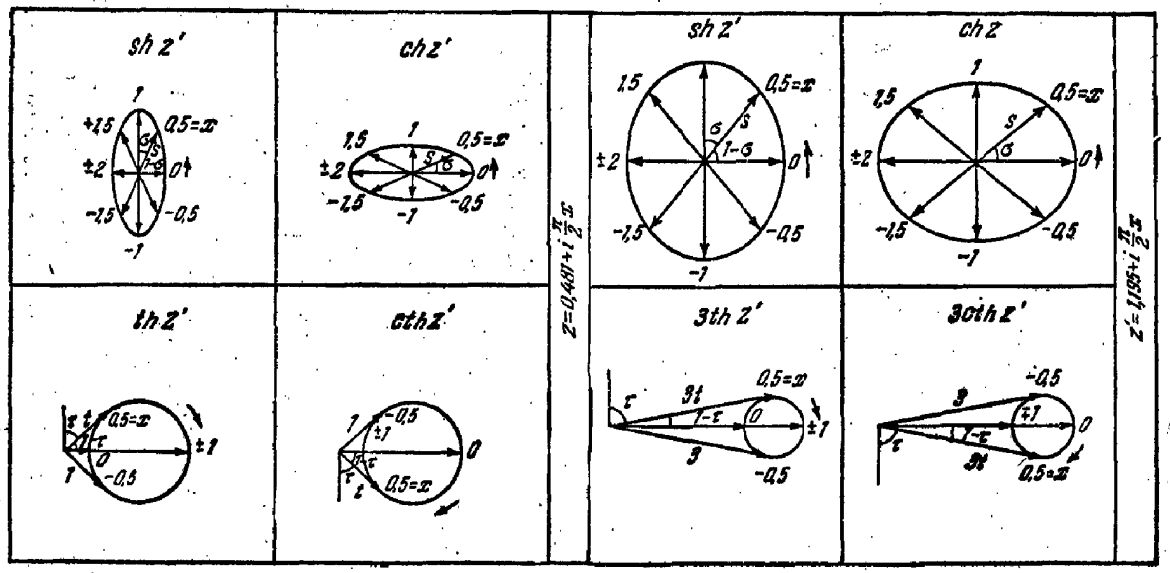


Рис. 17. Поведение гиперболических функций от $y+ix\frac{\pi}{2}$ в четырех квадрантах или октантах при постоянном y.

V. ГАММА-ФУНКЦИИ

Определения и обозначения

Гамма-функция $\Gamma(z)$ определяется как решение функционального уравнения

$$\Gamma(z+1)=z\,\Gamma(z), \quad \text{где} \quad \Gamma(1)=1.$$

Она является *мероморфной* функцией от $z=x+iy$ с простыми полюсами в точках $z=-n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Из всех аналитических решений этого уравнения она выделяется тем, что для действительных положительных значений

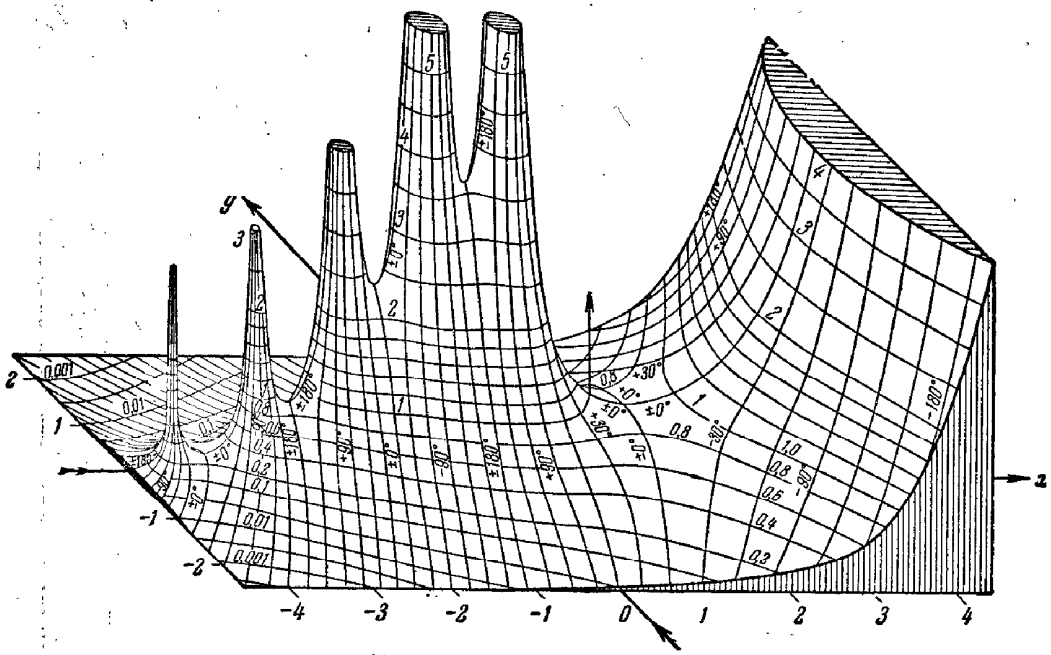


Рис. 18. Рельеф гамма-функции $\Gamma(z)$.

аргумента $z=x$ она положительна, действительна и удовлетворяет неравенству

$$(\Gamma'(x))^2<\Gamma(x)\,\Gamma''(x),$$

которое выражает ее *логарифмическую выпуклость* (рис. 18—22, таблицы 12, 14). *Логарифмическая производная* от $\Gamma(z)$ обозначается через

$$\psi(z)=\frac{d\ln\Gamma(z)}{dz}=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Для этих функций употребляют также другие обозначения:

$$\Gamma(z+1)=\Pi(z)=z!, \qquad \psi(z+1)=\Psi(z)=\frac{d\ln\Pi(z)}{dz}=\frac{d\ln z!}{dz}.$$

Определение *неполных гамма-функций* $\Gamma(\alpha,\ z)$, $\gamma(\alpha,\ z)$ дано в C.

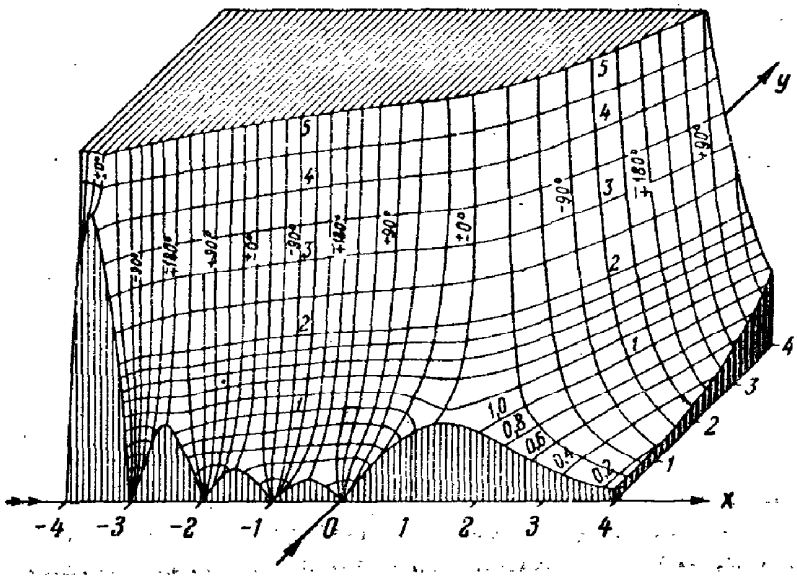


Рис. 19. Рельеф обратных значений гамма-функции $\frac{1}{\Gamma(z)}$.

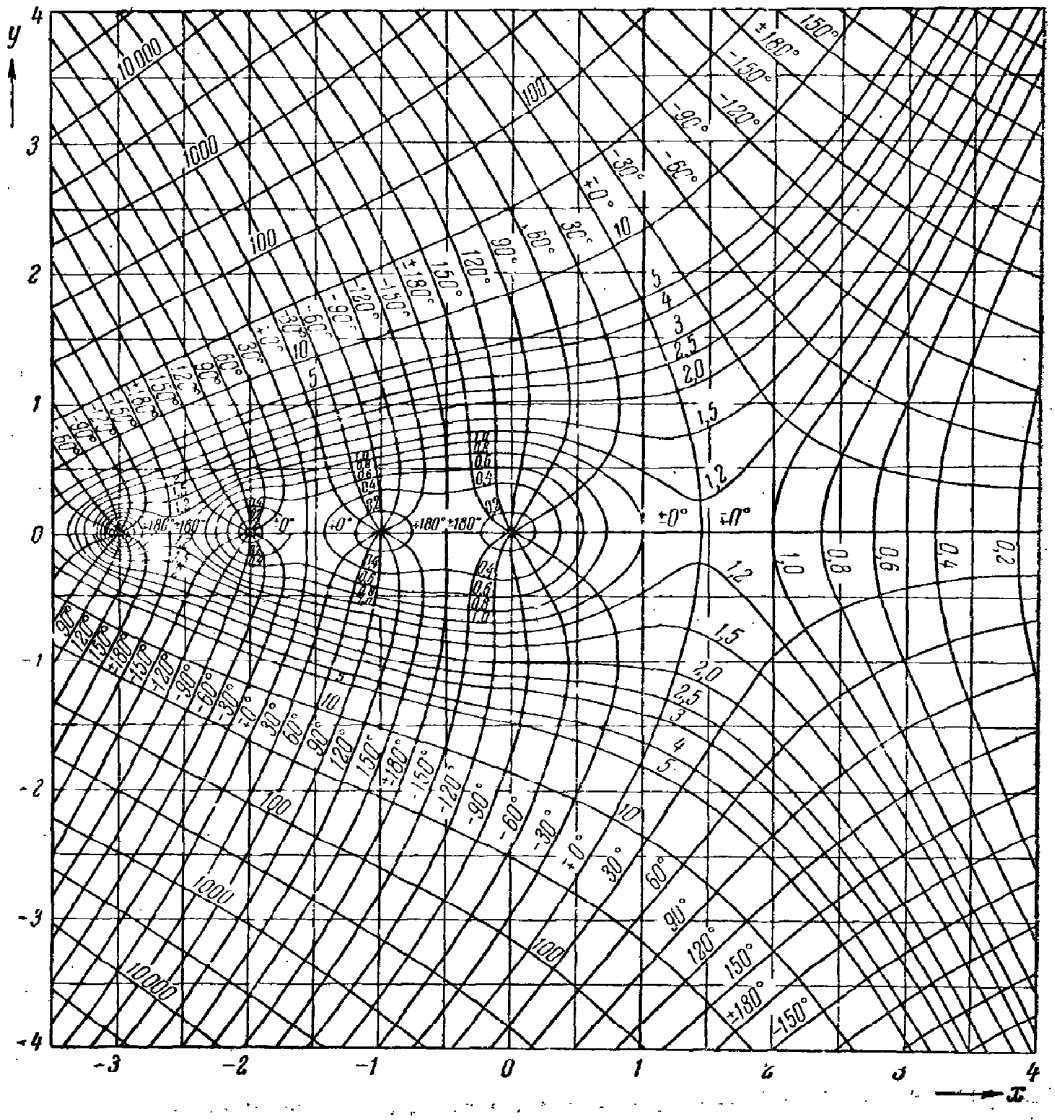


Рис. 20. Карта горизонталей рельефа обратных значений гамма-функции $\frac{1}{\Gamma(z)}$.

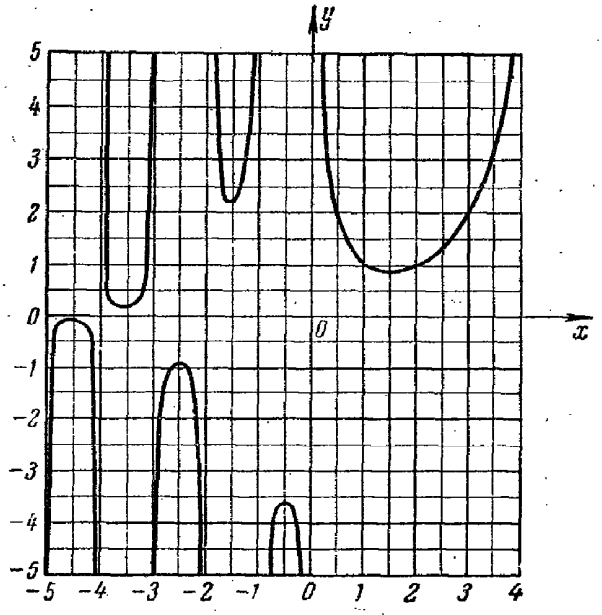


Рис. 21. Гамма-функция $\Gamma(x)$.

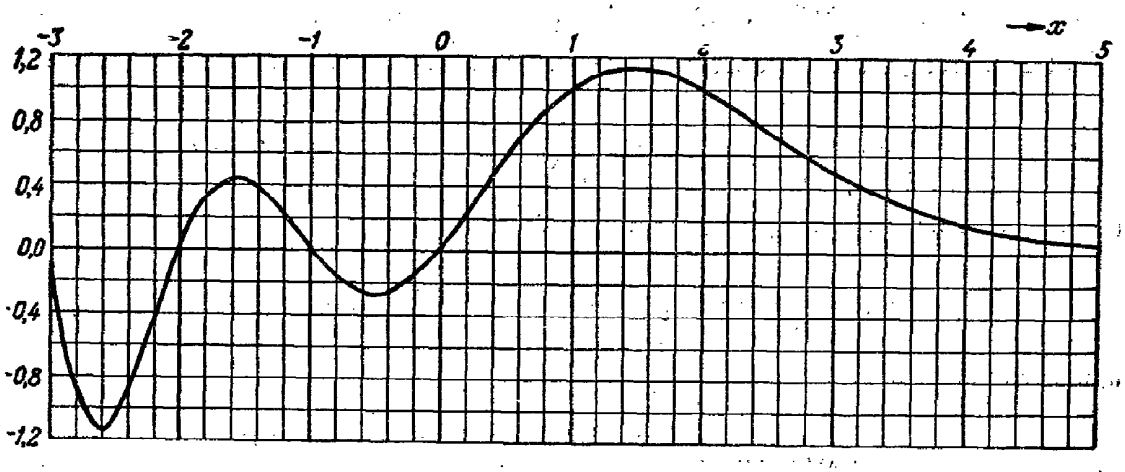


Рис. 22. Обратные значения гамма-функции $\frac{1}{\Gamma(x)}$.

А. ГАММА-ФУНКЦИЯ $\Gamma(z)$

1. Представления

1.1. Произведения и ряды. Для $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ имеем:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)},$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{z}e^{-Cx}\prod_{n=1}^{\infty}e^{\frac{z}{n}}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}$$

(C—постоянная Эйлера). Пусть $z = x+iy$ и

$$1+\frac{iy}{x+n} = r_n e^{i\varphi_n} \qquad (r_n>0;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

тогда $\Gamma(z) = he^{i\omega}$, где

$$h = \Gamma(x)\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r_n}, \qquad \omega = y\psi(x) + \sum_{n=0}^{\infty}(\operatorname{tg}\varphi_n - \varphi_n).$$

При $|z| \ll 1$ имеем:

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{\frac{\pi z}{\sin \pi z}\frac{1-z}{1+z}}\, e^{\Lambda}, \quad \text{где} \quad \Lambda = C_1 z - C_3 z^3 - C_5 z^5 - \ldots;$$

$C_1 = 0{,}422\,784\,335, \quad C_5 = 0{,}007\,385\,551, \quad C_9 = 0{,}000\,223\,155,$
$C_3 = 0{,}067\,352\,301, \quad C_7 = 0{,}001\,192\,754, \quad C_{11} = 0{,}000\,044\,926.$

Если в этом случае положить $z = x+iy = re^{i\varphi}$ $(r \ll 1)$, то получим:

$$\Gamma(z+1) = he^{i\omega},$$

где

$$h^4 = \frac{\pi^2(x^2+y^2)}{\sin^2\pi x + \sin^2 \pi y}\,\frac{(1-x)^2+y^2}{(1+x)^2+y^2}\, e^{4\Lambda_1},$$

$$2\omega = \varphi - \sigma - \tau - \chi + 2\Lambda_2, \qquad \Lambda_1 + i\Lambda_2 = C_1 z - C_3 z^3 - C_5 z^5 - \ldots,$$

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\operatorname{th}\frac{y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}, \qquad \operatorname{tg}\tau = \frac{y}{1-x}, \qquad \operatorname{tg}\chi = \frac{y}{1+x}.$$

1.2. Интегралы. При $\operatorname{Re} z > 0$ имеет место представление

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{z-1} dt \qquad (\arg t = 0)$$

(*интеграл Эйлера 2-го рода*); при $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z}-1}\int_{+\infty}^{+0} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt \qquad (0 < \arg t \leqslant 2\pi),$$

при всех значениях z

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+0} e^{t}\, t^{-z}\, dt \qquad (-\pi \leqslant \arg t \leqslant \pi)$$

(*контурный интеграл Ганкеля*).

1.3. Асимптотика. Если $|z| \gg 1$ при условии, что $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, то

$$\ln\Gamma(z) \approx \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{2n(2n-1)}\frac{1}{z^{2n-1}}$$

(B_{2n} — числа Бернулли). Для действительного $z=x>0$ ошибка, получающаяся при обрывании ряда, меньше первого отброшенного члена и имеет знак этого

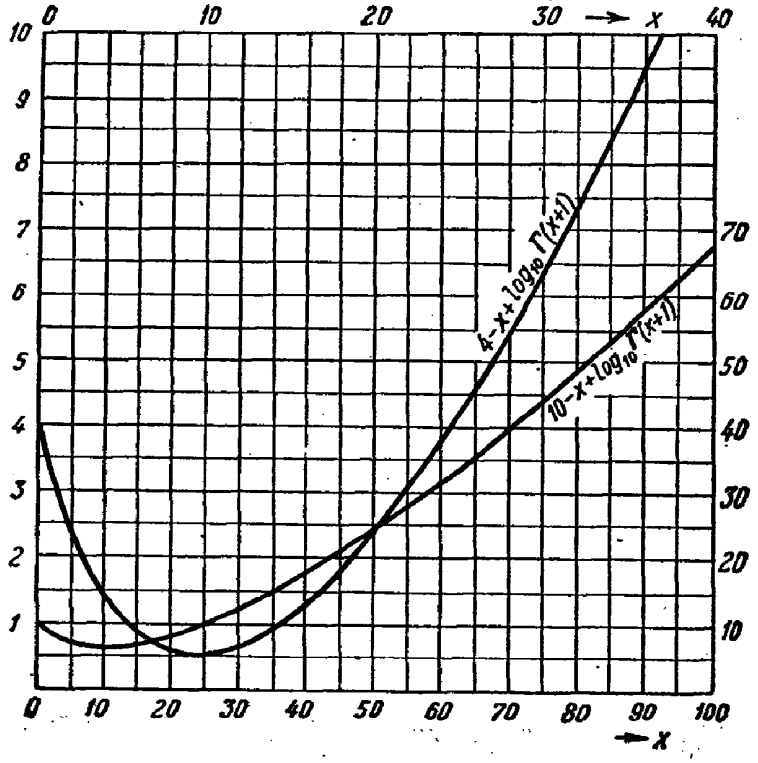


Рис. 23. Функция $\Gamma(x)$ для больших x.

члена (рис. 23). Отсюда следует *формула Стирлинга*:

$$\Gamma(z)=\sqrt{\frac{2\pi}{z}}e^{-z}z^z H(z),$$

$$H(z)\approx 1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51\,840\,z^3}-\frac{571}{2\,488\,320z^4}-\dots$$

Имеет место представление

$$\Gamma(z)=\sqrt{\frac{2\pi}{e}}\frac{e^{-z}}{z}[z(z+1)]^{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{12}}e^{\lambda},$$

$$\lambda\approx\frac{1}{180}\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{(z+1)^2}\right)-\frac{1}{840}\left(\frac{1}{z^4}-\frac{1}{(z+1)^4}\right)+\dots$$

Для чисто мнимого $z=iy$, $y\gg 1$ имеем $\Gamma(iy)=he^{i\omega}$, где

$$h\approx\sqrt{\frac{2\pi}{y}}e^{-\frac{\pi}{2}y},$$

$$\omega\approx-\frac{\pi}{4}+y(\ln y-1)-\frac{1}{12y}-\frac{1}{360y^3}-\frac{1}{1260y^5}-\frac{1}{1680y^7}-\frac{1}{1188y^9}-\dots$$

2. Частные значения

$$\Gamma(1)=1, \quad \Gamma(2)=1, \quad \Gamma(n)=(n-1)!=1\cdot 2\ldots(n-1) \qquad (n=3,\ 4,\ \ldots).$$

Точка $-n$ — простой полюс, вычет в этом полюсе равен $\frac{(-1)^n}{n!}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}=1{,}772\,453\,850\ldots, \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(1/3)=2{,}678\,938\,535=1:0{,}373\,282\,174,$$

$$\Gamma(2/3)=1{,}354\,117\,939=1:0{,}738\,488\,112,$$

$$\Gamma(4/3)=0{,}892\,979\,512=1:1{,}119\,846\,522,$$

$$\Gamma(5/3)=0{,}902\,745\,293=1:1{,}107\,732\,167,$$

$$\Gamma(1/4)=3{,}625\,609\,908=1:0{,}275\,815\,663,$$

$$\Gamma(3/4)=1{,}225\,416\,702=1:0{,}816\,048\,939,$$

$$\Gamma(5/4)=0{,}906\,402\,477=1:1{,}103\,262\,651,$$

$$\Gamma(7/4)=0{,}919\,062\,527=1:1{,}088\,065\,252.$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n},$$

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\frac{(-2)^n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\min_{x>0}\Gamma(x)=\Gamma(1{,}46163\ldots)=0{,}88\,560\ldots$$

3. Функциональные уравнения

3.1. Рекуррентные формулы:

$$\Gamma(z+1)=z\,\Gamma(z),$$

$$\Gamma(z+n)=z(z+1)\ldots(z+n-1)\,\Gamma(z)$$

$$\Gamma(z-1)=\frac{1}{z-1}\,\Gamma(z), \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\Gamma(z-n)=\frac{\Gamma(z)}{(z-1)(z-2)\ldots(z-n)}.$$

3.2. Формулы дополнения:

$$\Gamma(z)\,\Gamma(-z)=\frac{-\pi}{z\sin\pi z},$$

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos\pi z},$$

$$\Gamma(1+z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi z}{\sin\pi z}.$$

Если положить $(n=1,\ 2,\ \ldots,)$

$$P_0(z)=1,$$

$$P_n(z)=-z^2(1-z^2)(4-z^2)\ldots[(n-1)^2-z^2],$$

$$Q_0(z)=1,$$

$$Q_n(z)=\left(\frac{1}{4}-z^2\right)\left(1\cdot 2+\frac{1}{4}-z^2\right)\ldots\left[(n-1)\,n+\frac{1}{4}-z^2\right],$$

то справедливы равенства $(n=0, 1, 2, \ldots)$

$$\Gamma(n+z)\,\Gamma(n-z)=\frac{-\pi P_n(z)}{z\sin\pi z},$$

$$\Gamma(-n+z)\,\Gamma(-n-z)=\frac{\pi z}{P_{n+1}(z)\sin\pi z},$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi Q_n(z)}{\cos\pi z},$$

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{Q_n(z)\cos\pi z}.$$

Для чисто мнимого $z=iy$ выражения в правых частях этих равенств будут действительными и означают квадрат модуля каждого из двух комплексно-сопряженных множителей, стоящих в левых частях.

3.3. Формула умножения:

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)=\sqrt{(2\pi)^{n-1}n}\,\frac{\Gamma(nz)}{n^{nz}}.$$

В частности, при $n=2$ получаем *формулу удвоения*:

$$\Gamma(2z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,2^{2z-1}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

4. Некоторые интегральные формулы

При условии $\operatorname{Re} z>0$, $\operatorname{Re} w>0$ имеет место равенство

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt=\frac{\Gamma(z)\,\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}\qquad(\arg t=0).$$

Интеграл, стоящий слева (*интеграл Эйлера 1-го рода*) называется *бэта-функцией* $B(z, w)$; приведенная формула позволяет находить значения бэта-функции через значения гамма-функции.

Далее, справедливы следующие формулы:

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{z-1}}{(1+t)^w}\,dt=\frac{\Gamma(z)\,\Gamma(w-z)}{\Gamma(w)}\qquad\left(\begin{matrix}\operatorname{Re} w>\operatorname{Re} z>0,\\ \arg t=0\end{matrix}\right),$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-wt^n}t^{z-1}\,dt=\frac{\Gamma\left(\frac{z}{n}\right)}{nw^{z/n}}\qquad\left(\begin{matrix}\operatorname{Re} w>0,\quad \operatorname{Re} z>0;\\ \arg t=0,\quad n=1, 2, \ldots\end{matrix}\right),$$

$$\int_0^1\frac{dt}{\sqrt[n]{1-t^m}}=\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)}\qquad(m=1, 2, \ldots,\ n=2, 3, \ldots),$$

$$\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^m}}=\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\right)}=\sqrt[m]{4}\,\frac{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right)}\qquad(m=1, 2, \ldots),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{2^{\alpha+\beta+1}}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}$$

$$(\operatorname{Re}\alpha>-1,\quad \operatorname{Re}\beta>-1).$$

B. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ $\psi(z)$ ГАММА-ФУНКЦИИ

[Логарифмическая производная от $\Gamma(z)$ обозначается через $\psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ (рис. 24, таблица 13).]

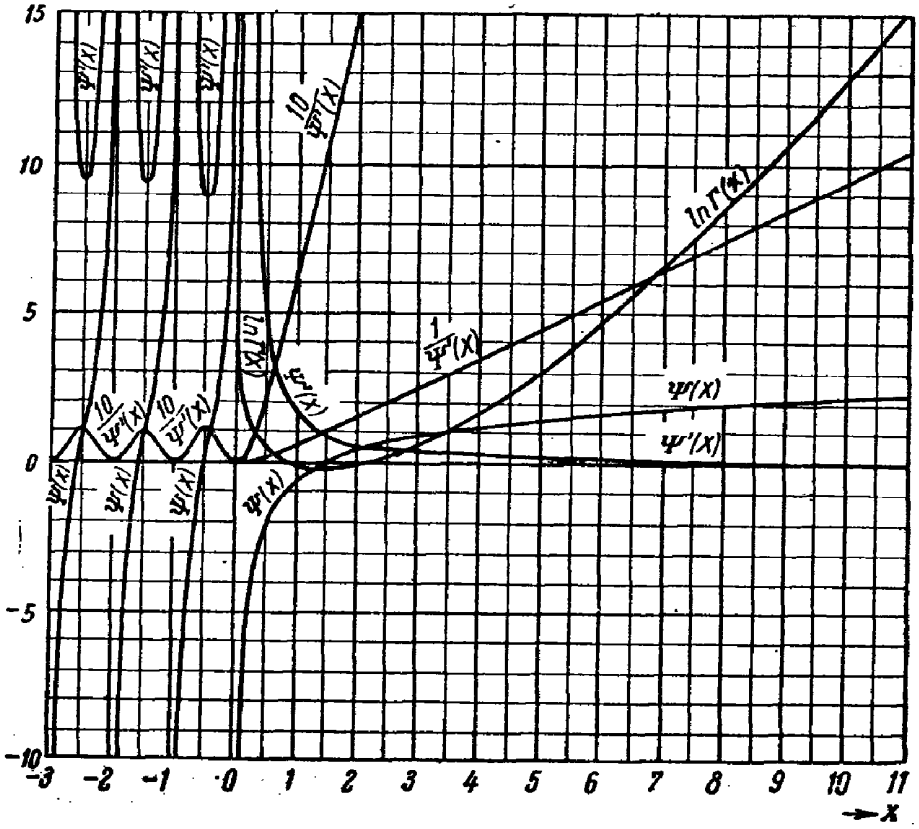


Рис. 24. Логарифм гамма-функции и его производные.

1. Представления

1.1. Ряды. Для $z\neq 0, -1, -2, \ldots$ имеем:

$$\psi(z)=-C+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{z+k}\right) \qquad (C\text{—постоянная Эйлера})$$

и

$$\psi(z)=\ln z-\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{z+k}-\ln\left(1+\frac{1}{z+k}\right)\right].$$

1.2. Интегралы. При $\operatorname{Re} z>0$

$$\psi(z)=\int_0^{+\infty}\left[\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right]dt=\int_0^1\left[\frac{-1}{\ln t}-\frac{t^{z-1}}{1-t}\right]dt \qquad (\arg t=0),$$

$$\psi(z)=-C+\int_0^1\frac{1-t^{z-1}}{1-t}\,dt \qquad (\arg t=0).$$

1.3. Асимптотика. Если $|z|\gg 1$ при условии, что $|\arg z|\leqslant \pi-\varepsilon\ (\varepsilon>0)$, то

$$\psi(z)\approx \ln z-\frac{1}{2z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{2n\cdot z^{2n}}=\ln z-\frac{1}{2z}-\frac{1}{12z^2}+\frac{1}{120z^4}-\ldots,$$

$$\psi(z)\approx \frac{1}{2}\ln z(z+1)-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{2n-1}\left\{\frac{1}{z^{2n-1}}-\frac{1}{(z+1)^{2n-1}}\right\}.$$

2. Частные значения

$$\psi(1)=-C,\qquad \psi(n)=-C+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\qquad (n=2,3,\ldots).$$

Точка $-n$ — простой полюс, вычет в этом полюсе равен -1;

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-C-2\ln 2=-\ln 4\gamma=-1{,}9635100260\ldots,$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\pm n\right)=-\ln 4\gamma+2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)\quad (n=1,2,\ldots)$$

(C — постоянная Эйлера, $\gamma=e^C$).

3. Функциональные уравнения

3.1. Рекуррентные формулы:

$$\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z},\qquad \psi(z+n)=\psi(z)+\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\ldots+\frac{1}{z+n-1},$$

$$\psi(z-1)=\psi(z)-\frac{1}{z-1},\qquad \psi(z-n)=\psi(z)-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-2}-\ldots-\frac{1}{z-n}.$$

3.2. Формулы дополнения:

$$\psi(z)-\psi(-z)=-\pi\operatorname{ctg}\pi z-\frac{1}{z},\qquad \psi(z)-\psi(1-z)=-\pi\operatorname{ctg}\pi z,$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}+z\right)-\psi\left(\frac{1}{2}-z\right)=\pi\operatorname{tg}\pi z,\qquad \psi(1+z)-\psi(1-z)=\frac{1}{z}-\pi\operatorname{ctg}\pi z,$$

$$\psi\left(-n+\frac{3}{4}\right)=\psi\left(n+\frac{1}{4}\right)+\pi,\qquad \psi\left(-n+\frac{1}{4}\right)=\psi\left(n+\frac{3}{4}\right)-\pi\ (n=1,2,\ldots).$$

3.3. Формула умножения:

$$\psi(nz)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\psi\left(z+\frac{k}{n}\right)+\ln n\qquad (n=2,3,\ldots).$$

4. Производная $\psi'(z)$

[В силу отмеченной выше логарифмической выпуклости гамма функции, производная $\psi'(z)$ всюду неотрицательна (рис. 24, таблица 13).]

4.1. Представление. Для $z\neq 0,-1,-2,\ldots$ имеем:

$$\psi'(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z+k)^2}.$$

Таблица 12.

Гамма-функция $\Gamma(x) = (x-1)!$

x	$\Gamma(x)$		x	$\Gamma(x)$		x	$\Gamma(x)$		x	$\Gamma(x)$	
				+ 1,							
1,00	1,0000	−56	2,00	0000	+ 43	3,00	2,000	+ 18,5	4,00	6,000	+ 76,5
02	0,9888	52	02	0086	45	02	2,037	19,5	02	6,153	79
04	0,9784	48,5	04	0176	46,5	04	2,076	19,5	04	6,311	81
06	0,9687	45	06	0269	48	06	2,115	20,5	06	6,473	83,5
08	0,9597	41,5	08	0365	50	08	2,156	21	08	6,640	86,5
1,10	0,9514	−39	2,10	0465	+ 51,5	3,10	2,198	+ 21	4,10	6,813	+ 88,5
12	0,9436	36	12	0568	53,5	12	2,240	22	12	6,990	91,5
14	0,9364	33	14	0675	55,5	14	2,284	23	14	7,173	94,5
16	0,9298	30,5	16	0786	57	16	2,330	23	16	7,362	97
18	0,9237	27,5	18	0900	59	18	2,376	24	18	7,556	100,5
1,20	0,9182	−25,5	2,20	1018	+ 61	3,20	2,424	+ 24,5	4,20	7,757	+ 103
22	0,9131	23	22	1140	63	22	2,473	25,5	22	7,963	106,5
24	0,9085	20,5	24	1266	64,5	24	2,524	25,5	24	8,176	110
26	0,9044	18,5	26	1395	67	26	2,575	27	26	8,396	113
28	0,9007	16	28	1529	69	28	2,629	27	28	8,622	116,5
1,30	0,8975	−14,5	2,30	1667	+ 71	3,30	2,683	+ 28,5	4,30	8,855	+ 120,5
32	0,8946	12	32	1809	73,5	32	2,740	29	32	9,096	124
34	0,8922	10	34	1956	75,5	34	2,798	29,5	34	9,344	128
36	0,8902	8,5	36	2107	77,5	36	2,857	30,5	36	9,600	132
38	0,8885	6	38	2262	80	38	2,918	31,5	38	9,864	136
1,40	0,8873	− 4,5	2,40	2422	+ 82	3,40	2,981	+ 32,5	4,40	10,136	+ 140,5
42	0,8864	3	42	2586	85	42	3,046	33	42	10,417	145
44	0,8858	− 1	44	2756	87	44	3,112	34,5	44	10,707	149
46	0,8856	+ 0,5	46	2930	89,5	46	3,181	35	46	11,005	154,5
48	0,8857	2,5	48	3109	92	48	3,251	36	48	11,314	159
1,50	0,8862	+ 4	2,50	3293	+ 95	3,50	3,323	+ 37,5	4,50	11,632	+ 164
52	0,8870	6	52	3483	97,5	52	3,398	38	52	11,960	169,5
54	0,8882	7	54	3678	100	54	3,474	39,5	54	12,299	174,5
56	0,8896	9	56	3878	103	56	3,553	40,5	56	12,648	180,5
58	0,8914	10,5	58	4084	106	58	3,634	41,5	58	13,009	186
1,60	0,8935	+ 12	2,60	4296	+ 109	3,60	3,717	+ 43	4,60	13,381	+ 192,5
62	0,8959	13,5	62	4514	112	62	3,803	44	62	13,766	198
64	0,8986	15,5	64	4738	115	64	3,891	45	64	14,162	205
66	0,9017	16,5	66	4968	118	66	3,981	47	66	14,572	211,5
68	0,9050	18	68	5204	121,5	68	4,075	48	68	14,995	218
1,70	0,9086	+ 20	2,70	5447	+ 124,5	3,70	4,171	+ 49	4,70	15,431	+ 225,5
72	0,9126	21	72	5696	128,5	72	4,269	51	72	15,882	233
74	0,9168	23	74	5953	131,5	74	4,371	52,5	74	16,348	240,5
76	0,9214	24	76	6216	135,5	76	4,476	53,5	76	16,829	248
78	0,9262	26	78	6487	139	78	4,583	55,5	78	17,325	256,5!
1,80	0,9314	+ 27	2,80	6765	+ 143	3,80	4,694	+ 57	4,80	17,84	+ 26,5
82	0,9368	29	82	7051	146,5	82	4,808	59	82	18,37	27
84	0,9426	30,5	84	7344	151	84	4,926	60,5	84	18,91	28,5
86	0,9487	32	86	7646	154,5	86	5,047	62	86	19,48	29
88	0,9551	33,5	88	7955	159,5	88	5,171	64	88	20,06	30,5
1,90	0,9618	+ 35	2,90	8274	+ 163	3,90	5,299	+ 66	4,90	20,67	+ 31
92	0,9688	36,5	92	8600	168	92	5,431	68	92	21,29	32,5
94	0,9761	38	94	8936	172,5	94	5,567	70	94	21,94	33
96	0,9837	40	96	9281	177,5	96	5,707	72	96	22,60	34,5
98	0,9917	41,5	98	9636	182	98	5,851	74,5	98	23,29	35,5
2,00	1,0000,		3,00	*0000		4,00	6,000		5,00	24,00	
				+ 2,							

Таблица 13.

Функции $\psi(x)$ и $\psi'(x)$

x	$\psi(x)$		$\psi'(x)$	
	− 0,		+ 1,	
1,00	5772	+ 162	6449	−234!
02	5448	157,5	5981	223!
04	5133	153,5	5537	211!
06	4826	149	5115	200!
08	4528	145	4715	191!
1,10	4238	+ 141,5	4333	−181,5
12	3955	138	3970	173,5
14	3679	134,5	3623	165,5
16	3410	131,5	3292	158
18	3147	128,5	2976	151
1,20	2890	+ 125	2674	−144,5
22	2640	122,5	2385	139
24	2395	120	2107	132,5
26	2155	117	1842	127,5
28	1921	114,5	1587	122
1,30	1692	+ 112,5	1343	−117,5
32	1467	109,5	1108	113
34	1248	108	0882	109
36	1032	105,5	0664	104,5
38	0821	103,5	0455	100,5
1,40	0614	+ 101,5	0254	− 97,5
42	0411	100	0059	93,5
44	0211	97,5	*9872	90,5
46	0016	96	9691	87
48	*0176	94,5	9517	84,5
1,50	0365	+ 92,5	9348	− 81,5
52	0550	91	9185	79
54	0732	89,5	9027	76
56	0911	88	8875	74
58	1087	86,5	8727	71,5
1,60	1260	+ 85,5	8584	− 69
62	1431	83,5	8446	67
64	1598	82,5	8312	65,5
66	1763	81,5	8181	63
68	1926	79,5	8055	61,5
1,70	2085	+ 79	7932	− 59,5
72	2243	77,5	7813	57,5
74	2398	76,5	7698	56,5
76	2551	75	7585	54,5
78	2701	74,5	7476	53
1,80	2850	+ 73	7370	− 52
82	2996	72,5	7266	50
84	3141	71	7166	49
86	3283	70	7068	47,5
88	3423	69,5	6973	46,5
1,90	3562	+ 68,5	6880	− 45,5
92	3699	67	6789	44
94	3833	67	6701	43
96	3967	65,5	6615	42
98	4098	65	6531	41
2,00	4228		6449	
	+ 0,		+ 0,	

Таблица 14. **Величины, обратные к гамма-функции:**

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = \frac{1}{x!} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\Gamma(1-x)} = \frac{1}{(-x)!}$$

x	$1/\Gamma(1+x)$		$1/\Gamma(1-x)$		x	$1/\Gamma(1+x)$		$1/\Gamma(1-x)$		x	$1/\Gamma(1+x)$		$1/\Gamma(1-x)$	
	+1,		+1,			+1,		−0,			+0,		+0,	
0,00	0000	+ 56,5	00000	− 52	1,00	00000	− 427,5!	00000	+ 46	2,00	50000	− 459	00000	+ 34
02	0113	53,5	*98819	52	02	*99145	436!	01976	49	02	49082	454,5	02016	28
04	0220	51,5	97587	52	04	98273	445!	03903	52	04	48173	449,5	04060	22
06	0323	48,5	96302	52	06	97383	452,5	05778	56	06	47274	445	06125	15
08	0420	45,5	94965	51	08	96478	460	07597	59	08	46384	440	08205	8
0,10	0511	+ 43,5	93578	− 51	1,10	95558	− 467,5	09358	+ 62	2,10	45504	− 435	10294	+ 1
12	0598	40,5	92140	50	12	94623	473,5	11057	65	12	44634	430	12384	6
14	0679	38	90652	50	14	93676	480,5	12691	67	14	43774	425	14468	13
16	0755	35,5	89114	49	16	92715	486	14258	70	16	42924	420	16540	20
18	0826	32,5	87528	48	18	91743	491,5	15755	73	18	42084	414,5	18591	28
0,20	0891	+ 30,5	85894	− 47	1,20	90760	− 496,5	17179	+ 76	2,20	41255	− 409,5	20614	− 35
22	0952	27,5	84213	46	22	89767	501	18527	78	22	40436	404,5	22603	43
24	1007	25	82485	45	24	88765	505	19797	81	24	39627	398,5	24548	51
26	1057	22,5	80713	44	26	87755	509,5	20985	83	26	38830	394	26442	59
28	1102	20	78897	43	28	86736	512,5	22091	85	28	38042	388	28277	67
0,30	1142	+ 18	77038	− 42	1,30	85711	− 516	23111	+ 88	2,30	37266	− 383	30045	− 75
32	1178	15	75138	40	32	84679	518,5	24044	90	32	36500	377,5	31738	83
34	1208	13	73198	39	34	83642	521	24887	92	34	35745	372,5	33349	91
36	1234	10	71219	37	36	82600	523	25639	93	36	35000	367	34869	99
38	1254	8,5	69202	36	38	81554	525	26297	95	38	34266	361,5	36290	107
0,40	1271	+ 5,5	67150	− 34	1,40	80504	− 526	26860	+ 96	2,40	33543	− 356	37604	− 114
42	1282	3,5	65065	32	42	79452	527,5	27327	98	42	32831	350,5	38805	122
44	1289	+ 1,5	62947	30	44	78397	528	27697	99	44	32130	345,5	39883	129
46	1292	− 1	60799	28	46	77341	529	27967	100	46	31439	340	40832	137
48	1290	3	58622	26	48	76283	529	28139	100	48	30759	334,5	41645	144
0,50	1284	− 5,5	56419	− 24	1,50	75225	− 528,5	28209	+ 101	2,50	30090	− 329	42314	− 150
52	1273	7	54192	22	52	74168	529	28180	101	52	29432	324	42833	157
54	1259	9	51942	20	54	73110	527,5	28049	101	54	28784	319	43195	163
56	1241	11,5	49672	18	56	72055	527,5	27817	101	56	28146	313	43394	169
58	1218	13	47385	15	58	71000	526	27483	101	58	27520	308,5	43424	174
0,60	1192	− 15	45082	− 13	1,60	69948	− 524,5	27049	+ 100	2,60	26903	− 303	43279	− 180
62	1162	17	42767	10	62	68899	523	26515	99	62	26297	297,5	42955	184
64	1128	18,5	40441	8	64	67853	521	25882	98	64	25702	292,5	42447	188
66	1091	20,5	38107	5	66	66811	519,5	25151	97	66	25117	287,5	41750	192
68	1050	22,5	35769	− 2	68	65772	517	24323	95	68	24542	282,5	40862	195
0,70	1005	− 23,5	33427	0	1,70	64738	− 514,5	23399	+ 93	2,70	23977	− 277,5	39778	− 198
72	0958	25,5	31086	+ 3	72	63709	512	22382	91	72	23422	272	38497	200
74	0907	27	28748	6	74	62685	509	21274	89	74	22878	267,5	37016	201
76	0853	28,5	26417	9	76	61667	506,5	20077	86	76	22343	262,5	35335	202
78	0796	29,5	24094	12	78	60654	503	18793	83	78	21818	257,5	33452	202
0,80	0737	− 31,5	21782	+ 15	1,80	59648	− 499,5	17426	+ 80	2,80	21303	− 252,5	31367	− 201
82	0674	32,5	19486	18	82	58649	496	15979	77	82	20798	248	29081	199
84	0609	34	17208	21	84	57657	493	14455	73	84	20302	243,5	26597	197
86	0541	35,5	14951	24	86	56671	488,5	12858	69	86	19815	238,5	23915	194
88	0470	36	12717	27	88	55694	485	11191	65	88	19338	234	21040	190
0,90	0398	− 38	10511	+ 30	1,90	54724	− 481	09460	+ 60	2,90	16870	− 229	17974	− 185
92	0322	38,5	08336	34	92	53762	476,5	07669	56	92	18412	225	14724	180
94	0245	40	06194	37	94	52809	472,5	05822	51	94	17962	220,5	11295	173
96	0165	40,5	04088	40	96	51864	468,5	03925	45	96	17521	215,5	07692	165
98	0084	42	02023	43	98	50927	463,5	01982	40	98	17090	211,5	03925	157
1,00	0000		00000	+ 46	2,00	50000		00000	+ 34	3,00	16667		00000	− 148
	+1,		+0,			+0,		−0,			+0,		+0,	

Если $|z| \gg 1$ при условии, что $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, то

$$\psi'(z) \approx \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{z^{2n+1}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} - \frac{1}{30z^5} + \ldots$$

4.2. Частные значения

$$\psi'(1) = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}6449340668\ldots, \quad \psi'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} = 4{,}9348022005\ldots,$$

Если $n = 1, 2, 3, \ldots$, то

$$\psi'(n) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^2}\right),$$

$$\psi'\left(\frac{1}{2} \pm n\right) = \frac{\pi^2}{2} \mp 4\left(1 + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2}\right),$$

$$\lim_{n \to \infty} \psi'\left(n + \frac{1}{2}\right) = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} \psi'\left(\frac{1}{2} - n\right) = \pi^2.$$

4.3. Функциональные уравнения

$$\psi'(z+1) = \psi'(z) - \frac{1}{z^2},$$

$$\psi'(z) + \psi'(1-z) = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2, \qquad \psi'\left(\frac{1}{2} + z\right) + \psi'\left(\frac{1}{2} - z\right) = \left(\frac{\pi}{\cos \pi z}\right)^2.$$

C. НЕПОЛНЫЕ ГАММА-ФУНКЦИИ $\Gamma(a, z)$, $\gamma(a, z)$

Неполные гамма-функции определяются следующими равенствами:

$$\Gamma(a, z) = \int_z^{\infty} e^{-t} t^{a-1}\, dt, \quad \gamma(a, z) = \Gamma(a) - \Gamma(a, z).$$

Путь интегрирования выбирается так, чтобы он не проходил через начало координат и чтобы вдоль него $\arg t$ изменялся непрерывно от $\arg t = \arg z$ в начале пути до $\lim\limits_{t \to \infty} \arg t = \beta$, где $|\beta| < \frac{\pi}{2}$, в конце. Для $\operatorname{Re} a > 0$ имеем:

$$\gamma(a, z) = \int_0^z e^{-t} t^{a-1}\, dt,$$

где путь интегрирования может быть выбран произвольно (рис. 25).

Эти функции являются функциями двух комплексных переменных a, z. Если рассматривать их как функции z при подходящим образом фиксированных значениях a, то получаются многие специальные функции (интегральная показательная функция, интегральный логарифм, интегральные синус и косинус, интеграл ошибок и интегралы Френеля).

Употребляются и другие обозначения для этих функций. Иногда, например, $\gamma(a, z)$, $\Gamma(a, z)$ обозначаются соответственно через $P(a, z)$, $Q(a, z)$. По аналогии с обозначением $\Gamma(z) = (z-1)!$ часто пишут $\gamma(a, z) = (a-1, z)!$ В астрофизике и ядерной физике употребляют обозначение

$$E_n(z) = z^{n-1}\, \Gamma(1-n, z) = \int_1^{\infty} e^{-zt} t^{-n}\, dt.$$

При фиксированном a функции $\Gamma(a, z)$ и $\gamma(a, z)$ будут аналитическими функциями переменного z, причем для $\gamma(a, z)$ исключаются значения $a=0$, -1, -2, ... Если a не является натуральным числом, то они многозначны с единственной конечной точкой ветвления $z=0$ и не имеют других особенностей в конечных точках.

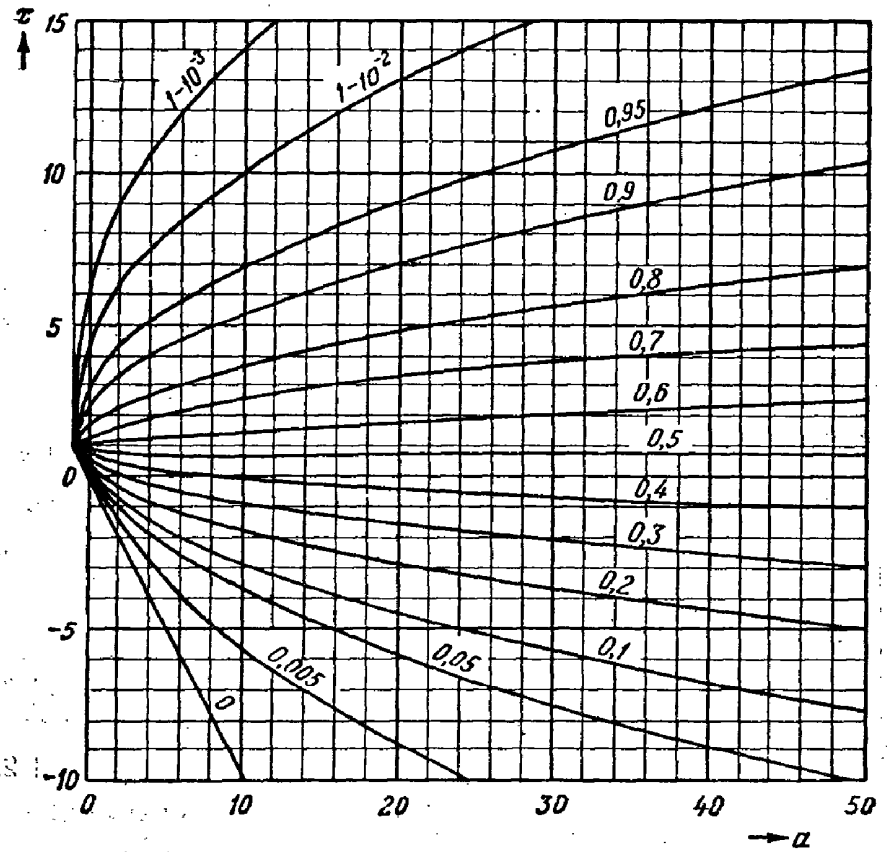


Рис. 25. Кривые $\frac{\gamma(a+1,\ a+x)}{\Gamma(a+1)}=\text{const}$ в плоскости a, x.

При $a\neq 0, -1, -2, \ldots$ имеет место разложение в степенной ряд

$$z^{-a}\gamma(a, z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!\,(a+n)}=e^{-z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a\,(a+1)\ldots(a+n)}.$$

В секторе $-\frac{3\pi}{2}+\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\frac{3\pi}{2}-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ существует при $|z|\gg 1$ асимптотическое представление

$$\gamma(a, z)\approx\Gamma(a)-z^{a-1}e^{-z}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a-1)\,(a-2)\ldots(a-n)}{z^n}\right].$$

По аргументу a справедливы следующие функциональные уравнения:

$$\gamma(a+1, z)=a\gamma(a, z)-z^a e^{-z},\qquad \Gamma(a+1, z)=a\Gamma(a, z)+z^a e^{-z}.$$

VI. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

1. Интегральная показательная функция и интегральный логарифм

1.1. Интегральная показательная функция определяется как

$$\mathrm{Ei}(z) = -\Gamma(0, ze^{-\pi i}) = -\int_z^\infty \frac{e}{t}\,dt,$$

где путь интегрирования должен быть взят от z до ∞ так, чтобы вдоль него $\lim\limits_{t\to\infty} \arg t = \beta$, $\frac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant \frac{3\pi}{2}$, и $\mathrm{Re}\, t$ оставалась ограниченной справа. Функция $\mathrm{Ei}(z)$ является бесконечнозначной функцией z с единственной конечной точкой ветвления $z=0$. Значение этой функции после m обходов вокруг точки ветвления определяется формулой

$$\mathrm{Ei}(ze^{2m\pi i}) = \mathrm{Ei}(z) + 2m\pi i$$
$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

[т. е. циклическая постоянная функции $\mathrm{Ei}(z)$ равна $2\pi i$]. Выполняющееся при $z \neq 0$ разложение в ряд

$$\mathrm{Ei}(z) = C - \pi i + \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n \cdot n!}$$

(C — постоянная Эйлера) указывает на логарифмическую особенность в начале координат. [Иногда употребляются обозначения

$$\mathrm{Ei}^+(x) = \mathrm{Ei}(x + i0),$$
$$\mathrm{Ei}^-(x) = \mathrm{Ei}(x - i0).]$$

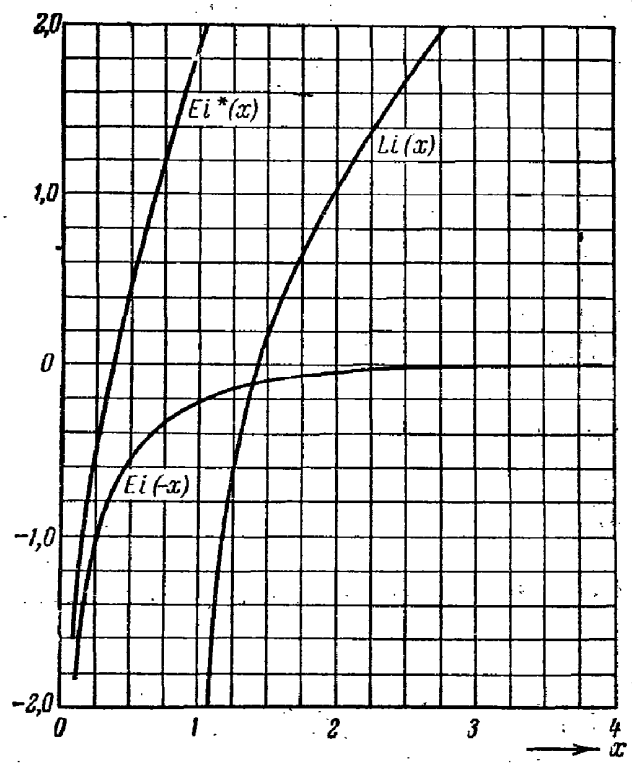


Рис. 26. Интегральная показательная функция и интегральный логарифм.

Действительная ветвь функции $\mathrm{Ei}(z)$ получается при $z = -x$, где x — действительная положительная величина (рис. 26, 27, таблица 15):

$$\mathrm{Ei}(-x) = C + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n \cdot n!}.$$

Иногда рассматривается функция $\mathrm{Ei}^*(z)=\mathrm{Ei}(z)+\pi i$, которую обозначают также через $\overline{\mathrm{Ei}}(z)$. Ее действительная ветвь получается при действительных положительных значениях аргумента $z=x$ (рис. 26, 27, таблица 15);

$$\mathrm{Ei}^*(x)=C+\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot n!}.$$

Действительные ветви обеих этих функций допускают интегральные представления:

$$\mathrm{Ei}(-x)=\int_{-\infty}^{-x}\frac{e^t}{t}\,dt,$$

$$\mathrm{Ei}^*(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}\,dt,$$

где второй интеграл понимается как главное значение в смысле Коши:

$$\int_{-\infty}^{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{x}\right].$$

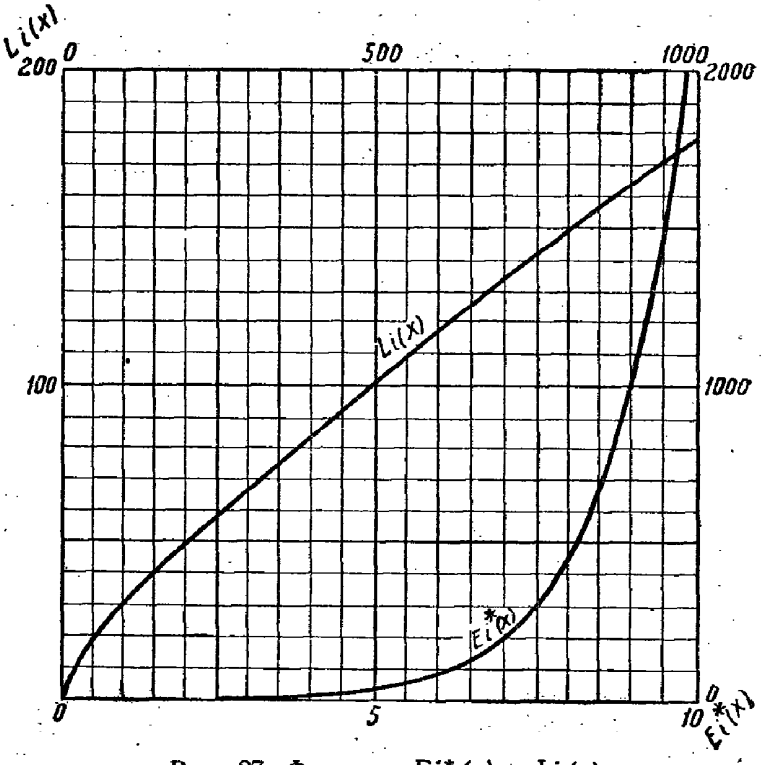


Рис. 27. Функции $\mathrm{Ei}^*(x)$ и $\mathrm{Li}(x)$.

При $x\gg 1$ получается следующая асимптотика:

$$\mathrm{Ei}(-x)\approx\frac{e^{-x}}{-x}\left(1-\frac{1!}{x}+\frac{2!}{x^2}-\frac{3!}{x^3}+\ldots\right),\quad \mathrm{Ei}^*(x)\approx\frac{e^x}{x}\left(1+\frac{1!}{x}+\frac{2!}{x^2}+\frac{3!}{x^3}+\ldots\right).$$

При $x>2$ справедлива приближенная формула:

$$\mathrm{Ei}(-x)=\frac{e^{-x}}{-x}\left\{0{,}9999965-0{,}9989710\,\frac{1}{x}+1{,}9487646\,\frac{1}{x^2}-4{,}9482092\,\frac{1}{x^3}+\right.$$
$$\left.+11{,}7850792\,\frac{1}{x^4}-20{,}4523840\,\frac{1}{x^5}+21{,}1491469\,\frac{1}{x^6}-9{,}5240410\,\frac{1}{x^7}\pm 0{,}35\cdot 10^{-5}\right\}.$$

[При малых x, как видно из разложений,

$$\mathrm{Ei}^*(x)\approx\mathrm{Ei}(-x)\approx\ln\gamma x$$

(γ — постоянная Эйлера).]

1.2. Интегральный логарифм определяется как

$$\mathrm{li}(z)=\int_0^z\frac{dt}{\ln t}.$$

Он связан с $\mathrm{Ei}(z)$ соотношениями

$$\mathrm{li}(z)=\mathrm{Ei}(\ln z),\qquad \mathrm{Ei}(z)=\mathrm{li}(e^z).$$

В частности, для действительных положительных значений аргумента $z=x$ можно определить действительную функцию (рис. 26, 27):

$$\mathrm{Li}(x)=\begin{cases}\mathrm{li}(x)=\mathrm{Ei}(\ln x) & \text{при } 0<x<1,\\ \mathrm{li}(x)+\pi i=\mathrm{Ei}^*(\ln x) & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Таблица 15. Интегральные показательные функции $Ei^*(x)$ и $-Ei(-x)$

x	$Ei^*(x)$		$-Ei(-x)$		x	$Ei^*(x)$		$-Ei(-x)$		x	$Ei^*(x)$		$-Ei(-x)$	
						+ 0,		+ 0,					+ 0,	
0,00	$-\infty$		$+\infty$		0,50	4542	+ 328	5598	− 120	1,0	+ 1,8951	+ 1	21938	+ 729
01	4,0179		4,0379		51	4870	325	5478	116	1	2,1674	25	18599	573
02	3,3147		3,3547		52	5195	322	5362	112	2	2,4421	46	15841	457
03	2,8991		2,9591		53	5517	319	5250	110	3	2,7214	65	13545	369
04	2,6013		2,6813		54	5836	317	5140	106	4	3,0072	83	11622	300
0,05	− 2,3679	− 387	+ 2,4679	+ 387	0,55	6153	+ 314	5034	− 104	1,5	+ 3,3013	+ 100	10002	+ 247
06	2,1753	272	2,2953	272	56	6467	311	4930	100	6	3,6053	116	08631	204
07	2,0108	201	2,1508	201	57	6778	309	4830	98	7	3,9210	133	07465	170
08	1,8669	154	2,0269	154	58	7087	307	4732	96	8	4,2499	149	06471	142
09	1,7387	122	1,9187	122	59	7394	305	4636	92	9	4,5937	167	05620	120
0,10	− 1,6228	− 99	+ 1,8229	+ 99	0,60	7699	+ 303	4544	− 90	2,0	+ 4,9542	+ 185	04890	+ 101
11	1,5170	82	1,7371	82	61	8002	300	4454	88	1	5,3332	204	04261	86
12	1,4193	69	1,6595	69	62	8302	299	4366	86	2	5,7326	224	03719	73
13	1,3287	58	1,5889	58	63	8601	297	4280	83	3	6,1544	245	03250	62
14	1,2438	50	1,5241	50	64	8898	296	4197	82	4	6,6007	268	02844	53
0,15	− 1,1641	− 44	+ 1,4645	+ 44	0,65	9194	+ 294	4115	− 79	2,5	+ 7,0738	+ 292	02491	+ 46
16	1,0887	38	1,4092	39	66	9488	292	4036	77	6	7,5761	318	02185	39
17	1,0172	34	1,3578	34	67	9780	291	3959	76	7	8,1103	347	01918	34
18	0,9491	30	1,3098	30	68	*0071	290	3883	73	8	8,6793	377	01686	29
19	0,8841	27	1,2649	27	69	0361	288	3810	72	9	9,2860	410	01482	25
0,20	− 0,8218	− 24	+ 1,2227	+ 25	0,70	0649	+ 287	3738	− 70	3,0	+ 9,9338	+ 446	013048	+ 221
21	0,7619	22	1,1829	22	71	0936	286	3668	69	1	10,6263	485	011494	192
22	0,7042	20	1,1454	20	72	1222	285	3599	67	2	11,3673	527	010133	167
23	0,6485	18	1,1099	18	73	1507	284	3532	65	3	12,1610	572	008939	145
24	0,5947	17	1,0762	17	74	1791	282	3467	64	4	13,0121	622	007891	127
0,25	− 0,5425	− 15	+ 1,0443	+ 16	0,75	2073	+ 282	3403	− 62	3,5	+ 13,9254	+ 675	006970	+ 111
26	0,4919	+ 506	1,0139	− 305	76	2355	281	3341	61	6	14,9063	734	006160	97
27	0,4427	492	0,9849	290	77	2636	280	3280	59	7	15,9606	797	005448	85
28	0,3949	478	0,9573	276	78	2916	279	3221	58	8	17,0948	866	004820	74
29	0,3482	467	0,9309	264	79	3195	279	3163	57	9	18,3157	941	004267	65
0,30	− 0,3027	+ 445	+ 0,9057	− 252	0,80	3474	+ 278	3106	− 56	4,0	+ 19,6309	+ 1023	003779	+ 57
31	0,2582	435	0,8815	242	81	3752	277	3050	54	1	21,0485	1112	003349	50
32	0,2147	426	0,8583	232	82	4029	277	2996	53	2	22,5774	1209	002969	44
33	0,1721	417	0,8361	222	83	4306	276	2943	52	3	24,2274	1314	002633	39
34	0,1304	410	0,8147	214	84	4582	275	2891	51	4	26,0090	1429	002336	34
0,35	− 0,0894	+ 401	+ 0,7942	− 205	0,85	4857	+ 275	2840	− 50	4,5	+ 27,9337	+ 1555	002073	+ 30
36	0,0493	395	0,7745	197	86	5132	275	2790	48	6	30,0141	1691	001841	27
37	− 0,0098	388	0,7554	191	87	5407	274	2742	48	7	32,2639	1840	001635	23
38	+ 0,0290	382	0,7371	183	88	5681	274	2694	47	8	34,6979	2003	001453	21
39	0,0672	376	0,7194	177	89	5955	273	2647	45	9	37,3325	2180	001291	18
0,40	+ 0,1048	+ 370	+ 0,7024	− 170	0,90	6228	+ 273	2602	− 45	5,0	40,1853	+ 2373	001148	+ 16
41	0,1418	365	0,6859	165	91	6501	273	2557	44	6	+ 85,9898		3601 (−3)	
42	0,1783	360	0,6700	159	92	6774	273	2513	43	7	191,505		1155 (−3)	
43	0,2143	355	0,6546	154	93	7047	272	2470	41	8	440,380		3767 (−4)	
44	0,2498	351	0,6397	149	94	7319	272	2429	42	9	1037,88		1245 (−4)	
0,45	+ 0,2849	+ 346	+ 0,6253	− 144	0,95	7591	+ 273	2387	− 40	10	2492,23		4157 (−5)	
46	0,3195	342	0,6114	139	96	7864	272	2347	39	11	+ 6071,41		1400 (−5)	
47	0,3537	339	0,5979	135	97	8136	271	2308	39	12	14959,5		4751 (−6)	
48	0,3876	335	0,5848	131	98	8407	272	2269	38	13	37197,7		1622 (−6)	
49	0,4211	331	0,5721	127	99	8679	272	2231	37	14	93192,5		5566 (−7)	
0,50	+ 0,4542		+ 0,5598	123	1,00	8951		2194		15	234956		1918 (−7)	
						+ 1,		+ 0,					+ 0,	

2. Интегральный синус и интегральный косинус

2.1. Интегральный синус $\mathrm{si}(z)$ и интегральный косинус $\mathrm{ci}(z)$ определяются формулами

$$\mathrm{si}(z)=\frac{1}{2i}[\mathrm{Ei}(iz)-\mathrm{Ei}(-iz)]=\int_{\infty}^{z}\frac{\sin t}{t}\,dt,$$

$$\mathrm{ci}(z)=\frac{1}{2}[\mathrm{Ei}(iz)+\mathrm{Ei}(-iz)]=\int_{\infty}^{z}\frac{\cos t}{t}\,dt,$$

причем путь интегрирования должен быть выбран так, чтобы в начале пути $\lim_{t\to\infty}\arg t=0$ и $\mathrm{Im}\,t$ оставалась вдоль него ограниченной.

Употребляют также следующие обозначения для этих функций:

$$\mathrm{Si}(z)=\mathrm{si}(z)+\frac{\pi}{2}=\int_{0}^{z}\frac{\sin t}{t}\,dt,\qquad \mathrm{Ci}(z)=\mathrm{ci}(z).$$

Функция $\mathrm{si}(z)$ является целой функцией z, а $\mathrm{ci}(z)$ — бесконечнозначной аналитической функцией z с единственной конечной точкой ветвления $z=0$.

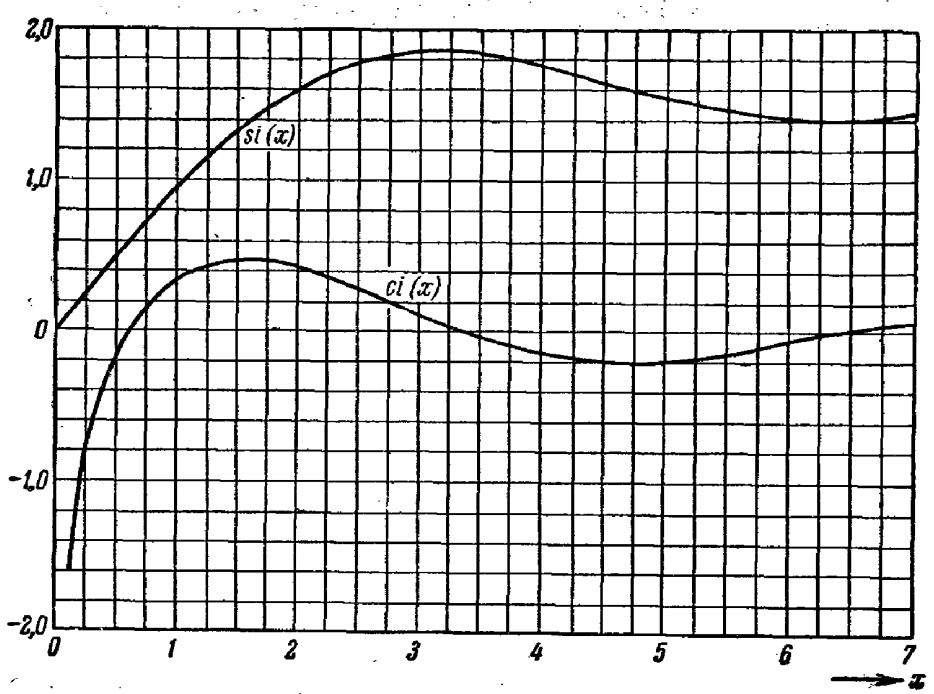


Рис. 28. Интегральный синус и интегральный косинус.

Значение функции $\mathrm{ci}(z)$ после m обходов вокруг точки ветвления определяется формулой

$$\mathrm{ci}(ze^{m\pi i})=\mathrm{ci}(z)+m\pi i\qquad (m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

[т. е. циклическая постоянная этой функции равна πi].

Имеют место представления

$$\mathrm{si}(z)=-\frac{\pi}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!},\qquad \mathrm{ci}(z)=\ln\gamma z+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)(2n)!}.$$

Отсюда видно, что

$$\operatorname{ci}(z) - \ln \gamma z = \int_0^z \frac{\cos t - 1}{t}\, dt$$

является целой функцией z.

Функция $\operatorname{si}(x)$ принимает действительные значения при всех действительных значениях x, а $\operatorname{ci}(x)$ — при действительных $x > 0$ (рис. 28, таблица 16). Эти действительные функции $\operatorname{si}(x)$ и $\operatorname{ci}(x)$ получаются, если для соответствующего определяющего интеграла путь интегрирования взят вдоль действительной оси, начиная с $+\infty$. Имеем:

$$\operatorname{si}(-x) = -\operatorname{si}(x) - \pi, \qquad \operatorname{Si}(-x) = -\operatorname{Si}(x).$$

Асимптотическое поведение при $x \gg 1$ дается формулами

$$\operatorname{si}(x) \approx -\frac{\cos x}{x}\left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \dots\right) - \frac{\sin x}{x}\left(\frac{1!}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \dots\right),$$

$$\operatorname{ci}(x) \approx \frac{\sin x}{x}\left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \dots\right) - \frac{\cos x}{x}\left(\frac{1!}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \dots\right),$$

и, следовательно, в качестве первого приближения получим:

$$\operatorname{si}(x) \approx -\frac{\cos x}{x}, \qquad \operatorname{ci}(x) \approx \frac{\sin x}{x}.$$

[Обе функции имеют бесчисленное количество экстремумов (таблица 17).]

В прямоугольной системе координат (c, s) кривая $c = \operatorname{ci}(x)$, $s = \operatorname{si}(x)$ (x — действительный положительный параметр) представляет собой так называе-

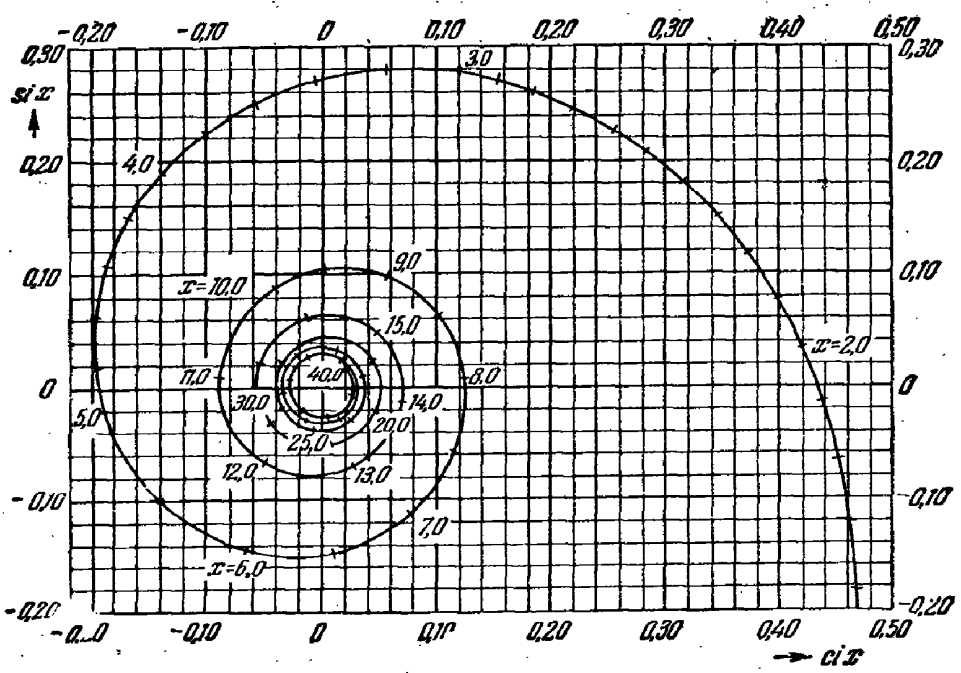


Рис. 29. sici-спираль.

мую sici-*спираль* (рис. 29). Длина дуги от начальной точки ($x = 0$) до точки ($\operatorname{ci} x$, $\operatorname{si} x$) равна $\ln x$, а кривизна $\varkappa$ в этой точке имеет величину $\varkappa = x$. Кривизна, следовательно, возрастает по экспоненциальному закону с возрастанием длины дуги.

2.2. Вводят функции $\operatorname{shi}(z)$, $\operatorname{chi}(z)$, называемые **интегральными гиперболическими синусом и косинусом:**

$$\operatorname{shi}(z)=\int_0^z \frac{\sinh t}{t}\,dt=-i\operatorname{Si}(iz),$$

$$\operatorname{chi}(z)=C+\ln z+\int_0^z \frac{\cosh t-1}{t}\,dt=\operatorname{Ci}(iz)-\frac{i\pi}{2}.$$

При этом $\operatorname{shi}(z)$ — действительная функция для всех действительных, а $\operatorname{chi}(z)$ — для действительных положительных значений $z=x$. [При $x>0$ имеем:

$$\operatorname{shi}(x)=\frac{\operatorname{Ei}^*(x)-\operatorname{Ei}(-x)}{2},\qquad \operatorname{chi}(x)=\frac{\operatorname{Ei}^*(x)+\operatorname{Ei}(-x)}{2},\qquad \operatorname{chi}(x)+\operatorname{shi}(x)=\operatorname{Li}e^x,$$

откуда получаются разложения

$$\operatorname{shi}(x)=x+\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}+\ldots,\qquad \operatorname{chi}(x)=\ln\gamma x+\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^4}{4\cdot 4!}+\ldots$$

Функция $\operatorname{shi}(x)$ является нечетной:

$$\operatorname{shi}(-x)=-\operatorname{shi}(x).]$$

3. Некоторые интегральные формулы

$$\int_x^{+\infty}\frac{e^{-mt}}{a+t}\,dt=-e^{ma}\operatorname{Ei}[-m(a+x)] \qquad (m>0,\ a>0,\ x+a>0),$$

$$\int_x^{+\infty}\frac{e^{im(b+t)}}{a+t}\,dt=-e^{im(b-a)}\operatorname{Ei}[im(a+x)] \qquad \begin{pmatrix} m>0,\ a>0,\ x+a>0,\\ \arg[im(a+x)]=\pi/2\end{pmatrix},$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{t-ai}{t^2+a^2}\,e^{imt}\,dt=-e^{ma}\operatorname{Ei}(-ma) \qquad (m>0,\ a>0),$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{t+ai}{t^2+a^2}\,e^{imt}\,dt=-e^{-ma}[\operatorname{Ei}^*(ma)-\pi i],$$

$$\int_0^{x}\operatorname{Ei}(-mt)\,dt=x\operatorname{Ei}(-mx)-\frac{1-e^{-mx}}{m} \qquad (m>0,\ x>0),$$

$$\int_0^{x}\operatorname{Ei}(imt)\,dt=x\operatorname{Ei}(imx)+\frac{1-e^{imx}}{im} \qquad \begin{pmatrix} m>0,\ x>0,\\ \arg(imt)=\arg(imx)=\pi/2\end{pmatrix},$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-pt}\operatorname{ci}(qt)\,dt=-\frac{1}{2p}\ln\left(1+\frac{p^2}{q^2}\right) \qquad (p>0,\ q>0),$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-pt}\operatorname{si}(qt)\,dt=-\frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{p}{q},$$

$$\int_0^{+\infty}\cos t\operatorname{ci}t\,dt=\int_0^{+\infty}\sin t\operatorname{si}t\,dt=-\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{+\infty}\operatorname{ci}^2(t)\,dt=\int_0^{+\infty}\operatorname{si}^2(t)\,dt=\frac{\pi}{2},\qquad \int_0^{+\infty}\operatorname{ci}(t)\operatorname{si}(t)\,dt=-\ln 2.$$

Таблица 16. Интегральный синус Si (x) и интегральный косинус Ci (x)

x	Si (x)		Ci (x)		x	Si (x)		Ci (x)		x	Si (x)		Ci (x)	
	+ 0,					+ 0,		− 0,			+ 0,			
0,00	000000		− ∞		0,50	4931	+ 96	1778	+ 173	1,0	9461	− 121	+ 0,3374	− 541
01	010000		4,0280		51	5027	96	1605	169	2	*1080	138	0,4205	406
02	020000		3,3349		52	5123	95	1436	165	4	2562	153	0,4620	314
03	029999		2,9296		53	5218	95	1271	161	6	3892	164	0,4717	244
04	039996		2,6421		54	5313	95	1110	157	8	5058	171	0,4568	187
0,05	04999	+ 1000	− 2,4191	− 388	0,55	5408	+ 95	0953	+ 153	2,0	6054	− 175	+ 0,4230	− 140
06	05999	999	2,2371	273	56	5503	95	0800	150	2	6876	174	0,3751	98
07	06998	999	2,0833	202	57	5598	95	0650	146	4	7525	170	0,3173	61
08	07997	999	1,9501	155	58	5693	94	0504	142	6	8004	163	0,2533	− 28
09	08996	998	1,8328	123	59	5787	94	0362	139	8	8321	152	0,1865	+ 1
0,10	09994	+ 999	− 1,7279	− 100	0,60	5881	+ 94	0223	+ 136	3,0	8487	− 139	+ 0,1196	+ 26
11	10993	997	1,6331	83	61	5975	94	0087	133	2	8514	123	+ 0,0553	47
12	11990	998	1,5466	70	62	6069	94	*0046	130	4	8419	105	− 0,0045	64
13	12988	997	1,4672	59	63	6163	93	0176	127	6	8219	86	0,0580	77
14	13985	996	1,3938	51	64	6256	93	0303	123	8	7934	66	0,1038	87
0,15	14981	+ 996	− 1,3255	− 45	0,65	6349	+ 93	0426	+ 122	4,0	7582	− 46	− 0,1410	+ 92
16	15977	996	1,2618	39	66	6442	93	0548	118	2	7184	27	0,1690	94
17	16973	995	1,2020	35	67	6535	93	0666	116	4	6758	− 8	0,1877	93
18	17968	994	1,1457	31	68	6628	92	0782	113	6	6325	+ 9	0,1970	89
19	18962	994	1,0925	28	69	6720	92	0895	110	8	5900	25	0,1976	82
0,20	1996	+ 99	− 1,0422	− 25	0,70	6812	+ 92	1005	+ 108	5,0	5499	+ 38	− 0,19003	+ 724
21	2095	99	0,9944	23	71	6904	92	1113	106	2	5137	49	0,17525	612
22	2194	99	0,9490	21	72	6996	91	1219	103	4	4823	58	0,15439	486
23	2293	99	0,9057	19	73	7087	92	1322	101	6	4567	64	0,12867	352
24	2392	99	0,8643	18	74	7179	91	1423	99	8	4374	67	0,09944	215
0,25	2491	+ 99	− 0,8247	− 16	0,75	7270	+ 90	1522	+ 96	6,0	4247	+ 67	− 0,06806	+ 79
26	2590	99	0,7867	+ 380	76	7360	91	1618	94	2	4187	65	0,03587	− 51
27	2689	99	0,7503	364	77	7451	90	1712	93	4	4192	61	− 0,00418	171
28	2788	98	0,7153	350	78	7541	90	1805	90	6	4258	55	+ 0,02582	278
29	2886	99	0,6816	337	79	7631	90	1895	88	8	4379	47	0,05308	368
0,30	2985	+ 98	− 0,6492	324	0,80	7721	+ 90	1983	+ 86	7,0	4546	+ 38	+ 0,07670	− 439
31	3083	99	0,6179	+ 313	81	7811	89	2069	84	2	4751	28	0,09596	490
32	3182	98	0,5877	302	82	7900	89	2153	82	4	4983	17	0,11036	520
33	3280	98	0,5585	292	83	7989	89	2235	81	6	5233	+ 6	0,11960	529
34	3378	98	0,5304	281	84	8078	88	2316	78	8	5489	− 4	0,12359	518
0,35	3476	+ 98	− 0,5031	273	0,85	8166	+ 88	2394	+ 77	8,0	5742	− 14	+ 0,12243	− 487
36	3574	98	0,4767	+ 264	86	8254	88	2471	75	2	5981	22	0,11644	440
37	3672	98	0,4511	256	87	8342	88	2546	73	4	6198	30	0,10607	379
38	3770	97	0,4263	248	88	8430	88	2619	72	6	6386	36	0,09194	306
39	3867	98	0,4022	241	89	8518	87	2691	70	8	6538	40	0,07476	224
0,40	3965	+ 97	− 0,3788	234	0,90	8605	+ 87	2761	+ 68	9,0	6650	− 43	+ 0,05535	− 138
41	4062	97	0,3561	+ 227	91	8692	86	2829	67	2	6720	44	0,03455	− 51
42	4159	97	0,3341	220	92	8778	87	2896	65	4	6747	43	+ 0,01325	+ 35
43	4256	97	0,3126	215	93	8865	86	2961	63	6	6732	40	− 0,00771	116
44	4353	97	0,2918	208	94	8951	85	3024	62	8	6676	37	0,02752	189
0,45	4450	+ 96	− 0,2715	203	0,95	9036	+ 86	3086	+ 61	10,0	6583	− 32	− 0,04546	+ 232
46	4546	97	0,2517	+ 198	96	9122	85	3147	59		+ 1,			
47	4643	96	0,2325	192	97	9207	85	3206	57					
48	4739	96	0,2138	187	98	9292	85	3263	56					
49	4835	96	0,1956	182	99	9377	84	3319	55					
0,50	4931		− 0,1778	178	1,00	9461		3374						
	+ 0,					+ 0,		+ 0,						

Продолжение табл. 16

x	Si (x)		Ci (x)		x	Si (x)	Ci (x)	x	Si (x)	Ci (x)
	+ 1,					+ 1,			+ 1,	
10,0	6583	— 200	— 0,04546	+ 1614	25	5315	— 0,00685	75	5586	— 0,00533
10,5	6229	— 96	— 0,07828	+ 2256	26	5449	+ 0,02830	80	5723	— 0,01240
11,0	5783	+ 23	— 0,08956	+ 2323	27	5803	+ 0,03572	85	5824	— 0,001935
11,5	5357	+ 125	— 0,07857	+ 1849	28	6047	+ 0,01087	90	5757	+ 0,009986
12,0	5050	+ 190	— 0,04978	+ 987	29	5973	— 0,02195	95	5630	+ 0,007110
12,5	4923	+ 205	— 0,01141	— 35	30	5668	— 0,03303	100	5622	— 0,005149
13,0	4996	+ 172	+ 0,02676	— 970	31	5418	— 0,01395	110	5799	— 0,000320
13,5	5229	+ 101	+ 0,05576	— 1609	32	5442	+ 0,01639	120	5640	+ 0,004781
14,0	5562	+ 11	+ 0,06940	— 1828	33	5703	+ 0,03026	130	5737	— 0,007132
14,5	5907	— 78	+ 0,06554	— 1604	34	5953	+ 0,01626	140	5722	+ 0,007011
15,0	6182	— 137	+ 0,04628	— 1019	35	5969	— 0,01148	150	5662	— 0,004800
15,5	6326	— 164	+ 0,01719	— 232	36	5751	— 0,02741	160	5769	+ 0,001409
16,0	6313	— 150	— 0,01420	+ 560	37	5506	— 0,01792	170	5653	+ 0,002010
16,5	6156	— 102	— 0,04031	+ 1172	38	5455	+ 0,00713	180	5741	— 0,004432
17,0	5901	— 33	— 0,05524	+ 1472	39	5633	+ 0,02451	190	5704	+ 0,005250
17,5	5615	+ 41	— 0,05610	+ 1407	40	5870	+ 0,01902	200	5684	— 0,004378
18,0	5366	+ 100	— 0,04348	+ 1013	41	5949	— 0,00328	300	5709	— 0,003332
18,5	5213	+ 133	— 0,02111	+ 400	42	5808	— 0,02157	400	5721	— 0,002124
19,0	5186	+ 132	+ 0,00515	— 275	43	5583	— 0,01962	500	5726	— 0,0009320
19,5	5286	+ 100	+ 0,02883	— 850	44	5481	— 0,00011	600	5725	+ 0,0000764
20,0	5482	+ 46	+ 0,04442	— 1195	45	5587	+ 0,01863	700	5720	+ 0,0007788
20,5	5723	— 16	+ 0,04859	— 1239	46	5798	+ 0,01979	800	5714	+ 0,001118
21,0	5949	— 72	+ 0,04089	— 986	47	5918	+ 0,00307	900	5707	+ 0,001109
21,5	6106	— 108	+ 0,02373	— 510	48	5845	— 0,01571	10^3	5702	+ 0,000826
22,0	6161	— 116	+ 0,00164	+ 65	49	5651	— 0,01957	10^4	5709	— 0,0000306
22,5	6104	— 97	— 0,01986	+ 600	50	5516	— 0,00563	10^5	5708	+ 0,0000004
23,0	5955	— 55	— 0,03566	+ 968	55	5707	— 0,01817	10^6	5708	— 0,0000004
23,5	5752	— 2	— 0,04221	+ 1089	60	5867	— 0,00481	10^7	5708	+ 0,0000000
24,0	5547	+ 49	— 0,03833	+ 946	65	5792	+ 0,01285		+ 1,	
24,5	5390	+ 87	— 0,02539	+ 582	70	5616	+ 0,01092	∞	$\pi/2$	0
25,0	5315	+ 102	— 0,00685	+ 93	75	5586	— 0,00533			
	+ 1,					+ 1,				

Таблица 17. Экстремумы функций ci (x) и si (x)

$\frac{x}{\pi}$	Max. Min. ci (x)	$\frac{x}{\pi}$	Max. Min. si (x)	$\frac{x}{\pi}$	Max. Min. si (x)
0,5	+ 0,47200	1	+ 0,28114	16	— 0,019879
1,5	— 0,19841	2	— 0,15264	17	+ 0,018711
2,5	+ 0,12377	3	+ 0,10396	18	— 0,017673
3,5	— 0,089564	4	— 0,078635	19	+ 0,016744
4,5	+ 0,070065	5	+ 0,063168	20	— 0,015907
5,5	— 0,057501	6	— 0,052762	21	+ 0,015151
6,5	+ 0,048742	7	+ 0,045289	22	— 0,014463
7,5	— 0,042292	8	— 0,039665	23	+ 0,013834
8,5	+ 0,037345	9	+ 0,035280	24	— 0,013258
9,5	— 0,033433	10	— 0,031767		
10,5	+ 0,030260	11	+ 0,028889		
11,5	— 0,027637	12	— 0,026489		
12,5	+ 0,025432	13	+ 0,024456		
13,5	— 0,023552	14	— 0,022713		
14,5	+ 0,021931	15	+ 0,021201		
15,5	— 0,020519				

VII. ИНТЕГРАЛ ОШИБОК И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ФУНКЦИИ

1. Интеграл ошибок

1.1. Интеграл ошибок $\Phi(z)$ определяется равенством

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}\,dt=\int_0^{z^2}\frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}\,dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{1}{2},\ z^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2i}}\int_0^{z^2}H^{(2)}_{-1/2}(-it)\,dt$$

(определения функций $\gamma(a, z)$ и $H^{(2)}_{\nu}(z)$ см. соответственно в V, C и XIII, A).

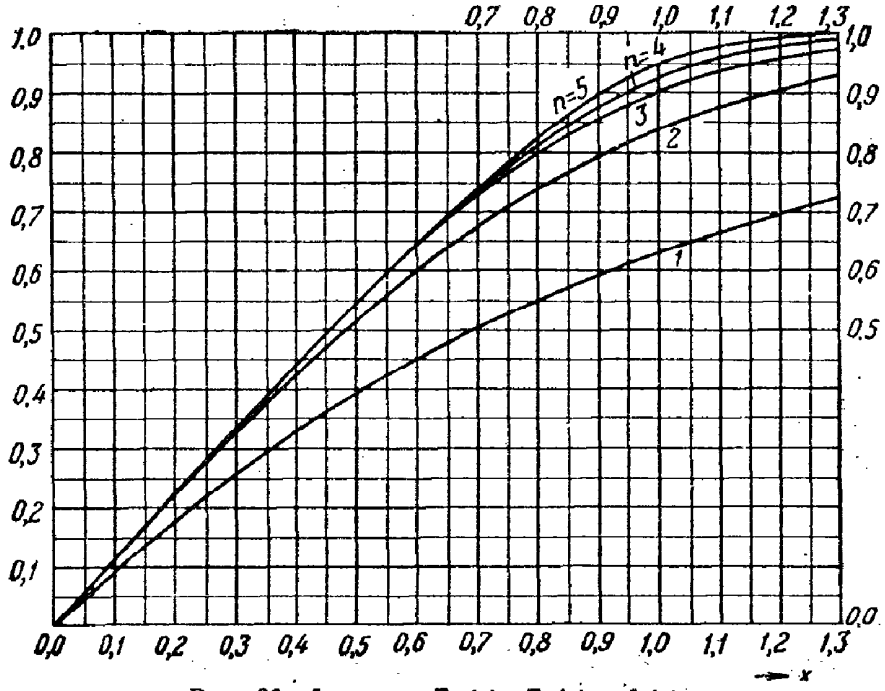


Рис. 30. Функции $E_n(x)$; $E_2(x)=\Phi(x)$.

Интеграл ошибок *) является целой функцией от z, причем

$$\Phi(-z)=-\Phi(z).$$

Для действительных значений аргумента $z=x$ интеграл ошибок принимает действительные значения (рис. 30, таблица 18). В частности, имеем:

$$\Phi(0)=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=1.$$

*) Эту функцию называют часто *интегралом вероятности ошибок* или *интегралом вероятности*. — *Прим. ред.*

[Часто встречаются также производные интеграла ошибок (рис. 31, таблица 19):

$$\Phi_1(x)=\Phi'(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2};$$

$$\Phi_{n+1}(x)=\Phi^{(n+1)}(x)=2^n\Phi_1(x)\left\{(-x)^n-n\frac{n-1}{4}(-x)^{n-2}+\right.$$
$$\left.+n\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{32}(-x)^{n-4}-\dots\right\}.]$$

Из представлений для $\gamma(a, z)$ получаем для $\Phi(z)$ степенные ряды

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{1\cdot3\dots(2n+1)}z^{2n+1},$$

а в секторе $-\frac{3\pi}{4}+\varepsilon\leqslant\arg z\leqslant\frac{3\pi}{4}-\varepsilon\,(\varepsilon>0)$ имеет место асимптотическое разложение для $|z|\gg1$:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{1-\Phi(z)\right\}\approx\frac{e^{-z^2}}{2z}\left\{1-\frac{1}{2z^2}+\frac{1\cdot3}{(2z^2)^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(2z^2)^3}+\dots\right\}.$$

При этом для положительных действительных значений аргумента $z=x$ ошибка,

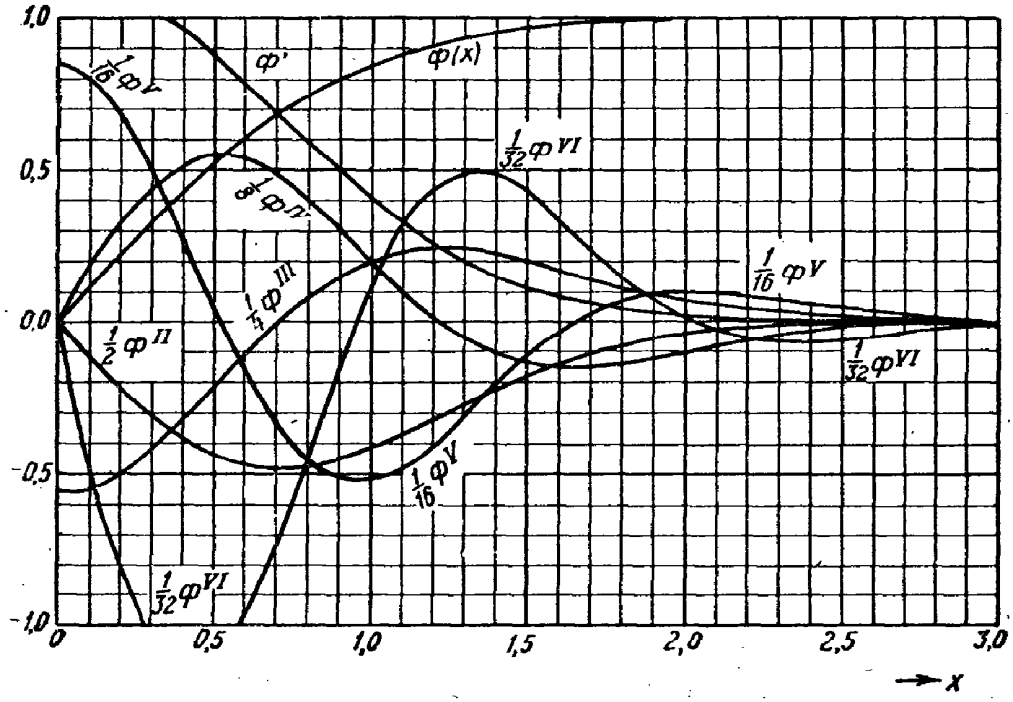


Рис. 31. Производные интеграла ошибок.

получающаяся при обрывании ряда, по абсолютной величине меньше первого отбрасываемого члена и имеет тот же знак (таблица 20).

Обобщением интеграла ошибок являются функции $E_n(z)$, определяемые равенством (рис. 30)

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)E_n(z)=\frac{1}{n}\gamma\left(\frac{1}{n},\ z^n\right)=\frac{1}{n}\int_0^{z^n}e^{-t}t^{\frac{1}{n}-1}dt=\int_0^z e^{-t^n}dt$$

[в частности,

$$E_1(z) = 1 - e^{-z}, \qquad E_2(z) = \Phi(z)].$$

Для функций $E_n(z)$ легко получить степенные ряды и асимптотику из представлений для $\gamma(a, z)$. [А именно:

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right) E_n(z) = z - \frac{z^{n+1}}{1!(n+1)} + \frac{z^{2n+1}}{2!(2n+1)} - \frac{z^{3n+1}}{3!(3n+1)} + \dots,$$

и при действительных положительных $x \gg 1$

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)[1 - E_n(x)] \approx$$
$$\approx \frac{e^{-x^n}}{nx^{n-1}}\left\{1 - \frac{n-1}{nx^n} + \frac{(n-1)(2n-1)}{(nx^n)^2} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{(nx^n)^3} + \dots\right\}.]$$

1.2. В статистике обычно принимают несколько иную нормировку интеграла ошибок. Именно, полагают (таблица 22)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

В частности имеем:

$$\Phi(0) = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1.$$

Производная от этой функции равна (таблица 22)

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Кроме этих обозначений, употребляются еще следующие *):

$$\Theta(x) = H(x) = \Phi(x),$$

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(x),$$

$$\operatorname{Erfc}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1 - \Phi(x)), \quad \alpha(x) = 2\Phi(x) - 1.$$

---

*) Часто рассматривается также функция (таблица 21)

$$y = \int_0^x e^{t^2} dt = -i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(ix),$$

которая обозначается обычно через $\operatorname{Erfi}(x)$. — *Прим. ред.*

Таблица 18. Интеграл ошибок $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

x	$\Phi(x)$		x	$\Phi(x)$		x	$\Phi(x)$		x	$\Phi(x)$		x	$\Phi(x)$		x	$\Phi(x)$	
	0,			0,			0,			0,9			0,99			0,99	
0,00	00000	+1128	0,50	52050	+ 874	1,00	84270	+ 411	1,50	6611	+ 117	2,00	5322	+ 203	2,50	9593	+ 21
01	01128	1128	51	52924	866	01	84681	403	51	6728	113	01	5525	194	51	9614	21
02	02256	1128	52	53790	856	02	85084	394	52	6841	111	02	5719	187	52	9635	19
03	03384	1127	53	54646	848	03	85478	387	53	6952	107	03	5906	180	53	9654	18
04	04511	1126	54	55494	838	04	85865	379	54	7059	103	04	6086	172	54	9672	17
0,05	05637	+1125	0,55	56332	+ 830	1,05	86244	+ 370	1,55	7162	+ 101	2,05	6258	+ 165	2,55	9689	+ 17
06	06762	1124	56	57162	820	06	86614	363	56	7263	97	06	6423	159	56	9706	16
07	07886	1122	57	57982	810	07	86977	356	57	7360	95	07	6582	152	57	9722	14
08	09008	1120	58	58792	802	08	87333	347	58	7455	91	08	6734	146	58	9736	15
09	10128	1118	59	59594	792	09	87680	341	59	7546	89	09	6880	141	59	9751	13
0,10	11246	+1116	0,60	60386	+ 782	1,10	88021	+ 332	1,60	7635	+ 86	2,10	7021	+ 134	2,60	97640	+ 127
11	12362	1114	61	61168	773	11	88353	326	61	7721	83	11	7155	129	61	97767	121
12	13476	1111	62	61941	764	12	88679	318	62	7804	80	12	7284	123	62	97888	115
13	14587	1108	63	62705	754	13	88997	311	63	7884	78	13	7407	118	63	98003	109
14	15695	1105	64	63459	744	14	89308	304	64	7962	76	14	7525	114	64	98112	103
0,15	16800	+1101	0,65	64203	+ 735	1,15	89612	+ 298	1,65	8038	+ 72	2,15	7639	+ 108	2,65	98215	+ 98
16	17901	1098	66	64938	725	16	89910	290	66	8110	71	16	7747	104	66	98313	93
17	18999	1095	67	65663	715	17	90200	284	67	8181	68	17	7851	100	67	98406	88
18	20094	1090	68	66378	706	18	90484	277	68	8249	66	18	7951	95	68	98494	84
19	21184	1086	69	67084	696	19	90761	270	69	8315	64	19	8046	91	69	98578	79
0,20	22270	+1082	0,70	67780	+ 687	1,20	91031	+ 265	1,70	8379	+ 62	2,20	8137	+ 87	2,70	98657	+ 75
21	23352	1078	71	68467	676	21	91296	257	71	8441	59	21	8224	84	71	98732	71
22	24430	1072	72	69143	667	22	91553	252	72	8500	58	22	8308	80	72	98803	67
23	25502	1068	73	69810	658	23	91805	246	73	8558	55	23	8388	76	73	98870	64
24	26570	1063	74	70468	648	24	92051	239	74	8613	54	24	8464	73	74	98934	60
0,25	27633	+1057	0,75	71116	+ 638	1,25	92290	+ 234	1,75	8667	+ 52	2,25	8537	+ 70	2,75	98994	+ 57
26	28690	1052	76	71754	628	26	92524	227	76	8719	50	26	8607	67	76	99051	54
27	29742	1046	77	72382	619	27	92751	222	77	8769	48	27	8674	64	77	99105	51
28	30788	1040	78	73001	609	28	92973	217	78	8817	47	28	8738	61	78	99156	48
29	31828	1035	79	73610	600	29	93190	211	79	8864	45	29	8799	58	79	99204	46
0,30	32863	+1028	0,80	74210	+ 590	1,30	93401	+ 205	1,80	8909	+ 43	2,30	8857	+ 55	2,80	99250	+ 43
31	33891	1022	81	74800	581	31	93606	201	81	8952	42	31	8912	54	81	99293	41
32	34913	1015	82	75381	571	32	93807	195	82	8994	41	32	8966	50	82	99334	39
33	35928	1008	83	75952	562	33	94002	189	83	9035	39	33	9016	49	83	99373	36
34	36936	1002	84	76514	553	34	94191	185	84	9074	37	34	9065	46	84	99409	34
0,35	37938	+ 995	0,85	77067	+ 543	1,35	94376	+ 180	1,85	9111	+ 36	2,35	9111	+ 44	2,85	99443	+ 33
36	38933	988	86	77610	534	36	94556	175	86	9147	35	36	9155	42	86	99476	31
37	39921	980	87	78144	525	37	94731	171	87	9182	34	37	9197	40	87	99507	29
38	40901	973	88	78669	515	38	94902	165	88	9216	32	38	9237	38	88	99536	27
39	41874	965	89	79184	507	39	95067	162	89	9248	31	39	9275	36	89	99563	26
0,40	42839	+ 958	0,90	79691	+ 497	1,40	95229	+ 156	1,90	9279	+ 30	2,40	9311	+ 35	2,90	99589	+ 24
41	43797	950	91	80188	489	41	95385	153	91	9309	29	41	9346	33	91	99613	23
42	44747	942	92	80677	479	42	95538	148	92	9338	28	42	9379	32	92	99636	22
43	45689	934	93	81156	471	43	95686	144	93	9366	26	43	9411	30	93	99658	21
44	46623	925	94	81627	462	44	95830	140	94	9392	26	44	9441	28	94	99679	19
0,45	47548	+ 918	0,95	82089	+ 453	1,45	95970	+ 135	1,95	9418	+ 25	2,45	9469	+ 28	2,95	99698	+ 18
46	48466	909	96	82542	445	46	96105	132	96	9443	23	46	9497	26	96	99716	17
47	49375	900	97	82987	436	47	96237	128	97	9466	23	47	9523	24	97	99733	17
48	50275	892	98	83423	428	48	96365	125	98	9489	22	48	9547	24	98	99750	15
49	51167	883	99	83851	419	49	96490	121	99	9511	21	49	9571	22	99	99765	14
0,50	52050		1,00	84270		1,50	96611		2,00	9532		2,50	9593		3,00	99779	
	0,			0,			0,			0,9			0,99			0,99	

Таблица 19. **Производные интеграла ошибок $\Phi(x)$**

x	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x):2$	$\Phi_3(x):4$	$\Phi_4(x):8$	$\Phi_5(x):16$	$\Phi_6(x):32$
0,00	+1,1284	—0,0000	—0,5642	+0,0000	+0,8463	—0,0000
0,01	+1,1283	—0,0113	—0,5640	+0,0169	+0,8459	—0,0423
0,02	+1,1279	—0,0226	—0,5635	+0,0338	+0,8446	—0,0845
0,03	+1,1274	—0,0338	—0,5627	+0,0507	+0,8425	—0,1267
0,04	+1,1266	—0,0451	—0,5615	+0,0675	+0,8395	—0,1686
0,05	+1,1256	—0,0563	—0,5600	+0,0843	+0,8357	—0,2103
0,06	+1,1243	—0,0675	—0,5581	+0,1009	+0,8311	—0,2518
0,07	+1,1229	—0,0786	—0,5559	+0,1175	+0,8257	—0,2928
0,08	+1,1212	—0,0897	—0,5534	+0,1340	+0,8194	—0,3335
0,09	+1,1193	—0,1007	—0,5506	+0,1503	+0,8123	—0,3737
0,10	+1,1172	—0,1117	—0,5474	+0,1665	+0,8045	—0,4134
0,11	+1,1148	—0,1226	—0,5439	+0,1825	+0,7958	—0,4525
0,12	+1,1122	—0,1335	—0,5401	+0,1983	+0,7864	—0,4909
0,13	+1,1095	—0,1442	—0,5360	+0,2139	+0,7762	—0,5287
0,14	+1,1065	—0,1549	—0,5316	+0,2293	+0,7652	—0,5658
0,15	+1,1033	—0,1655	—0,5268	+0,2445	+0,7535	—0,6021
0,16	+1,0999	—0,1760	—0,5218	+0,2595	+0,7411	—0,6375
0,17	+1,0962	—0,1864	—0,5164	+0,2742	+0,7280	—0,6721
0,18	+1,0924	—0,1966	—0,5108	+0,2886	+0,7143	—0,7057
0,19	+1,0884	—0,2068	—0,5049	+0,3027	+0,6998	—0,7384
0,20	+1,0841	—0,2168	—0,4987	+0,3166	+0,6847	—0,7701
0,21	+1,0797	—0,2267	—0,4922	+0,3301	+0,6690	—0,8007
0,22	+1,0751	—0,2365	—0,4855	+0,3433	+0,6527	—0,8302
0,23	+1,0702	—0,2462	—0,4785	+0,3562	+0,6358	—0,8587
0,24	+1,0652	—0,2557	—0,4713	+0,3688	+0,6184	—0,8859
0,25	+1,0600	—0,2650	—0,4638	+0,3809	+0,6004	—0,9120
0,26	+1,0546	—0,2742	—0,4560	+0,3928	+0,5819	—0,9368
0,27	+1,0490	—0,2832	—0,4480	+0,4042	+0,5629	—0,9604
0,28	+1,0433	—0,2921	—0,4399	+0,4153	+0,5435	—0,9827
0,29	+1,0374	—0,3008	—0,4314	+0,4260	+0,5236	—1,0038
0,30	+1,0313	—0,3094	—0,4228	+0,4362	+0,5034	—1,0235
0,31	+1,0250	—0,3177	—0,4140	+0,4461	+0,4827	—1,0418
0,32	+1,0186	—0,3259	—0,4050	+0,4555	+0,4617	—1,0588
0,33	+1,0120	—0,3339	—0,3958	+0,4646	+0,4404	—1,0744
0,34	+1,0052	—0,3418	—0,3864	+0,4731	+0,4187	—1,0887
0,35	+0,9983	—0,3494	—0,3769	+0,4813	+0,3968	—1,1015
0,36	+0,9912	—0,3568	—0,3671	+0,4890	+0,3747	—1,1129
0,37	+0,9840	—0,3641	—0,3573	+0,4963	+0,3523	—1,1229
0,38	+0,9767	—0,3711	—0,3473	+0,5031	+0,3298	—1,1315
0,39	+0,9692	—0,3780	—0,3372	+0,5095	+0,3071	—1,1387
0,40	+0,9615	—0,3846	—0,3269	+0,5154	+0,2842	—1,1445
0,41	+0,9538	—0,3911	—0,3166	+0,5208	+0,2613	—1,1488
0,42	+0,9459	—0,3973	—0,3061	+0,5258	+0,2383	—1,1518
0,43	+0,9379	—0,4033	—0,2955	+0,5304	+0,2152	—1,1533
0,44	+0,9298	—0,4091	—0,2849	+0,5344	+0,1922	—1,1534
0,45	+0,9215	—0,4147	—0,2742	+0,5381	+0,1691	—1,1522
0,46	+0,9132	—0,4201	—0,2634	+0,5412	+0,1461	—1,1496
0,47	+0,9047	—0,4252	—0,2525	+0,5439	+0,1231	—1,1457
0,48	+0,8962	—0,4302	—0,2416	+0,5461	+0,1003	—1,1404
0,49	+0,8875	—0,4349	—0,2307	+0,5479	+0,0775	—1,1338
0,50	+0,8788	—0,4394	—0,2197	+0,5492	+0,0549	—1,1259

Продолжение табл. 19

x	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x):2$	$\Phi_3(x):4$	$\Phi_4(x):8$	$\Phi_5(x):16$	$\Phi_6(x):32$
0,50	+0,8788	—0,4394	—0,2197	+0,5492	+0,0549	—1,1259
0,51	+0,8700	—0,4437	—0,2087	+0,5501	+0,0325	—1,1168
0,52	+0,8610	—0,4477	—0,1977	+0,5505	+0,0103	—1,1064
0,53	+0,8520	—0,4516	—0,1867	+0,5505	—0,0118	—1,0948
0,54	+0,8430	—0,4552	—0,1757	+0,5501	—0,0335	—1,0820
0,55	+0,8338	—0,4586	—0,1647	+0,5492	—0,0550	—1,0681
0,56	+0,8246	—0,4618	—0,1537	+0,5479	—0,0762	—1,0536
0,57	+0,8154	—0,4648	—0,1428	+0,5461	—0,0971	—1,0369
0,58	+0,8060	—0,4675	—0,1319	+0,5440	—0,1177	—1,0197
0,59	+0,7967	—0,4700	—0,1210	+0,5414	—0,1379	—1,0015
0,60	+0,7872	—0,4723	—0,1102	+0,5385	—0,1578	—0,9823
0,61	+0,7778	—0,4744	—0,0995	+0,5351	—0,1772	—0,9621
0,62	+0,7683	—0,4763	—0,0888	+0,5314	—0,1962	—0,9411
0,63	+0,7587	—0,4780	—0,0782	+0,5273	—0,2148	—0,9192
0,64	+0,7491	—0,4795	—0,0677	+0,5228	—0,2330	—0,8965
0,65	+0,7395	—0,4807	—0,0573	+0,5180	—0,2507	—0,8730
0,66	+0,7299	—0,4817	—0,0470	+0,5128	—0,2679	—0,8487
0,67	+0,7203	—0,4826	—0,0368	+0,5072	—0,2846	—0,8238
0,68	+0,7106	—0,4832	—0,0267	+0,5014	—0,3009	—0,7982
0,69	+0,7010	—0,4837	—0,0168	+0,4952	—0,3166	—0,7720
0,70	+0,6913	—0,4839	—0,0069	+0,4887	—0,3317	—0,7452
0,71	+0,6816	—0,4839	+0,0028	+0,4819	—0,3464	—0,7180
0,72	+0,6719	—0,4833	+0,0124	+0,4749	—0,3605	—0,6902
0,73	+0,6622	—0,4834	+0,0218	+0,4675	—0,3740	—0,6621
0,74	+0,6526	—0,4829	+0,0311	+0,4599	—0,3869	—0,6335
0,75	+0,6429	—0,4822	+0,0402	+0,4521	—0,3993	—0,6046
0,76	+0,6333	—0,4813	+0,0491	+0,4440	—0,4111	—0,5755
0,77	+0,6237	—0,4802	+0,0579	+0,4356	—0,4223	—0,5460
0,78	+0,6141	—0,4790	+0,0666	+0,4271	—0,4330	—0,5164
0,79	+0,6045	—0,4776	+0,0750	+0,4183	—0,4430	—0,4866
0,80	+0,5950	—0,4760	+0,0833	+0,4094	—0,4524	—0,4568
0,81	+0,5855	—0,4742	+0,0914	+0,4002	—0,4613	—0,4268
0,82	+0,5760	—0,4723	+0,0993	+0,3909	—0,4695	—0,3968
0,83	+0,5666	—0,4703	+0,1070	+0,3814	—0,4771	—0,3669
0,84	+0,5572	—0,4681	+0,1146	+0,3718	—0,4842	—0,3369
0,85	+0,5479	—0,4657	+0,1219	+0,3621	—0,4906	—0,3071
0,86	+0,5386	—0,4632	+0,1290	+0,3522	—0,4965	—0,2774
0,87	+0,5293	—0,4605	+0,1360	+0,3422	—0,5017	—0,2479
0,88	+0,5202	—0,4577	+0,1427	+0,3321	—0,5054	—0,2187
0,89	+0,5110	—0,4548	+0,1493	+0,3220	—0,5105	—0,1896
0,90	+0,5020	—0,4518	+0,1556	+0,3117	—0,5140	—0,1609
0,91	+0,4930	—0,4486	+0,1617	+0,3014	—0,5169	—0,1324
0,92	+0,4840	—0,4453	+0,1677	+0,2911	—0,5193	—0,1044
0,93	+0,4752	—0,4419	+0,1734	+0,2805	—0,5211	—0,0767
0,94	+0,4664	—0,4384	+0,1789	+0,2702	—0,5223	—0,0494
0,95	+0,4576	—0,4347	+0,1842	+0,2598	—0,5231	—0,0226
0,96	+0,4490	—0,4310	+0,1893	+0,2493	—0,5232	+0,0037
0,97	+0,4404	—0,4272	+0,1942	+0,2388	—0,5229	+0,0296
0,98	+0,4319	—0,4232	+0,1988	+0,2284	—0,5221	+0,0549
0,99	+0,4235	—0,4192	+0,2033	+0,2180	—0,5207	+0,0796
1,00	+0,4151	—0,4151	+0,2076	+0,2076	—0,5189	+0,1038

Продолжение табл. 19

x	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x):2$	$\Phi_3(x):4$	$\Phi_4(x):8$	$\Phi_5(x):16$	$\Phi_6(x):32$
1,00	+0,4151	−0,4151	+0,2076	+0,2076	−0,5189	+0,1038
1,01	+0,4068	−0,4109	+0,2116	+0,1972	−0,5166	+0,1273
1,02	+0,3987	−0,4066	+0,2154	+0,1869	−0,5138	+0,1503
1,03	+0,3906	−0,4023	+0,2191	+0,1766	−0,5106	+0,1726
1,04	+0,3826	−0,3979	+0,2225	+0,1665	−0,5069	+0,1942
1,05	+0,3747	−0,3934	+0,2257	+0,1564	−0,5028	+0,2152
1,06	+0,3668	−0,3889	+0,2288	+0,1464	−0,4983	+0,2355
1,07	+0,3591	−0,3843	+0,2316	+0,1364	−0,4934	+0,2550
1,08	+0,3515	−0,3796	+0,2342	+0,1266	−0,4881	+0,2739
1,09	+0,3439	−0,3749	+0,2367	+0,1169	−0,4824	+0,2920
1,10	+0,3365	−0,3701	+0,2389	+0,1073	−0,4764	+0,3094
1,11	+0,3291	−0,3653	+0,2410	+0,0979	−0,4701	+0,3260
1,12	+0,3219	−0,3605	+0,2428	+0,0885	−0,4634	+0,3419
1,13	+0,3147	−0,3556	+0,2445	+0,0793	−0,4564	+0,3570
1,14	+0,3076	−0,3507	+0,2460	+0,0703	−0,4491	+0,3714
1,15	+0,3007	−0,3458	+0,2473	+0,0614	−0,4415	+0,3850
1,16	+0,2938	−0,3408	+0,2484	+0,0526	−0,4337	+0,3979
1,17	+0,2870	−0,3358	+0,2494	+0,0440	−0,4256	+0,4099
1,18	+0,2804	−0,3308	+0,2502	+0,0356	−0,4173	+0,4212
1,19	+0,2738	−0,3258	+0,2508	+0,0273	−0,4088	+0,4318
1,20	+0,2673	−0,3208	+0,2513	+0,0192	−0,4001	+0,4416
1,21	+0,2610	−0,3158	+0,2516	+0,0113	−0,3911	+0,4506
1,22	+0,2547	−0,3107	+0,2518	+0,0036	−0,3820	+0,4589
1,23	+0,2485	−0,3057	+0,2518	−0,0039	−0,3728	+0,4664
1,24	+0,2425	−0,3007	+0,2516	−0,0113	−0,3634	+0,4732
1,25	+0,2365	−0,2957	+0,2513	−0,0185	−0,3539	+0,4793
1,26	+0,2307	−0,2906	+0,2509	−0,0255	−0,3442	+0,4846
1,27	+0,2249	−0,2856	+0,2503	−0,0322	−0,3345	+0,4893
1,28	+0,2192	−0,2806	+0,2496	−0,0388	−0,3247	+0,4932
1,29	+0,2137	−0,2756	+0,2487	−0,0452	−0,3148	+0,4965
1,30	+0,2082	−0,2707	+0,2478	−0,0514	−0,3048	+0,4991
1,31	+0,2028	−0,2657	+0,2467	−0,0574	−0,2948	+0,5010
1,32	+0,1976	−0,2608	+0,2455	−0,0632	−0,2848	+0,5023
1,33	+0,1924	−0,2559	+0,2442	−0,0688	−0,2747	+0,5030
1,34	+0,1873	−0,2510	+0,2427	−0,0742	−0,2646	+0,5030
1,35	+0,1824	−0,2462	+0,2412	−0,0794	−0,2546	+0,5025
1,36	+0,1775	−0,2414	+0,2395	−0,0844	−0,2445	+0,5014
1,37	+0,1727	−0,2366	+0,2378	−0,0892	−0,2345	+0,4997
1,38	+0,1680	−0,2319	+0,2360	−0,0938	−0,2246	+0,4974
1,39	+0,1634	−0,2272	+0,2341	−0,0982	−0,2146	+0,4947
1,40	+0,1589	−0,2225	+0,2321	−0,1024	−0,2048	+0,4914
1,41	+0,1545	−0,2179	+0,2300	−0,1064	−0,1950	+0,4876
1,42	+0,1502	−0,2133	+0,2278	−0,1102	−0,1853	+0,4834
1,43	+0,1460	−0,2088	+0,2256	−0,1138	−0,1757	+0,4787
1,44	+0,1419	−0,2043	+0,2233	−0,1172	−0,1661	+0,4736
1,45	+0,1378	−0,1999	+0,2209	−0,1204	−0,1567	+0,4681
1,46	+0,1339	−0,1955	+0,2184	−0,1235	−0,1474	+0,4621
1,47	+0,1300	−0,1911	+0,2159	−0,1263	−0,1382	+0,4558
1,48	+0,1262	−0,1868	+0,2134	−0,1290	−0,1292	+0,4492
1,49	+0,1225	−0,1826	+0,2108	−0,1315	−0,1203	+0,4422
1,50	+0,1189	−0,1784	+0,2081	−0,1338	−0,1115	+0,4348

Продолжение табл. 19

x	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x):2$	$\Phi_3(x):4$	$\Phi_4(x):8$	$\Phi_5(x):16$	$\Phi_6(x):32$
1,50	+0,1189	—0,1784	+0,2081	—0,1338	—0,1115	+0,4348
1,51	+0,1154	—0,1743	+0,2054	—0,1359	—0,1029	+0,4272
1,52	+0,1120	—0,1702	+0,2027	—0,1379	—0,0944	+0,4193
1,53	+0,1086	—0,1662	+0,1999	—0,1397	—0,0861	+0,4112
1,54	+,01053	—0,1622	+0,1971	—0,1414	—0,0780	+0,4028
1,55	+0,1021	—0,1583	+0,1943	—0,1428	—0,0700	+0,3942
1,56	+0,0990	—0,1544	+0,1914	—0,1442	—0,0622	+0,3853
1,57	+0,0959	—0,1506	+0,1885	—0,1453	—0,0546	+0,3763
1,58	+0,0930	—0,1469	+0,1856	—0,1463	—0,0471	+0,3672
1,59	+0,0901	—0,1432	+0,1826	—0,1472	—0,0399	+0,3579
1,60	+0,0872	—0,1396	+0,1797	—0,1479	—0,0328	+0,3484
1,61	+0,0845	—0,1360	+0,1767	—0,1485	—0,0260	+0,3389
1,62	+0,0818	—0,1325	+0,1738	—0,1490	—0,0193	+0,3292
1,63	+0,0792	—0,1291	+0,1708	—0,1493	—0,0128	+0,3195
1,64	+0,0766	—0,1257	+0,1678	—0,1495	—0,0065	+0,3096
1,65	+0,0741	—0,1223	+0,1648	—0,1496	—0,0004	+0,2998
1,66	+0,0717	—0,1191	+0,1618	—0,1495	+0,0055	+0,2899
1,67	+0,0694	—0,1159	+0,1588	—0,1493	+0,0112	+0,2800
1,68	+0,0671	—0,1127	+0,1558	—0,1491	+0,0167	+0,2701
1,69	+0,0649	—0,1096	+0,1528	—0,1487	+0,0220	+0,2602
1,70	+0,0627	—0,1066	+0,1499	—0,1482	+0,0271	+0,2503
1,71	+0,0606	—0,1036	+0,1469	—0,1476	+0,0320	+0,2405
1,72	+0,0586	—0,1007	+0,1440	—0,1469	+0,0367	+0,2307
1,73	+0,0566	—0,0979	+0,1410	—0,1461	+0,0412	+0,2209
1,74	+0,0546	—0,0951	+0,1381	—0,1453	+0,0456	+0,2113
1,75	+0,0528	—0,0924	+0,1352	—0,1443	+0,0497	+0,2017
1,76	+0,0510	—0,0897	+0,1324	—0,1433	+0,0536	+0,1922
1,77	+0,0492	—0,0871	+0,1295	—0,1422	+0,0574	+0,1828
1,78	+0,0475	—0,0845	+0,1267	—0,1410	+0,0609	+0,1735
1,79	+0,0458	—0,0820	+0,1239	—0,1397	+0,0643	+0,1643
1,80	+0,0442	—0,0795	+0,1211	—0,1384	+0,0675	+0,1553
1,81	+0,0426	—0,0772	+0,1183	—0,1370	+0,0705	+0,1464
1,82	+0,0411	—0,0748	+0,1156	—0,1356	+0,0734	+0,1377
1,83	+0,0396	—0,0725	+0,1129	—0,1341	+0,0760	+0,1291
1,84	+0,0382	—0,0703	+0,1102	—0,1325	+0,0785	+0,1206
1,85	+0,0368	—0,0681	+0,1076	—0,1310	+0,0809	+0,1123
1,86	+0,0355	—0,0660	+0,1050	—0,1293	+0,0830	+0,1042
1,87	+0,0342	—0,0639	+0,1024	—0,1276	+0,0850	+0,0963
1,88	+0,0329	—0,0619	+0,0999	—0,1259	+0,0869	+0,0885
1,89	+0,0317	—0,0599	+0,0974	—0,1242	+0,0886	+0,0809
1,90	+0,0305	—0,0580	+0,0949	—0,1224	+0,0901	+0,0735
1,91	+0,0294	—0,0561	+0,0925	—0,1206	+0,0915	+0,0663
1,92	+0,0283	—0,0543	+0,0901	—0,1187	+0,0928	+0,0593
1,93	+0,0272	—0,0525	+0,0878	—0,1168	+0,0939	+0,0525
1,94	+0,0262	—0,0508	+0,0854	—0,1150	+0,0949	+0,0459
1,95	+0,0252	—0,0491	+0,0832	—0,1131	+0,0957	+0,0395
1,96	+0,0242	—0,0475	+0,0809	—0,1111	+0,0964	+0,0332
1,97	+0,0233	—0,0459	+0,0787	—0,1092	+0,0971	+0,0272
1,98	+0,0224	—0,0443	+0,0765	—0,1073	+0,0975	+0,0214
1,99	+0,0215	—0,0428	+0,0744	—0,1053	+0,0979	+0,0158
2,00	+0,0207	—0,0413	+0,0723	—0,1033	+0,0982	+0,0103

Продолжение табл. 19

x	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x):2$	$\Phi_3(x):4$	$\Phi_4(x):8$	$\Phi_5(x):16$	$\Phi_6(x):32$
2,00	+0,0207	—0,0413	+0,0723	—0,1033	+0,0982	+0,0103
2,01	+0,0199	—0,0399	+0,0703	—0,1014	+0,0983	+0,0051
2,02	+0,0191	—0,0385	+0,0683	—0,0994	+0,0984	+0,0001
2,03	+0,0183	—0,0372	+0,0663	—0,0974	+0,0983	—0,0047
2,04	+0,0176	—0,0359	+0,0644	—0,0955	+0,0982	—0,0094
2,05	+0,0169	—0,0346	+0,0625	—0,0935	+0,0980	—0,0138
2,06	+0,0162	—0,0334	+0,0606	—0,0916	+0,0976	—0,0180
2,07	+0,0155	—0,0322	+0,0588	—0,0896	+0,0972	—0,0221
2,08	+0,0149	—0,0310	+0,0571	—0,0877	+0,0968	—0,0259
2,09	+0,0143	—0,0299	+0,0553	—0,0857	+0,0962	—0,0296
2,10	+0,0137	—0,0288	+0,0536	—0,0838	+0,0956	—0,0331
2,11	+0,0132	—0,0277	+0,0520	—0,0819	+0,0949	—0,0364
2,12	+0,0126	—0,0267	+0,0504	—0,0800	+0,0941	—0,0396
2,13	+0,0121	—0,0257	+0,0488	—0,0781	+0,0933	—0,0424
2,14	+0,0116	—0,0248	+0,0472	—0,0763	+0,0924	—0,0452
2,15	+0,0111	—0,0238	+0,0457	—0,0745	+0,0915	—0,0478
2,16	+0,0106	—0,0229	+0,0442	—0,0726	+0,0905	—0,0502
2,17	+0,0102	—0,0221	+0,0428	—0,0708	+0,0895	—0,0525
2,18	+0,0097	—0,0212	+0,0414	—0,0691	+0,0884	—0 0546
2,19	+0,0093	—0,0204	+0,0401	—0,0673	+0,0873	—0,0566
2,20	+0,0089	—0,0196	+0,0387	—0,0656	+0,0861	—0,0584
2,21	+0,0085	—0,0189	+0,0374	—0,0638	+0,0850	—0,0601
2,22	+0,0082	—0,0181	+0,0362	—0,0622	+0,0837	—0,0616
2,23	+0,0078	—0,0174	+0,0349	—0,0605	+0,0825	—0,0630
2,24	+0,0075	—0,0167	+0,0337	—0,0589	+0,0812	—0,0642
2,25	+0,0071	—0,0161	+0,0326	—0,0573	+0,0799	—0,0653
2,26	+0,0068	—0,0154	+0,0315	—0,0557	+0,0786	—0,0663
2,27	+0,0065	—0,0148	+0,0304	—0,0541	+0,0773	—0,0672
2,28	+0,0062	—0,0142	+0,0293	—0,0526	+0,0759	—0,0680
2,29	+0,0060	—0,0136	+0,0283	—0,0511	+0,0746	—0,0686
2,30	+0,0057	—0,0131	+0,0273	—0,0496	+0,0732	—0,0691
2,31	+0,0054	—0,0125	+0,0263	—0,0481	+0,0718	—0,0696
2,32	+0,0052	—0,0120	+0,0253	—0,0467	+0,0704	—0,0699
2,33	+0,0050	—0,0115	+0,0244	—0,0453	+0,0690	—0,0701
2,34	+0,0047	—0,0111	+0,0235	—0,0440	+0,0676	—0,0703
2,35	+0,0045	—0,0106	+0,0226	—0,0426	+0,0662	—0,0703
2,36	+0,0043	—0,0102	+0,0218	—0,0413	+0,0648	—0,0703
2,37	+0,0041	—0,0097	+0,0210	—0,0400	+0,0634	—0,0702
2,38	+0,0039	—0,0093	+0,0202	—0,0388	+0,0620	—0,0700
2,39	+0,0037	—0,0089	+0,0194	—0,0376	+0,0606	—0,0697
2,40	+0,0036	—0,0085	+0,0187	—0,0364	+0,0592	—0,0694
2,41	+0,0034	—0,0082	+0,0180	—0,0352	+0,0578	—0,0690
2,42	+0,0032	—0,0078	+0,0173	—0,0340	+0,0564	—0,0685
2,43	+0,0031	—0,0075	+0,0166	—0,0329	+0,0551	—0,0680
2,44	+0,0029	—0,0071	+0,0160	—0,0318	+0,0537	—0,0674
2,45	+0,0028	—0,0068	+0,0154	—0,0308	+0,0524	—0,0668
2,46	+0,0027	—0,0065	+0,0147	—0,0297	+0,0510	—0,0661
2,47	+0,0025	—0,0062	+0,0142	—0,0287	+0,0497	—0,0654
2,48	+0,0024	—0,0060	+0,0136	—0,0278	+0,0484	—0,0646
2,49	+0,0023	—0,0057	+0,0131	—0,0268	+0,0471	—0,0638
2,50	+0,0022	—0,0054	+0,0125	—0,0259	+0,0459	—0,0630

Продолжение табл. 19

x	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x):2$	$\Phi_3(x):4$	$\Phi_4(x):8$	$\Phi_5(x):16$	$\Phi_6(x):32$
2,50	+0,0022	−0,0054	+0,0125	−0,0259	+0,0459	−0,0630
2,51	+0,0021	−0,0052	+0,0120	−0,0250	+0,0446	−0,0621
2,52	+0,0020	−0,0050	+0,0115	−0,0241	+0,0434	−0,0612
2,53	+0,0019	−0,0047	+0,0111	−0,0232	+0,0422	−0,0603
2,54	+0,0018	−0,0045	+0,0106	−0,0224	+0,0410	−0,0593
2,55	+0,0017	−0,0043	+0,0102	−0,0216	+0,0398	−0,0583
2,56	+0,0016	−0,0041	+0,0097	−0,0208	+0,0387	−0,0573
2,57	+0,0015	−0,0039	+0,0093	−0,0200	+0,0375	−0,0563
2,58	+0,0015	−0,0037	+0,0089	−0,0193	+0,0364	−0,0553
2,59	+0,0014	−0,0036	+0,0086	−0,0186	+0,0353	−0,0543
2,60	+0,0013	−0,0034	+0,0082	−0,0179	+0,0342	−0,0532
2,61	+0,0012	−0,0032	+0,0078	−0,0172	+0,0332	−0,0522
2,62	+0,0012	−0,0031	+0,0075	−0,0166	+0,0321	−0,0511
2,63	+0,0011	−0,0029	+0,0072	−0,0159	+0,0311	−0,0500
2,64	+0,0011	−0,0028	+0,0069	−0,0153	+0,0301	−0,0489
2,65	+0,0010	−0,0027	+0,0065	−0,0147	+0,0292	−0,0479
2,66	+0,0010	−0,0025	+0,0063	−0,0141	+0,0282	−0,0468
2,67	+0,0009	−0,0024	+0,0060	−0,0136	+0,0273	−0,0457
2,68	+0,0009	−0,0023	+0,0057	−0,0131	+0,0264	−0,0446
2,69	+0,0008	−0,0022	+0,0055	−0,0125	+0,0255	−0,0436
2,70	+0,0008	−0,0021	+0,0052	−0,0120	+0,0247	−0,0425
2,71	+0,0007	−0,0020	+0,0050	−0,0116	+0,0238	−0,0414
2,72	+0,0007	−0,0019	+0,0048	−0,0111	+0,0230	−0,0404
2,73	+0,0007	−0,0018	+0,0045	−0,0106	+0,0222	−0,0393
2,74	+0,0006	−0,0017	+0,0043	−0,0102	+0,0214	−0,0383
2,75	+0,0006	−0,0016	+0,0041	−0,0098	+0,0207	−0,0373
2,76	+0,0006	−0,0015	+0,0039	−0,0094	+0,0199	−0,0363
2,77	+0,0005	−0,0015	+0,0038	−0,0090	+0,0192	−0,0353
2,78	+0,0005	−0,0014	+0,0036	−0,0086	+0,0185	−0,0343
2,79	+0,0005	−0,0013	+0,0034	−0,0082	+0,0178	−0,0333
2,80	+0,0004	−0,0012	+0,0033	−0,0079	+0,0172	−0,0324
2,81	+0,0004	−0,0012	+0,0031	−0,0075	+0,0166	−0,0314
2,82	+0,0004	−0,0011	+0,0030	−0,0072	+0,0159	−0,0305
2,83	+0,0004	−0,0011	+0,0028	−0,0069	+0,0153	−0,0296
2,84	+0,0004	−0,0010	+0,0027	−0,0066	+0,0147	−0,0287
2,85	+0,0003	−0,0010	+0,0026	−0,0063	+0,0142	−0,0278
2,86	+0,0003	−0,0009	+0,0024	−0,0060	+0,0136	−0,0269
2,87	+0,0003	−0,0009	+0,0023	−0,0058	+0,0131	−0,0261
2,88	+0,0003	−0,0008	+0,0022	−0,0055	+0,0126	−0,0252
2,89	+0,0003	−0,0008	+0,0021	−0,0053	+0,0121	−0,0244
2,90	+0,0003	−0,0007	+0,0020	−0,0050	+0,0116	−0,0236
2,91	+0,0002	−0,0007	+0,0019	−0,0048	+0,0112	−0,0228
2,92	+0,0002	−0,0007	+0,0018	−0,0046	+0,0107	−0,0221
2,93	+0,0002	−0,0006	+0,0017	−0,0044	+0,0103	−0,0213
2,94	+0,0002	−0,0006	+0,0016	−0,0042	+0,0099	−0,0206
2,95	+0,0002	−0,0006	+0,0015	−0,0040	+0,0094	−0,0199
2,96	+0,0002	−0,0005	+0,0015	−0,0038	+0,0091	−0,0192
2,97	+0,0002	−0,0005	+0,0014	−0,0036	+0,0087	−0,0185
2,98	+0,0002	−0,0005	+0,0013	−0,0035	+0,0083	−0,0179
2,99	+0,0001	−0,0004	+0,0012	−0,0033	+0,0080	−0,0172
3,00	+0,0001	−0,0004	+0,0012	−0,0031	+0,0076	−0,0166

Таблица 20. Функции $e^{x^2}[1-\Phi(x)]$ и e^{-x^2}

x	$e^{x^2}[1-\Phi(x)]$		x	$e^{x^2}[1-\Phi(x)]$		x	$e^{x^2}[1-\Phi(x)]$		x	$e^{x^2}[1-\Phi(x)]$		x	e^{-x^2}
	0,1			0,1			0,13			0,12			0,
3,00	79001	— 540,5	3,50	55294	— 411,5	4,00	6999	— 322	4,50	2485	— 259	3,0	1234 098 (—3)
02	77920	534,5	52	54471	406,5	02	6355	319,5	52	1967	257	1	0670 548 (—3)
04	76851	528	54	53658	403	04	5716	316,5	54	1453	255	2	0357 128 (—3)
06	75795	522	56	52852	399	06	5083	313,5	56	0943	252,5	3	1864 374 (—4)
08	74751	516,5	58	52054	394,5	08	4456	311	58	0438	251	4	0954 016 (—4)
3,10	73718	— 510	3,60	51265	— 390,5	4,10	3834	— 308	4,60	*9936	— 248,5	3,5	0478 512 (—4)
12	72698	504,5	62	50484	387	12	3218	305	62	9439	246,5	6	2352 575 (—5)
14	71689	499	64	49710	383	14	2608	302,5	64	8946	245	7	1133 727 (—5)
16	70691	493,5	66	48944	379	16	2003	300	66	8456	242,5	8	0535 535 (—5)
18	69704	488	68	48186	375,5	18	1403	297,5	68	7971	240,5	9	2479 596 (—6)
3,20	68728	— 482,5	3,70	47435	— 372	4,20	0808	— 294,5	4,70	7490	— 239	4,0	1125 352 (—6)
22	67763	477	72	46691	368	22	0219	292	72	7012	237	1	0500 622 (—6)
24	66809	472	74	45955	364,5	24	*9635	289,5	74	6538	235	2	2182 958 (—7)
26	65865	467	76	45226	361	26	9056	286,5	76	6068	233	3	0933 029 (—7)
28	64931	462	78	44504	357,5	28	8483	284,5	78	5602	231,5	4	0390 894 (—7)
3,30	64007	— 456,5	3,80	43789	— 354	4,30	7914	— 282	4,80	5139	— 229	4,5	1605 228 (—8)
32	63094	452	82	43081	351	32	7350	279,5	82	4681	228,5	6	0646 143 (—8)
34	62190	447,5	84	42379	347,5	34	6791	277,5	84	4224	225,5	7	2549 382 (—9)
36	61295	442	86	41684	344	36	6236	274,5	86	3773	224,5	8	0985 951 (—9)
38	60411	438	88	40996	341	38	5687	272,5	88	3324	222,5	9	0373 757 (—9)
3,40	59535	— 433	3,90	40314	— 337,5	4,40	5142	— 270,5	4,90	2879	— 221	5,0	1388 794 (—10)
42	58669	428,5	92	39639	334,5	42	4601	268	92	2437	219		0,
44	57812	424	94	38970	331,5	44	4065	265,5	94	1999	217,5		
46	56964	420	96	38307	328,5	46	3534	263,5	96	1564	215,5		
48	56124	415	98	37650	325,5	48	3007	261	98	1133	214		
3,50	55294		4,00	36999		4,50	2485		5,00	0705			
	0,1			0,1			0,12			0,11			

Таблица 21. Функция $y=\int_0^x e^{t^2}\,dt$

x	y		x	y		x	y		x	y		x	y	
	0,			0,			1,							
0,00	0000	+ 100	0,40	4224	+ 118,5	0,80	0091	+ 193	1,20	2,141	+ 43,5	1,60	5,17	+ 13,5
02	0200	100	42	4461	120	82	0477	199	22	2,228	45	62	5,44	14,5
04	0400	100,5	44	4701	122,5	84	0875	206	24	2,318	48	64	5,73	15
06	0601	100,5	46	4946	125	86	1287	213	26	2,414	50	66	6,03	16,5
08	0802	100,5	48	5196	127	88	1713	221	28	2,514	53	68	6,36	17
0,10	1003	+ 101,5	0,50	5450	+ 129,5	0,90	215	+ 23	1,30	2,620	+ 55,5	1,70	6,70	+ 19
12	1206	101,5	52	5709	132,5	92	261	24	32	2,731	58,5	72	7,08	19,5
14	1409	102,5	54	5974	135,5	94	309	24,5	34	2,848	62	74	7,47	21,5
16	1614	103	56	6245	138,5	96	358	25,5	36	2,972	65,5	76	7,90	23
18	1820	103,5	58	6522	141,5	98	409	27	38	3,103	69	78	8,36	24,5
0,20	2027	+ 104,5	0,60	6805	+ 146	1,00	463	+ 27,5	1,40	3,241	+ 73	1,80	8,85	+ 26,5
22	2236	105,5	62	7095	149	02	518	29	42	3,387	77,5	82	9,38	28,5
24	2447	106,5	64	7393	152,5	04	576	30	44	3,542	81,5	84	9,95	31
26	2660	107,5	66	7698	156,5	06	636	31,5	46	3,705	87	86	10,57	33
28	2875	108,5	68	8011	161	08	699	33	48	3,879	92	88	11,23	35,5
0,30	3092	+ 110,5	0,70	8333	+ 165,5	1,10	765	+ 34	1,50	4,063	+ 98	1,90	11,94	+ 38,5
32	3313	111,5	72	8664	170,5	12	833	36	52	4,259	104	92	12,71	41,5
34	3536	113	74	9005	175,5	14	905	37,5	54	4,467	110,5	94	13,54	44,5
36	3762	114,5	76	9356	181	16	980	39,5	56	4,688	117,5	96	14,43	48,5
38	3991	116,5	78	9718	186,5	18	*059	41	58	4,923	125,5	98	15,40	52,5
0,40	4224		0,80	*0091		1,20	141		1,60	5,174		2,00	16,45	
	0,			1,			2,							

Таблица 22. Интеграл ошибок $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ **и его производная** $\varphi(x)$

x	$\Phi(x)$		$\varphi(x)$		x	$\Phi(x)$		$\varphi(x)$		x	$\Phi(x)$		$\varphi(x)$	
	0,		0,			0,		0,			0,9		0,0	
0,00	50000	+ 399	39894	— 4	1,00	84134	+ 240	24197	— 242	2,00	7725	+ 53	5399	— 106,5
02	50798	398,5	39886	12	02	84614	234,5	23713	241,5	02	7831	50,5	5186	103
04	51595	398,5	39862	20	04	85083	230	23230	241,5	04	7932	49	4980	100
06	52392	398	39822	27,5	06	85543	225	22747	241	06	8030	47	4780	97
08	53188	397,5	39767	36	08	85993	220	22265	240	08	8124	45	4586	94
0,10	53983	+ 396,5	39695	— 43,5	1,10	86433	+ 215,5	21785	— 239	2,10	8214	+ 43	4398	— 90,5
12	54776	395,5	39608	51,5	12	86864	211	21307	238	12	8300	41	4217	88
14	55567	394,5	39505	59	14	87286	206	20831	237	14	8382	39,5	4041	85
16	56356	393	39387	67	16	87698	201	20357	235,5	16	8461	38	3871	82,5
18	57142	392	39253	74,5	18	88100	196,5	19886	233,5	18	8537	36,5	3706	79,5
0,20	57926	+ 390	39104	— 82	1,20	88493	+ 192	19419	— 232,5	2,20	8610	+ 34,5	3547	— 76,5
22	58706	388,5	38940	89	22	88877	187	18954	230	22	8679	33	3394	74
24	59483	387	38762	97	24	89251	183	18494	228,5	24	8745	32	3246	71,5
26	60257	384,5	38568	103,5	26	89617	178	18037	226	26	8809	30,5	3103	69
28	61026	382,5	38361	111	28	89973	173,5	17585	224	28	8870	29	2965	66
0,30	61791	+ 380,5	38139	— 118	1,30	90320	+ 169	17137	— 221,5	2,30	8928	+ 27,5	2833	— 64
32	62552	377,5	37903	124,5	32	90658	165	16694	219	32	8983	26,5	2705	61,5
34	63307	375,5	37654	131,5	34	90988	160,5	16256	217	34	9036	25	2582	59,5
36	64058	372,5	37391	138	36	91309	156	15822	213,5	36	9086	24	2463	57
38	64803	369,5	37115	144	38	91621	151,5	15395	211	38	9134	23	2349	55
0,40	65542	+ 367	36827	— 150,5	1,40	91924	+ 148	14973	— 208,5	2,40	9180	+ 22	2239	— 52,5
42	66276	363,5	36526	156,5	42	92220	143,5	14556	205	42	9224	21	2134	50,5
44	67003	360,5	36213	162	44	92507	139	14146	202	44	9266	19,5	2033	48,5
46	67724	357,5	35889	168	46	92785	135,5	13742	199	46	9305	19	1936	47
48	68439	353,5	35553	173	48	93056	131,5	13344	196	48	9343	18	1842	44,5
0,50	69146	+ 350,5	35207	— 179	1,50	93319	+ 127,5	12952	— 193	2,50	93790	+ 1711	1753	— 43
52	69847	346,5	34849	183,5	52	93574	124	12566	189	52	94132	162,5!	1667	41
54	70540	343	34482	188,5	54	93822	120	12188	186	54	94457	154,5	1585	39,5
56	71226	339	34105	193,5	56	94062	116,5	11816	183	56	94766	147	1506	37,5
58	71904	335,5	33718	198	58	94295	112,5	11450	179	58	95060	139,5	1431	36,5
0,60	72575	+ 331	33322	— 202	1,60	94520	+ 109	11092	— 175,5	2,60	95339	+ 132,5	1358	— 34,5
62	73237	327	32918	206	62	94738	106	10741	172,5	62	95604	125,5	1289	31
64	73891	323	32506	210	64	94950	102	10396	168,5	64	95855	119	1223	31,5
66	74537	319	32086	213,5	66	95154	99	10059	165,5	66	96093	113	1160	30
68	75175	314,5	31659	217	68	95352	95,5	09728	161,5	68	96319	107	1100	29
0,70	75804	+ 310	31225	— 220	1,70	95543	+ 92,5	09405	— 158	2,70	96533	+ 101,5	1042	— 27,5
72	76424	305,5	30785	223	72	95728	89,5	09089	154,5	72	96736	96	0987	26
74	77035	301	30339	226	74	95907	86,5	08780	151	74	96928	91	0935	25
76	77637	296,5	29887	228	76	96080	83	08478	147,5	76	97110	86	0885	24
78	78230	292	29431	231	78	96246	80,5	08183	144	78	97282	81,5	0837	22,5
0,80	78814	+ 287,5	28969	— 232,5	1,80	96407	+ 77,5	07895	— 140,5	2,80	97445	+ 77	0792	— 22
82	79389	283	28504	235	82	96562	75	07614	136,5	82	97599	72,5	0748	20,5
84	79955	278	28034	236	84	96712	72	07341	133,5	84	97744	69	0707	19,5
86	80511	273	27562	238	86	96856	69,5	07074	130	86	97882	65	0668	18,5
88	81057	268,5	27086	238,5	88	96995	66,5	06814	126	88	98012	61	0631	18
0,90	81594	+ 263,5	26609	— 240	1,90	97128	+ 64,5	06562	— 123	2,90	98134	+ 58	0595	— 16,5
92	82121	259	26129	241	92	97257	62	06316	119,5	92	98250	54,5	0562	16
94	82639	254	25647	241,5	94	97381	59,5	06077	116,5	94	98359	51,5	0530	15,5
96	83147	249,5	25164	241,5	96	97500	57,5	05844	113	96	98462	48,5	0499	14,5
98	83646	244	24681	242	98	97615	55	05618	109,5	98	98559	45,5	0470	13,5
1,00	84134		24197		2,00	97725		05399		3,00	98650		0443	
	0,		0,			0,		0,			0,9		0,0	

2. Интегралы Френеля

Под *интегралами Френеля* подразумевают функции

$$C(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{z}}\cos t^2dt,$$

$$S(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{z}}\sin t^2dt.$$

Они связаны с интегралом ошибок равенствами

$$C(z)+iS(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\Phi(e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{z}),$$

$$C(z)-iS(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\Phi(e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{z}).$$

Далее очевидно

$$C\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)=\int_0^z\cos\frac{\pi}{2}t^2dt,\qquad S\left(\frac{\pi}{2}z^2\right)=\int_0^z\sin\frac{\pi}{2}t^2dt.$$

(Часто в литературе именно эти последние интегралы называются интегралами Френеля и обозначаются через $C(z)$, $S(z)$.)

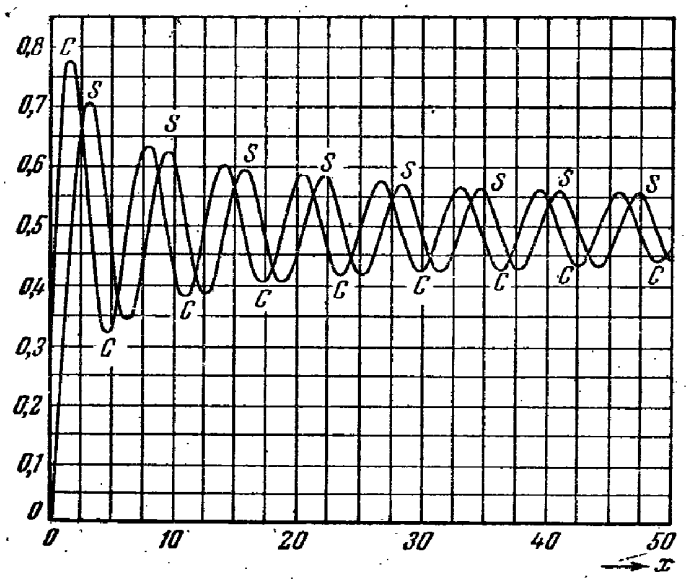


Рис. 32. Интегралы Френеля $C(x)$ и $S(x)$.

Обе функции, $C(z)$ и $S(z)$,— двулистные аналитические функции от z; точка $z=0$ является точкой ветвления. Вдоль действительной оси они принимают действительные значения, причем

$$C(0)=S(0)=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}C(x)=\lim_{x\to+\infty}S(x)=\frac{1}{2}$$

(рис. 32, таблицы 23, 24).

Разложения в степенные ряды вблизи нуля имеют вид

$$C(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(4k+1)\cdot(2k)!},\qquad S(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(4k+3)\,(2k+1)!}.$$

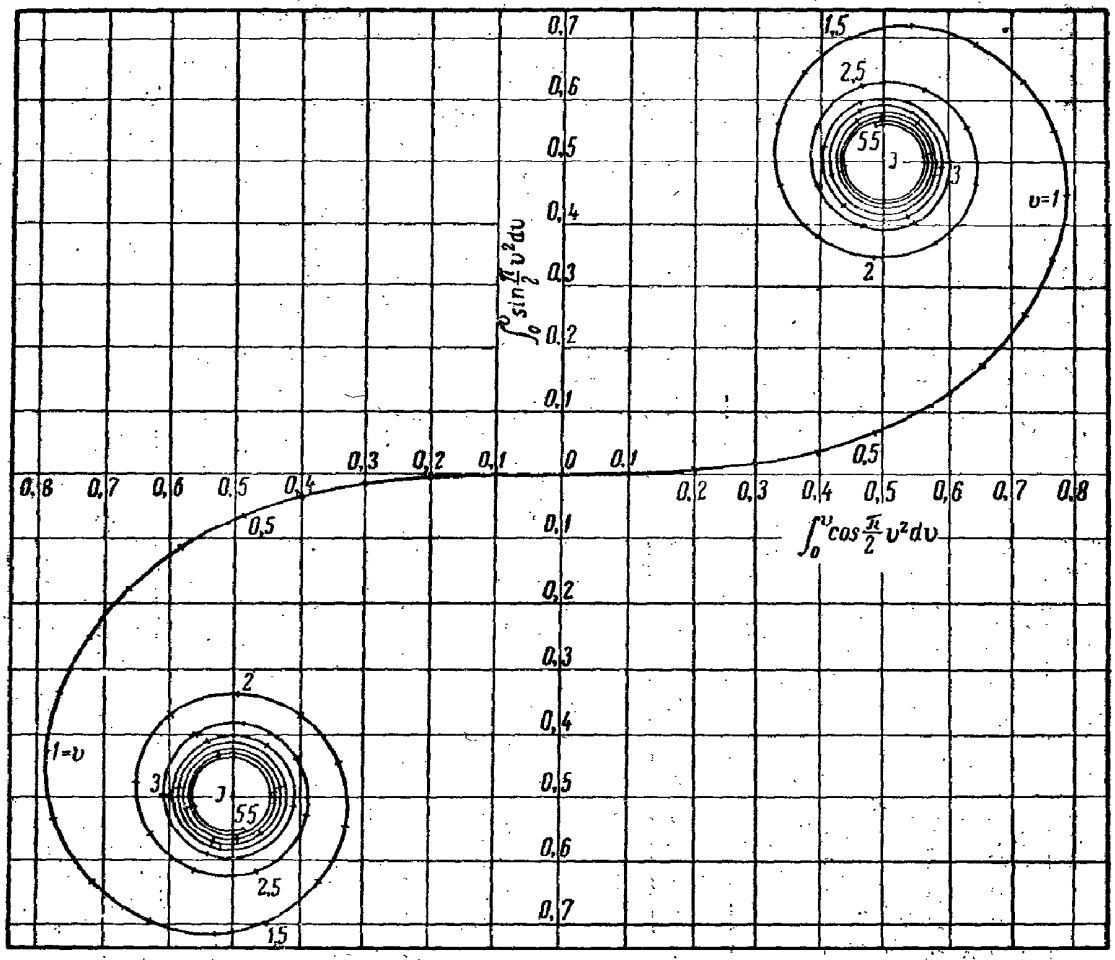


Рис. 33. Спираль Корню (клотоида).

Асимптотическое поведение этих функций для $|z|\gg 1$ в области $|\arg z|\leqslant \leqslant \pi-\varepsilon\,(\varepsilon>0)$ описывается формулами

$$C(z)\approx\frac{1}{2}+\frac{\sin z}{\sqrt{2\pi z}}\left(1-\frac{1\cdot3}{(2z)^2}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{(2z)^4}-\ldots\right)-\frac{\cos z}{\sqrt{2\pi z}}\left(\frac{1}{2z}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(2z)^3}+\ldots\right),$$

$$S(z)\approx\frac{1}{2}-\frac{\cos z}{\sqrt{2\pi z}}\left(1-\frac{1\cdot3}{(2z)^2}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{(2z)^4}-\ldots\right)-\frac{\sin z}{\sqrt{2\pi z}}\left(\frac{1}{2z}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(2z)^3}+\ldots\right),$$

и, следовательно, в качестве первого приближения можно брать:

$$C(z)\approx\frac{1}{2}+\frac{\sin z}{\sqrt{2\pi z}},\qquad S(z)\approx\frac{1}{2}-\frac{\cos z}{\sqrt{2\pi z}}.$$

В прямоугольной системе координат (C, S) кривая

$$C=C\left(\frac{\pi}{2}u^2\right),\qquad S=S\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)$$

(u — действительный параметр) представляет собой так называемую *спираль Корню* (*клотоиду*, рис. 33). Длина дуги от точки (0, 0) до точки, соответствующей

Таблица 23. Интегралы Френеля $C(x)$ и $S(x)$

x	$C(x)$		$S(x)$		x	$C(x)$		$S(x)$		x	$C(x)$		$S(x)$	
	0,		0,			0,		0,			0,		0,	
0.00	0000		0000	+ 4	1.0	7217	— 176	2476	+ 19	10.0	4370	+ 30	6084	— 41
02	0128		0008	6,5	2	7563	157	3153	— 4	2	4174	37	5928	38
04	1596		0021	9	4	7751	141	3826	25	4	4015	42	5737	28
06	1954		0039	10,5	6	7798	125	4475	43	6	3898	46	5521	17
08	2255		0060	12	8	7719	108	5081	59	8	3827	48	5288	— 7
0.10	2521	+ 119,5	0084	+ 13	2,0	7533	— 91	5628	— 73	11.0	3804	+ 48	5048	+ 2
12	2760	110	0110	14,5	2	7256	73	6103	83	2	3829	46	4810	12
14	2980	101,5	0139	15,5	4	6906	54	6495	91	4	3900	43	4584	21
16	3183	95,5	0170	16,5	6	6503	35	6797	95	6	4013	38	4378	28
18	3374	90	0203	17	8	6064	— 16	7005	96	8	4164	31	4201	35
0.20	3554	+ 85	0237	+ 18	3,0	5610	+ 2	7117	— 94	12.0	4346	+ 23	4058	+ 40
22	3724	81	0273	19	2	5158	19	7136	89	2	4550	15	3955	44
24	3886	77,5	0311	20	4	4725	35	7067	81	4	4769	+ 6	3895	45
26	6041	74	0351	20,5	6	4326	48	6918	70	6	4994	— 3	3880	45
28	4189	71	0392	21	8	3975	59	6698	58	8	5216	12	3910	43
0.30	4331	+ 68,5	0434	+ 22	4,0	3682	+ 67	6421	— 45	13.0	5425	— 20	3983	+ 40
32	4468	65,5	0478	22,5	2	3456	73	6099	30	2	5615	27	4095	35
34	4599	63,5	0523	23	4	3302	75	5747	— 15	4	5777	34	4241	28
36	4726	61	0569	24	6	3222	75	5380	0	6	5906	38	4415	21
38	4848	59	0617	24	8	3218	72	5013	+ 14	8	5997	41	4610	13
0.40	4966	+ 57	0665	+ 25	5,0	3285	+ 67	4659	+ 27	14.0	6047	— 43	4818	+ 4
42	5080	55,5	0715	25,5	2	3418	59	4333	39	2	6055	42	5030	— 4
44	5191	53,5	0766	25,5	4	3610	49	4045	49	4	6021	40	5238	12
46	5298	52	0817	26,5	6	3850	38	3805	56	6	5947	37	5433	20
48	5402	50	0870	27	8	4129	26	3621	62	8	5836	32	5609	27
0,50	5502	+ 49	0924	+ 27	6,0	4433	+ 13	3499	+ 64	15.0	5693	— 26	5758	— 32
52	5600	47,5	0978	28	2	4750	0	3440	65	2	5525	19	5875	37
54	5695	45,5	1034	28	4	5067	— 12	3445	62	4	5338	11	5956	39
56	5786	44,5	1090	28,5	6	5372	24	3512	58	6	5140	— 3	5998	40
58	5875	43,5	1147	29	8	5654	34	3637	51	8	4939	+ 5	5999	40
0,60	5962	+ 41,5	1205	+ 29	7,0	5901	— 43	3812	+ 43	16.0	4743	+ 13	5961	— 38
62	6045	41	1263	29,5	2	6106	50	4030	33	2	4560	20	5885	34
64	6127	39	1322	30	4	6261	55	4281	22	4	4396	26	5775	30
66	6205	38,5	1382	30,5	6	6362	57	4553	+ 11	6	4258	31	5636	24
68	6282	37	1443	30,5	8	6406	57	4837	— 1	8	4152	35	5473	17
0,70	6356	+ 36	1504	+ 31	8,0	6393	— 56	5120	— 12	17.0	4080	+ 38	5293	— 10
72	6428	34,5	1566	31	2	6325	51	5392	22	2	4046	39	5103	— 2
74	6497	34	1628	31,5	4	6206	46	5641	32	4	4050	38	4912	+ 6
76	6565	32,5	1691	31,5	6	6041	38	5859	39	6	4091	36	4726	13
78	6630	31,5	1754	32	8	5839	29	6038	46	8	4169	32	4553	20
0,80	6693	+ 30,5	1818	+ 32	9,0	6608	— 19	6172	— 50	18.0	4278	+ 28	4400	+ 24
82	6754	29,5	1882	32,5	2	5358	— 9	6256	52	2	4415	22	4272	31
84	6813	28,5	1947	32,5	4	5099	+ 2	6289	52	4	4574	15	4175	34
86	6870	28	2012	32,5	6	4841	12	6270	50	6	4748	8	4112	36
88	6926	26,5	2077	33	8	4595	21	6200	47	8	4930	+ 1	4084	37
0,90	6979	+ 25,5	2143	+ 33	10,0	4370	+ 30	6084	— 41	19,0	5113	— 6	4093	+ 36
92	7030	25	2209	33		0,		0,		2	5290	13	4139	34
94	7080	23,5	2275	33,5						4	5453	20	4217	31
96	7127	23	2342	33,5						6	5597	25	4327	26
98	7173	22	2409	33,5						8	5715	30	4462	20
1,00	7217		2476							20,0	5804	— 33	4616	+ 14
	0,		0,								0,		0,	

Продолжение табл. 23

x	$C(x)$	$S(x)$	x	$C(x)$	$S(x)$	x	$C(x)$	$S(x)$
	0,	0,		0,	0,		0,	0,
20,0	5804	4616	30,0	4279	4900	40,0	5475	5415
20,5	5878	5049	30,5	4420	4570	40,5	5217	5588
21,0	5738	5459	31,0	4700	4350	41,0	4909	5616
21,5	5423	5748	31,5	5048	4291	41,5	4627	5494
22,0	5012	5849	32,0	5379	4406	42,0	4439	5253
22,5	4607	5742	32,5	5613	4663	42,5	4390	4953
23,0	4307	5458	33,0	5694	4999	43,0	4490	4668
23,5	4181	5068	33,5	5605	5329	43,5	4713	4468
24,0	4256	4670	34,0	5370	5575	44,0	5004	4399
24,5	4511	4361	34,5	5049	5677	44,5	5290	4477
25,0	4879	4212	35,0	4720	5613	45,0	5502	4682
25,5	5269	4258	35,5	4464	5401	45,5	5590	4962
26,0	5586	4483	36,0	4342	5094	46,0	5533	5248
26,5	5755	4829	36,5	4382	4769	46,5	5347	5471
27,0	5738	5211	37,0	4571	4504	47,0	5078	5577
27,5	5541	5534	37,5	4863	4363	47,5	4793	5540
28,0	5217	5721	38,0	5184	4380	48,0	4562	5373
28,5	4846	5731	38,5	5456	4547	48,5	4439	5117
29,0	4518	5562	39,0	5613	4822	49,0	4455	4834
29,5	4314	5260	39,5	5620	5137	49,5	4603	4595
30,0	4279	4900	40,0	5475	5415	50,0	4847	4457
	0,	0,		0,	0,		0,	0,

Таблица 24. Интегралы Френеля $C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ и $S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$

x	$C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$		$S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$		x	$C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$		$S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$		x	$C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$		$S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$	
	0,		0,			0,		0,			0,		0,	
0,00	0000	+ 100	0000	0	1,25	6801	— 63	6587	— 76	2,50	4574	+ 12	6192	— 29
05	0500	100	0001	+ 6	30	6386	48	6863	91	52	4396	17	6101	27
10	1000	100	0005	8	35	5923	30	7050	102	54	4235	21	5983	26
15	1500	99,8	0018	12	40	5431	— 7	7135	110	56	4094	25	5842	21
20	1999	99,8	0042	16	45	4933	+ 18	7111	113	58	3978	28	5679	17
0,25	2498	+ 99,2	0082	+ 20	1,50	4453	+ 45	6975	— 110	2,60	3889	+ 30	5500	— 12
30	2994	98,6	0141	23	55	4018	72	6731	99	62	3831	32	5309	7
35	3487	97,6	0224	27	60	3655	97	6389	81	64	3805	33	5111	— 2
40	3975	96	0334	30	65	3388	118	5968	55	66	3812	33	4911	+ 4
45	4455	93,6	0474	34	70	3238	132	5492	— 23	68	3853	32	4715	10
0,50	4923	— 15	0647	+ 36	1,75	3219	+ 138	4994	+ 13	2,70	3925	+ 31	4529	+ 15
55	5377	20	0857	38	80	3336	133	4509	52	72	4028	28	4358	20
60	5811	25	1105	40	85	3584	116	4077	90	74	4158	24	4207	25
65	6219	31	1393	40	90	3945	87	3733	123	76	4313	20	4080	29
70	6597	38	1721	40	95	4391	+ 48	3511	147	78	4487	15	3982	32
0,75	6935	— 46	2089	+ 38	2,00	4883	0	3434	+ 159	2,80	4675	+ 9	3915	+ 34
80	7228	53	2493	34	05	5374	— 51	3513	155	82	4872	+ 3	3883	35
85	7469	61	2932	28	10	5816	100	3743	134	84	5072	— 4	3886	36
90	7648	68	3398	21	15	6159	141	4103	96	86	5268	10	3924	35
95	7760	74	3885	+ 12	20	6363	169	4557	+ 44	88	5454	16	3996	33
1,00	7799	— 79	4383	0	2,25	6401	— 178	5053	— 17	2,90	5624	— 22	4101	+ 29
05	7759	82	4880	— 13	30	6266	164	5532	80	92	5772	27	4235	25
10	7638	82	5365	28	35	5970	128	5931	137	94	5893	31	4394	20
15	7436	79	5821	44	40	5550	— 71	6197	178	96	5983	35	4572	16
20	7154	73	6234	60	45	5061	0	6289	195	98	6038	37	4764	+ 7
1,25	6801	— 63	6587	— 76	2,50	4574	+ 76	6192	— 184	3,00	6057	— 38	4963	0
	0,		0,			0,		0,			0,		0,	

Продолжение табл. 24

x	$C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$		$S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$		x	$C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$		$S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$		x	$C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$	$S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$
	0,		0,			0,		0,			0,	0,
3,00	6057	— 38	4963	0	4,00	4984	0	4205	+ 51	5,0	5636	4992
02	6038	37	5162	— 7	02	5182	— 13	4230	49	1	4998	5624
04	5982	36	5354	14	04	5368	25	4304	45	2	4299	4969
06	5891	32	5531	21	06	5528	35	4422	37	3	5078	4405
08	5767	28	5688	27	08	5654	44	4576	27	4	5572	5140
3,10	5616	— 22	5818	— 32	4,10	5737	— 50	4758	+ 15	5,5	4784	5537
12	5442	16	5917	36	12	5771	52	4955	+ 2	6	4517	4700
14	5253	9	5979	39	14	5753	51	5153	— 11	7	5385	4595
16	5054	— 1	6003	40	16	5684	47	5341	24	8	5298	5460
18	4855	+ 7	5988	39	18	5570	39	5504	36	9	4486	5163
3,20	4663	+ 15	5933	— 38	4,20	5417	— 28	5632	— 45	6,0	4995	4470
22	4486	22	5842	34	22	5236	16	5716	51	1	5495	5165
24	4331	29	5716	29	24	5040	— 2	5749	54	2	4676	5398
26	4204	34	5562	23	26	4841	+ 12	5730	52	3	4760	4555
28	4111	38	5385	15	28	4655	26	5658	48	4	5496	4965
3,30	4057	+ 41	5193	— 7	4,30	4494	+ 38	5540	— 39	6,5	4816	5454
32	4043	42	4994	+ 1	32	4371	47	5383	28	6	4690	4631
34	4071	41	4796	10	34	4295	53	5199	— 14	7	5467	4915
36	4139	38	4608	19	36	4270	55	5001	+ 1	8	4831	5436
38	4246	34	4439	26	38	4301	53	4804	16	9	4732	4624
3,40	4385	+ 27	4296	+ 33	4,40	4383	+ 47	4623	+ 30	7,0	5455	4997
42	4551	20	4186	38	42	4512	37	4471	42	1	4733	5360
44	4738	11	4114	42	44	4678	24	4360	51	2	4887	4573
46	4935	+ 2	4084	44	46	4868	+ 10	4299	56	3	5393	5189
48	5134	— 8	4097	43	48	5067	— 6	4293	56	4	4601	5161
3,50	5326	— 17	4152	+ 41	4,50	5260	— 22	4343	+ 53	7,5	5160	4607
52	5501	26	4249	36	52	5432	36	4444	45	6	5156	5389
54	5650	33	4381	30	54	5568	47	4590	33	7	4628	4820
56	5767	39	4543	22	56	5658	55	4768	18	8	5395	4896
58	5845	43	4727	13	58	5694	58	4964	+ 2	9	4760	5323
3,60	5880	— 45	4923	+ 3	4,60	5672	— 56	5162	— 14	8,0	4998	4602
62	5869	45	5122	— 7	62	5595	50	5346	30	1	5228	5320
64	5815	42	5314	18	64	5469	40	5500	43	2	4638	4859
66	5718	38	5489	27	66	5304	26	5611	53	3	5377	4932
68	5584	31	5637	35	68	5114	— 9	5670	59	4	4709	5243
3,70	5419	— 22	5750	— 39	4,70	4914	+ 8	5671	— 59	8,5	5142	4653
72	5233	12	5822	45	72	4723	25	5615	54	6	5025	5369
74	5036	— 1	5849	47	74	4557	40	5504	45	7	4827	4677
76	4837	+ 10	5830	46	76	4431	52	5350	31	8	5280	5229
78	4649	21	5764	43	78	4355	59	5166	— 14	9	4661	4886
3,80	4481	+ 31	5656	— 37	4,80	4338	+ 61	4968	+ 4	9,0	5354	4999
82	4343	39	5512	29	82	4380	57	4773	22	1	4666	5104
84	4244	45	5338	19	84	4479	48	4600	38	2	5291	4814
86	4189	48	5147	— 8	86	4624	35	4464	51	3	4763	5247
88	4182	49	4947	+ 4	88	4804	+ 18	4378	59	4	5180	4713
3,90	4223	+ 47	4752	+ 16	4,90	5002	— 1	4351	+ 62	9,5	4873	5310
92	4311	42	4573	27	92	5198	20	4384	59	6	5081	4679
94	4439	34	4420	36	94	5375	37	4476	50	7	4955	5325
96	4601	24	4303	44	96	5515	51	4618	37	8	5019	4676
98	4786	13	4230	49	98	5605	60	4795	20	9	4996	5321
4,00	4984	0	4205	+ 51	5,00	5636	— 63	4992	0	10,0	4999	4682
	0,		0,			0,		0,			0,	0,

значению u параметра, равна u, а кривизна $\varkappa$ в этой точке будет $\varkappa = \pi u$. Кривизна, следовательно, пропорциональна длине дуги.

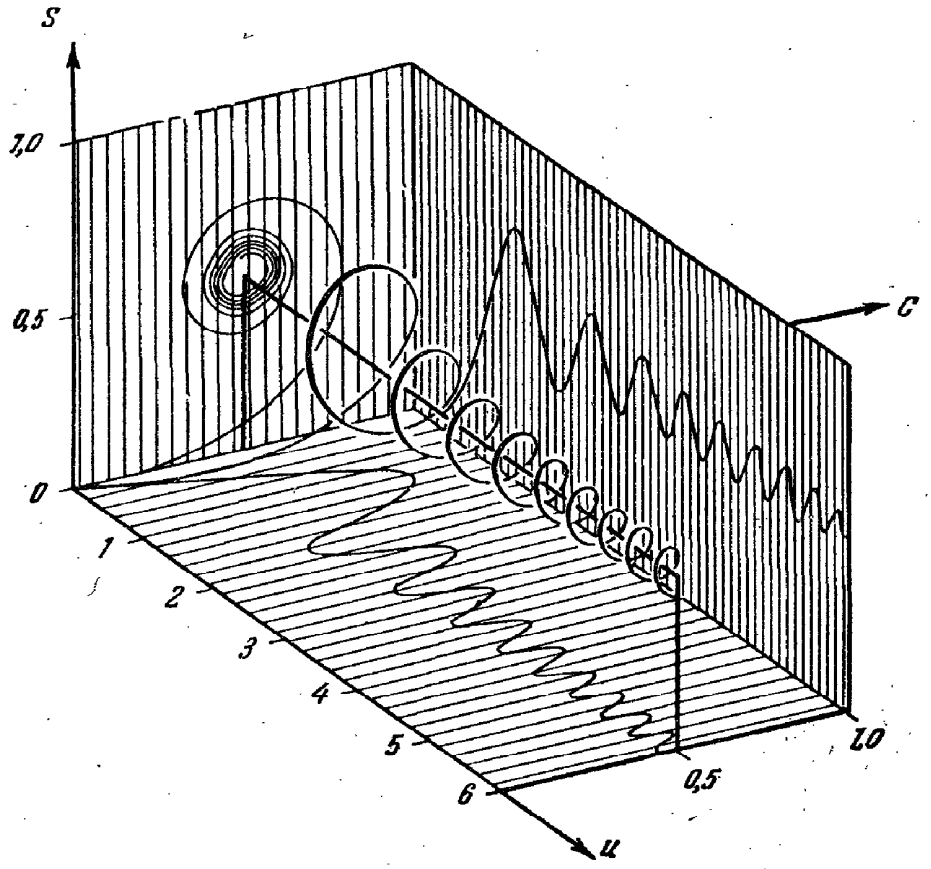


Рис. 34. Интегралы Френеля $C\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)$ и $S\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)$.

Если рассматривать u, $C\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)$, $S\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)$ как координаты в прямоугольной системе (u, C, S), то получим пространственную спираль (рис. 34), проекциями которой на три координатные плоскости будут спираль Корню и кривые $C = C\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)$, $S = S\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)$.

VIII. ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА

1. Определение и представления

В этом разделе n означает целое число, p — простое число; как всегда, $z = x + iy$

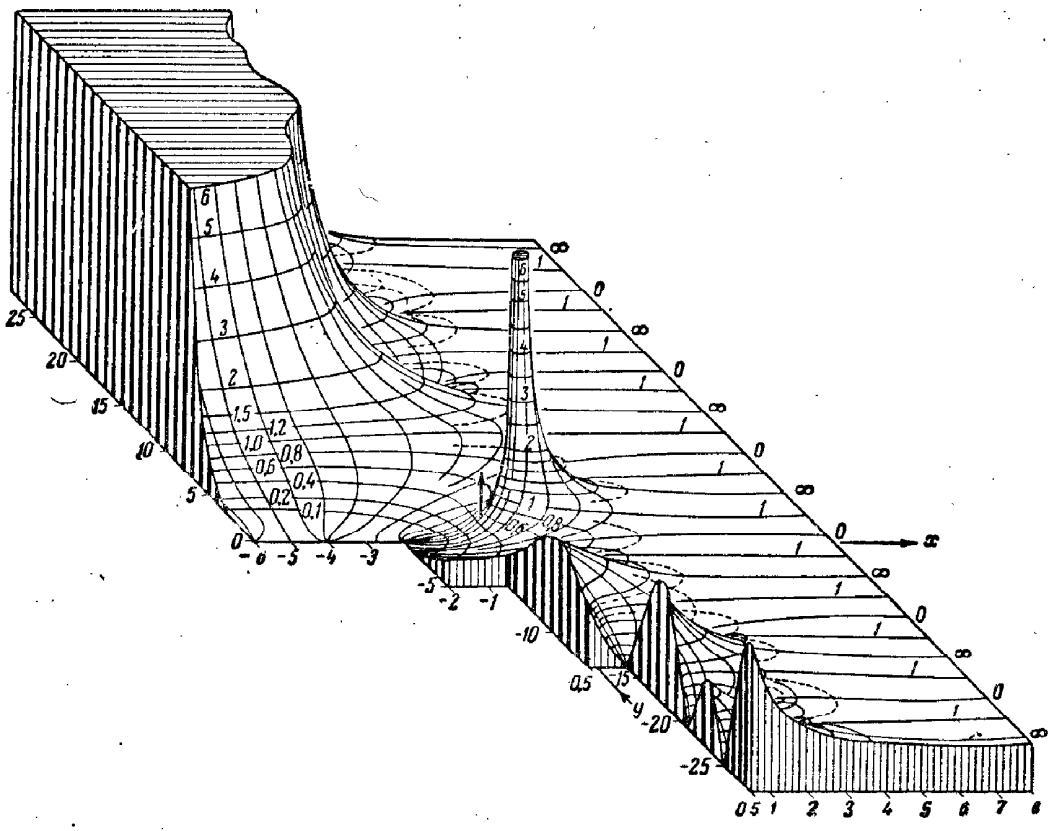


Рис. 35. Рельеф дзета-функции Римана $\zeta(z)$. Линии ската, обозначенные справа через 0, идут от нуля; обозначенные через ∞ — идут из бесконечности.

При $x > 1$ можно определить *дзета-функцию Римана* $\zeta(z)$ как

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_p (1 - p^{-z})^{-1},$$

где произведение распространено на все простые числа. Имеем:

$$\zeta(z)(1 - 2^{-z}) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \dots \qquad (x > 1),$$

и вообще

$$\zeta(z)(1-2^{-z})(1-3^{-z})\ldots:(1-p^{-z})=1+\sum_{n}{}' \frac{1}{n^z} \qquad (x>1),$$

где произведение в левой части распространено на все простые числа, не превосходящие p, а $\sum'$ означает суммирование только по тем значениям $n>p$, у которых все простые множители больше p.

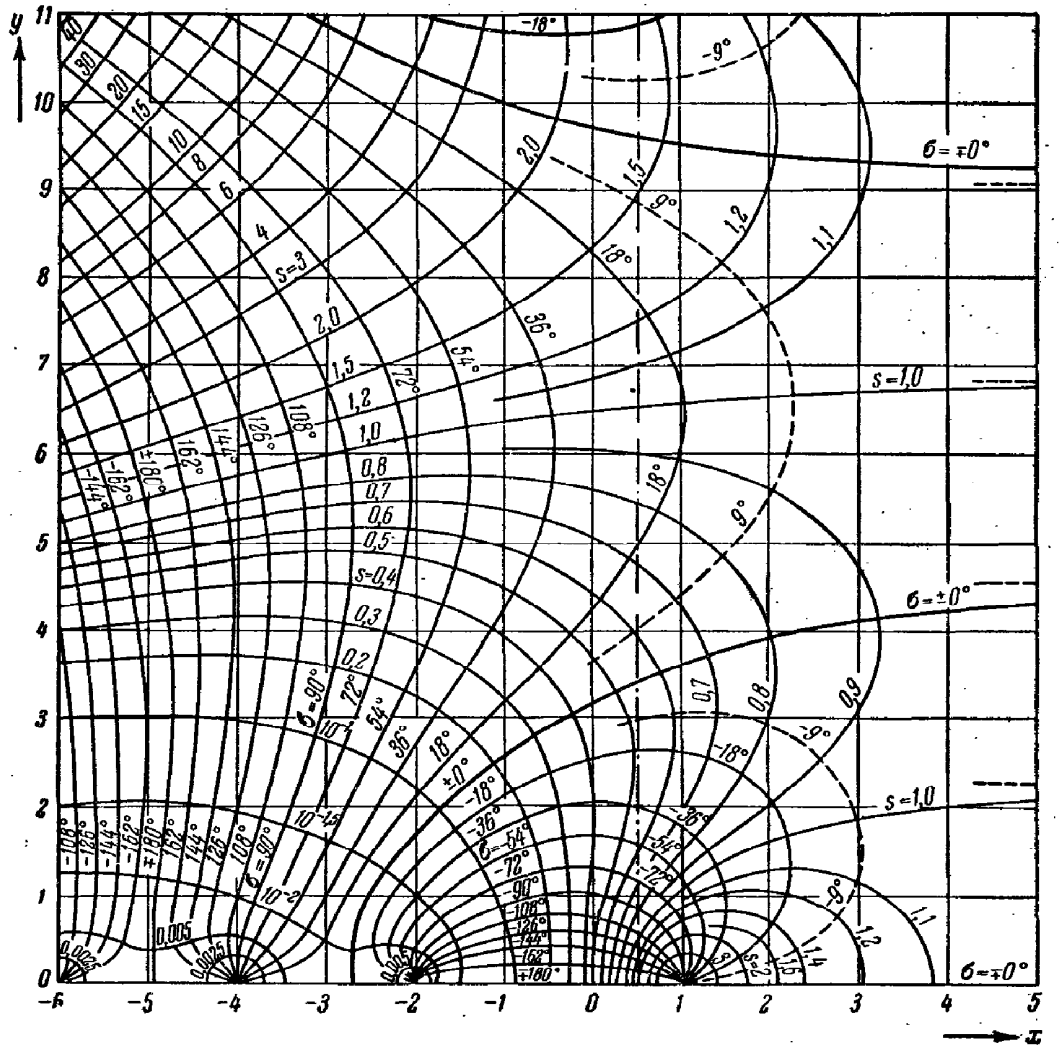


Рис. 36. Карта горизонталей рельефа дзета-функции Римана $\zeta(z)$.

[Эта функция аналитически продолжается на всю плоскость комплексного переменного z (рис. 35—37). Вдоль действительной оси функция $\zeta(x)$ принимает действительные значения (таблица 26).]

При $x>0$ справедливо представление

$$(1-2^{1-z})\zeta(z)=1-\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}-\frac{1}{4^z}+\ldots=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t+1}\,dt.$$

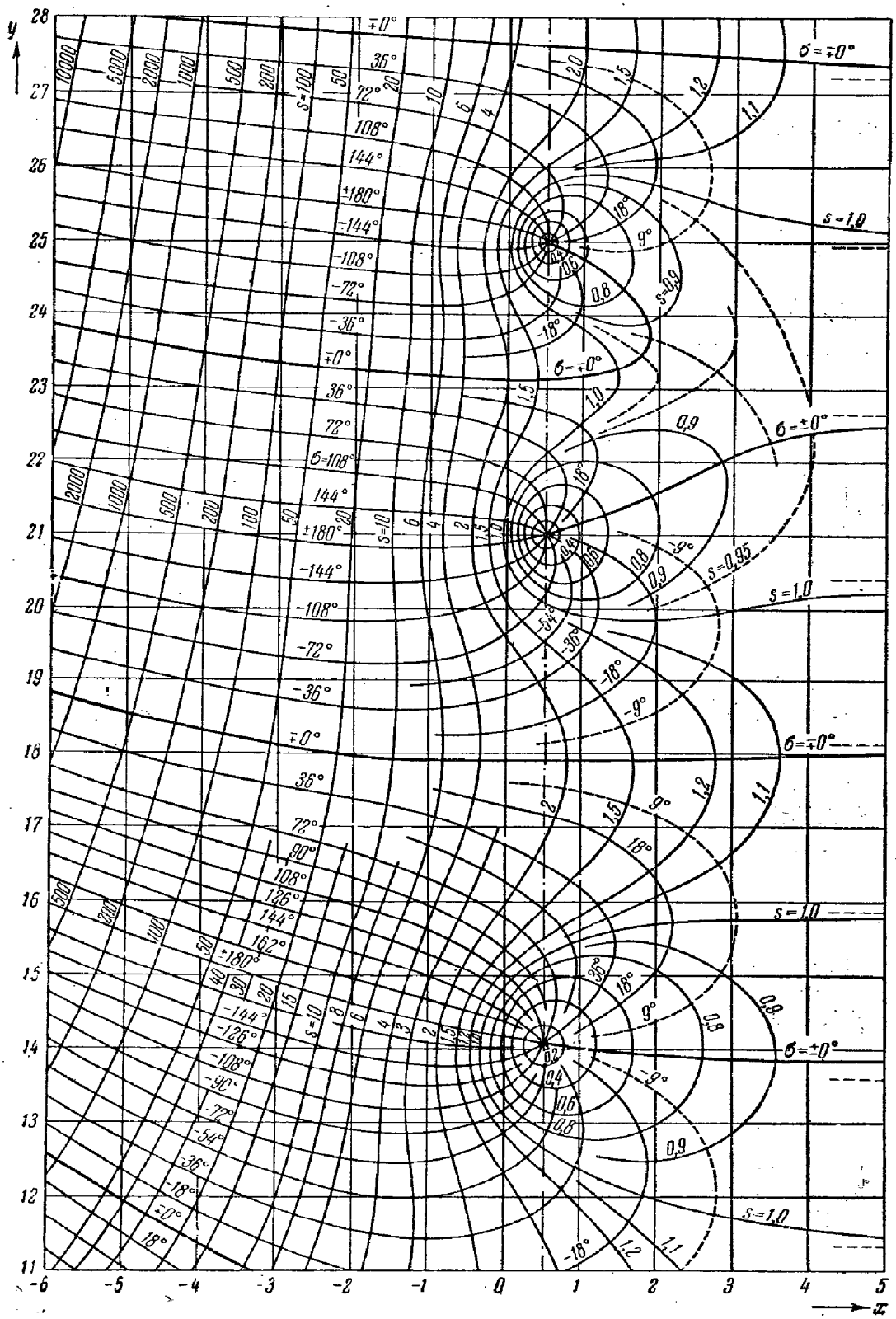


Рис. 37. Продолжение рис. 36 вверх.

При $|z| \ll 1$ особенно удобен для вычисления следующий ряд:

$$\zeta(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^z} + \frac{1}{z-1}\frac{1}{n^{z-1}} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^z} + \frac{1}{12}\frac{z}{n^{z+1}} - \frac{1}{720}\frac{z(z+1)(z+2)}{n^{z+3}} +$$

$$+ \frac{1}{30\,240}\frac{z(z+1)\ldots(z+4)}{n^{z+5}} - \frac{1}{1\,209\,600}\frac{z(z+1)\ldots(z+6)}{n^{z+7}} +$$

$$+ \frac{1}{47\,900\,160}\frac{z(z+1)\ldots(z+8)}{n^{z+9}} - \ldots$$

Если положим для краткости $z = \frac{1}{2} + it = 2u$, то функция

$$\Xi(t) = \frac{(2u-1)\,\Gamma(u+1)}{\pi^u}\,\zeta(2u) = \Xi(-t)$$

будет четной относительно t и имеет действительные коэффициенты в разложении по возрастающим степеням t^2. Нетривиальные нули ζ-функции, расположенные на прямой $x = \frac{1}{2}$, являются действительными корнями для функции $\Xi(t)$ (таблица 25).

2. Частные значения

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-2n) = 0,$$

$$\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}, \quad \zeta(2n) = (-1)^{n-1}2^{2n-1}\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}B_{2n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}.$$

[В точке $z = 1$ дзета-функция имеет полюс.]

3. Функциональные уравнения

$$\zeta(1+z) = \frac{2}{(2\pi)^z}\cos\frac{\pi z}{2}\,\Gamma(z)\,\zeta(z),$$

$$z(z+1)\frac{\zeta(z+2)\,\zeta(1-z)}{\zeta(z)\,\zeta(-1-z)} = -4\pi^2.$$

Таблица 25. **Нули $\frac{1}{2} + i\alpha_n$ дзета-функции Римана $\zeta(x)$**

n	α_n	n	α_n	n	α_n
1	14,134725	11	52,970	21	79,337
2	21,022040	12	56,446	22	82,910
3	25,010856	13	59,347	23	84,734
4	30,424878	14	60,833	24	87,426
5	32,935057	15	65,113	25	88,809
6	37,586176	16	67,080	26	92,494
7	40,918720	17	69,546	27	94,651
8	43,327073	18	72,067	28	95,871
9	48,005150	19	75,705	29	98,831
10	49,773832	20	77,145		

Таблица 26. Дзета-функция Римана $\zeta(x)$

x	$\zeta(x)$		$\zeta(-x)$	x	$\zeta(x)$		$\zeta(-x)$	x	$\zeta(x)$		$\zeta(-x)$
					+ 1,0				+1,000		
0,0	− 0,5000		− 0,5000	5,0	369	− 27	− 0,003968	10,0	995	− 68	0,00000
1	0,6030		0,4172	1	342	25	0,003867	1	927	62	+ 0,00199
2	0,7339		0,3497	2	317	24	0,003680	2	865	59	0,00413
3	0,9046		0,2938	3	293	21	0,003414	3	806	54	0,00641
4	1,135		0,2472	4	272	20	0,003076	4	752	51	0,00876
0,5	− 1,460		− 0,2079	5,5	252	− 18	− 0,002671	10,5	701	− 47	+ 0,01115
6	1,953		0,1746	6	234	17	0,002211	6	654	45	0,01349
7	2,778		0,1462	7	217	16	0,001703	7	609	41	0,01574
8	4,438		0,1220	8	201	14	0,001158	8	568	38	0,01781
9	− 9,430		0,1012	9	187	14	− 0,000586	9	530	36	0,01962
1,0	∞		− 0,08333	6,0	1736	− 123	0,000000	11,0	494	− 33	+ 0,02109
1	+ 10,584		0,06798	1	1611	115	+ 0,000590	1	461	31	0,02214
2	5,592		0,05479	2	1496	106	0,001171	2	430	29	0,02268
3	3,932		0,04346	3	1390	98	0,001732	3	401	27	0,02262
4	3,106		0,03376	4	1292	91	0,002261	4	374	25	0,02188
1,5	+ 2,612		− 0,02549	6,5	1201	− 85	+ 0,002747	11,5	349	− 24	+ 0,02040
6	2,286		0,01845	6	1116	78	0,003178	6	325	22	0,01810
7	2,054		0,01251	7	1038	73	0,003545	7	303	20	0,01493
8	1,882		0,00752	8	0965	67	0,003837	8	283	19	0,01086
9	1,750		− 0,00339	9	0898	63	0,004047	9	264	18	+ 0,00588
2,0	+ 1,645	− 85	0,000000	7,0	0835	− 58	+ 0,004167	12,0	2461	− 166	0,00000
1	1,560	69	+ 0,002729	1	0777	54	0,004191	1	2295	154	− 0,00675
2	1,491	59	0,004879	2	0723	50	0,004115	2	2141	144	0,01431
3	1,432	49	0,006519	3	0673	47	0,003936	3	1997	134	0,02256
4	1,383	42	0,007713	4	0626	43	0,003654	4	1863	125	0,03137
2,5	+ 1,341	− 36	+ 0,008517	7,5	0583	− 41	+ 0,003269	12,5	1738	− 117	− 0,04057
6	1,305	31	0,008982	6	0542	37	0,002785	6	1621	109	0,04994
7	1,274	27	0,009156	7	0505	35	0,002208	7	1512	102	0,05922
8	1,247	24	0,009081	8	0470	32	0,001544	8	1410	95	0,06811
9	1,223	21	− 0,008795	9	0438	30	+ 0,000804	9	1315	88	0,07627
3,0	+ 1,202	− 19	+ 0,008333	8,0	0408	− 28	0,000000	13,0	1227	− 82	− 0,08333
1	1,183	16	0,007729	1	0380	26	− 0,000854	1	1145	77	0,08888
2	1,167	15	0,007012	2	0354	25	0,001742	2	1068	72	0,09249
3	1,152	13	0,006209	3	0329	22	0,002645	3	0996	67	0,09371
4	1,139	12	0,005344	4	0307	21	0,003543	4	0929	62	0,09209
3,5	+ 1,127	− 11	+ 0,004441	8,5	0286	− 20	− 0,004416	13,5	0867	− 58	− 0,08718
6	1,116	10	0,003520	6	0266	18	0,005240	6	0809	55	0,07854
7	1,106	8	0,002599	7	0248	17	0,005992	7	0754	50	0,06579
8	1,098	8	0,001696	8	0231	15	0,006648	8	0704	47	0,04861
9	1,090	8	+ 0,000825	9	0216	15	0,007183	9	0657	45	− 0,02672
4,0	+ 1,0823	− 66	0,000000	9,0	02008	− 136	− 0,007576	14,0	0612	− 41	0,0000
1	1,0757	59	− 0,000768	1	01872	128	0,007802	1	0571	38	+ 0,0316
2	1,0698	55	0,001469	2	01744	118	0,007842	2	0533	36	0,0679
3	1,0643	50	0,002094	3	01626	111	0,007677	3	0497	33	0,1087
4	1,0593	46	0,002637	4	01515	102	0,007291	4	0464	31	0,1533
4,5	+ 1,0547	− 42	− 0,003092	9,5	01413	− 96	− 0,006672	14,5	0433	− 29	+ 0,2012
6	1,0505	38	0,003455	6	01317	90	0,005813	6	0404	27	0,2512
7	1,0467	36	0,003725	7	01227	83	0,004710	7	0377	26	0,3021
8	1,0431	32	0,003900	8	01144	77	0,003367	8	0351	23	0,3524
9	1,0399	30	0,003980	9	01067	72	− 0,001792	9	0328	22	0,4001
5,0	+ 1,0369		− 0,003968	10,0	00995		0,000000	15,0	0306		+ 0,4433
					+ 1,0				+1,000		

Продолжение табл. 26

x	$\zeta(x)$		$\zeta(-x)$	x	$\zeta(x)$		$\zeta(-x)$	x	$\zeta(x)$		$\zeta(-x)$
	1,0000				1,00000				1,000000		
15,0	306	— 21	+ 0,4433	18,0	382	— 26	0,000	21,0	477	— 32	— 281,5
1	285	19	0,4793	1	356	24	+ 1,525	1	445	30	314,5
2	266	18	0,5057	2	332	22	3,359	2	415	28	342,7
3	248	16	0,5193	3	310	21	5,505	3	387	26	363,5
4	232	15	0,5173	4	289	19	7,955	4	361	24	373,9
15,5	216	— 14	+ 0,4963	18,5	270	— 18	+ 10,69	21,5	337	— 22	— 370,3
6	202	14	0,4531	6	252	17	13,66	6	315	21	349,0
7	188	12	0,3846	7	235	16	16,82	7	294	20	305,8
8	176	12	0,2879	8	219	14	20,08	8	274	18	236,2
9	164	11	+ 0,1604	9	205	14	23,34	9	256	18	— 135,7
16,0	1528	— 102	0,0000	19,0	1908	— 128	+ 26,46	22,0	2385	— 160	0,0
1	1426	96	— 0,1945	1	1780	119	29,27	1	2225	149	+ 175,2
2	1330	89	0,4236	2	1661	111	31,59	2	2076	139	393,4
3	1241	83	0,6865	3	1550	104	33,19	3	1937	130	657,3
4	1158	78	0,9810	4	1446	97	33,81	4	1807	121	968,3
16,5	1080	— 72	— 1,303	19,5	1349	— 90	+ 33,17	22,5	1686	— 113	+ 1326
6	1008	68	1,648	6	1259	84	30,96	6	1573	105	1728
7	0940	63	2,006	7	1175	79	26,87	7	1468	99	2168
8	0877	58	2,369	8	1096	74	20,56	8	1369	91	2638
9	0819	55	2,723	9	1022	68	+ 11,71	9	1278	86	3123
17,0	0764	— 51	— 3,054	20,0	0954	— 64	0,00	23,0	1192	— 80	+ 3608
1	0713	48	3,343	1	0890	60	— 14,83	1	1112	74	4066
2	0665	45	3,569	2	0830	55	33,00	2	1038	70	4471
3	0620	41	3,710	3	0775	52	54,63	3	0968	65	4784
4	0579	39	3,739	4	0723	48	79,75	4	0903	60	4964
17,5	0540	— 36	— 3,630	20,5	0675	— 46	— 108,2	23,5	0843	— 56	+ 4960
6	0504	34	3,353	6	0629	42	139,7	6	0787	53	4715
7	0470	31	2,880	7	0587	39	173,7	7	0734	49	4167
8	0439	30	2,181	8	0548	37	209,5	8	0685	46	3246
9	0409	27	— 1,229	9	0511	34	245,9	9	0639	43	+ 1882
18,0	0382		0,000	21,0	0477		— 281,5	24,0	0596		0
	1,0000				1,00000				1,000000		

IX. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определения и обозначения

Эллиптическим интегралом называется интеграл вида

$$\int R(z, w)\, dz,$$

причем R — рациональная функция двух своих аргументов, а $w^2 = P(z)$, где $P(z)$ — полином 3-й или 4-й степени без кратных нулей.

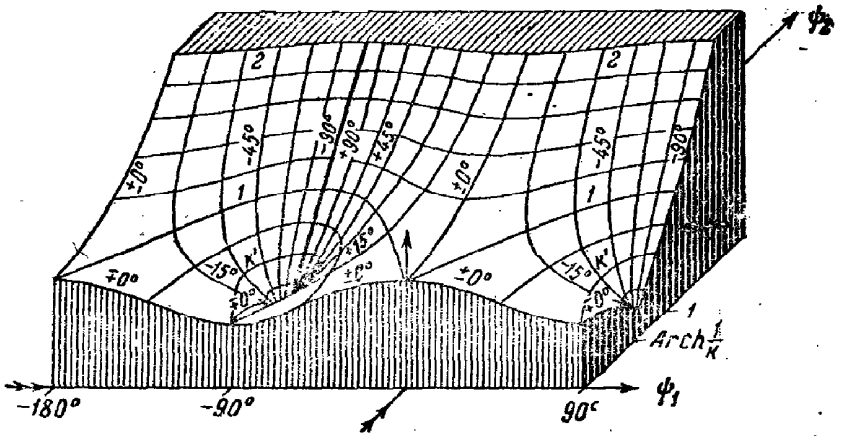


Рис. 38. Рельеф функции $\Delta(\psi, k)$ при $k = 0{,}8$. Точки ветвления $\pm\frac{\pi}{2} \pm i\,\mathrm{Arch}\,\frac{1}{k}$.

Следующие интегралы:

$$\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$\int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\, dt,$$

$$\int_0^z \frac{dt}{(1+nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

или, что то же, в тригонометрической форме ($z = \sin\varphi$, $t = \sin\psi$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$)

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}},$$

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}\, d\psi,$$

$$\Pi(\varphi, n, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{(1 + n\sin^2\psi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}$$

называются *неполными эллиптическими интегралами 1-го, 2-го и 3-го родов*

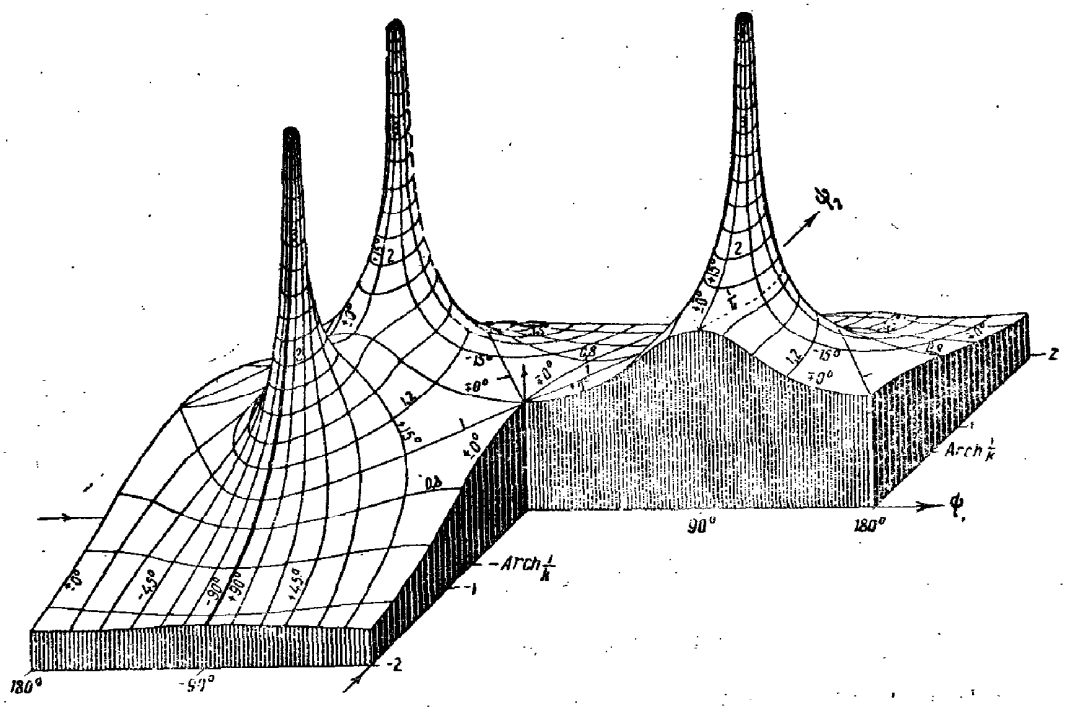


Рис. 39. Рельеф функции $\frac{1}{\Delta(\psi, k)}$ при $k = 0{,}8$. Точки ветвления $\pm\frac{\pi}{2} \pm i\,\mathrm{Arch}\,\frac{1}{k}$.

в нормальной форме Лежандра. Кроме того, еще вводят

$$D(\varphi, k) = \frac{F(\varphi, k) - E(\varphi, k)}{k^2} = \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}\, d\psi.$$

Число k называется *модулем* интегралов, число n — *параметром* интеграла 3-го рода. Для краткости положим

$$\Delta(\psi, k) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}$$

(рис. 38, 39), причем $\Delta(\psi, k) = 1$ в начале $\psi = 0$ пути интегрирования, и определим

$$k' = \sqrt{1 - k^2};$$

k' называется *дополнительным модулем*.

Если верхний предел интегрирования $\varphi=\frac{\pi}{2}$, то получаем ***полные эллиптические интегралы в нормальной форме***. Обозначают:

$$\mathsf{K}(k)=F\left[\frac{\pi}{2},\ k\right]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\Delta(\psi,\ k)}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$\mathsf{E}(k)=E\left[\frac{\pi}{2},\ k\right]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta(\psi,\ k)\,d\psi=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt,$$

$$\mathsf{D}(k)=\frac{\mathsf{K}-\mathsf{E}}{k^2}=D\left[\frac{\pi}{2},\ k\right]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\psi}{\Delta(\psi,\ k)}\,d\psi=\int_0^1\frac{t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,dt.$$

Нормальная форма полных интегралов, соответствующих дополнительному модулю k', обозначается так:

$$\mathsf{K}'(k)=\mathsf{K}(k'),\quad \mathsf{E}'(k)=\mathsf{E}(k').$$

A. ПРИВЕДЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ К НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

1. Общие замечания

Всякий эллиптический интеграл может быть представлен как линейная комбинация элементарных функций и интегралов 1-го, 2-го и 3-го родов в нормальной форме Лежандра. Для действительных эллиптических интегралов это представление *) можно произвести так, что модуль k в нормальных формах интегралов и параметр n в нормальной форме интегралов 3-го рода будут действительны и $0<k<1$. Верхний предел интегрирования φ может при этом лежать в промежутке $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$.

2. Приведение к нормальной форме действительных интегралов

2.1. Если преобразовать действительный эллиптический интеграл

$$\int R(x,\ \sqrt{a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4})\,dx$$

подходящим образом выбранной подстановкой

$$x=\frac{p+qt}{1+t}\quad(\text{если } a_0\neq 0)\quad\text{или}\quad x=t^2-r\quad(\text{если } a_0=0)$$

к виду

$$\int R^*(t,\ \sqrt{\pm(t^2-\lambda)(t^2-\mu)})\,dt,$$

то во многих случаях можно привести его к нормальной форме с помощью следующей вспомогательной таблицы. Она содержит в первом и последнем

*) Формулы, необходимые в различных возможных случаях, можно найти в удобной для вычислений форме, например, в книгах: P. F. Byrd and M. D. Friedman, Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1954; F. Tricomi, Funzioni Ellittiche, Bologna, 1951; J. Houël, Recueil de formules et de tables numériques, Paris, 1901.

столбцах эллиптические интегралы, равные соответственно $\frac{1}{c}F(\varphi, k)$ или $mE(\varphi, k)$, причем модуль $k=\frac{a}{c}$, а значения φ и m находятся из средних столбцов (числа a, b, c связаны соотношением $a^2+b^2=c^2$).

$$a^2+b^2=c^2, \quad k=\frac{a}{c}, \quad k'=\frac{b}{c}$$

$\frac{1}{c}F(\varphi, k)$	φ	m	$mE(\varphi, k)$
$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(b^2+t^2)(c^2+t^2)}}$	$\operatorname{tg}\varphi=\frac{x}{b}$	$\frac{c}{b^2}$	$\int_0^x \sqrt{\frac{c^2+t^2}{(b^2+t^2)^3}}\,dt$
$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(b^2+t^2)(c^2+t^2)}}$	$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{x}{c}$	$\frac{1}{c}$	$\int_x^{+\infty} \sqrt{\frac{b^2+t^2}{(c^2+t^2)^3}}\,dt$
$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(b^2+t^2)}}$	$\frac{\sin\varphi}{\Delta(\varphi, k)}=\frac{cx}{ab}$	$\frac{1}{b^2c}$	$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(b^2+t^2)^3}}$
$\int_x^a \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(b^2+t^2)}}$	$\cos\varphi=\frac{x}{a}$	c	$\int_x^a \sqrt{\frac{b^2+t^2}{a^2-t^2}}\,dt$
$\int_b^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2-b^2)}}$	$\cos\varphi=\frac{b}{x}$	$\frac{c}{b^2}$	$\int_b^x \sqrt{\frac{t^2+a^2}{t^2-b^2}}\frac{dt}{t^2}$
$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2-b^2)}}$	$\frac{\Delta(\varphi, k)}{\sin\varphi}=\frac{x}{c}$	$\frac{1}{c}$	$\int_x^{+\infty} \frac{t^2dt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3(t^2-b^2)}}$
$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(c^2-t^2)}}$	$\sin\varphi=\frac{x}{a}$	c	$\int_0^x \sqrt{\frac{c^2-t^2}{a^2-t^2}}\,dt$
$\int_x^a \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(c^2-t^2)}}$	$\frac{\cos\varphi}{\Delta(\varphi, k)}=\frac{x}{a}$	$\frac{1}{b^2c}$	$\int_x^a \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(c^2-t^2)^3}}$
$\int_b^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2-b^2)(c^2-t^2)}}$	$\Delta(\varphi, k)=\frac{b}{x}$	$\frac{1}{b^2c}$	$\int_b^x \frac{dt}{t^2\sqrt{(t^2-b^2)(c^2-t^2)}}$
$\int_x^c \frac{dt}{\sqrt{(t^2-a^2)(t^2-c^2)}}$	$\Delta(\varphi, k)=\frac{x}{c}$	c	$\int_x^c \frac{t^2dt}{\sqrt{(t^2-b^2)(c^2-t^2)}}$
$\int_c^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2-a^2)(t^2-c^2)}}$	$\frac{\Delta(\varphi, k)}{\cos\varphi}=\frac{x}{c}$	$\frac{c}{b^2}$	$\int_c^x \frac{t^2dt}{\sqrt{(t^2-a^2)^3(t^2-c^2)}}$
$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-a^2)(t^2-c^2)}}$	$\sin\varphi=\frac{c}{x}$	$\frac{1}{c}$	$\int_x^{+\infty} \sqrt{\frac{t^2-a^2}{t^2-c^2}}\frac{dt}{t^2}$

2.2. Первый столбец приводимой ниже вспомогательной таблицы дает некоторые эллиптические интегралы, равные $mF(\varphi, k)$ при соответствующих значениях φ, k, m.

$mF(\varphi, k)$	φ	k	m
$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$	$\cos\varphi=\frac{x-1-\sqrt{3}}{x-1+\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=0{,}2588190=\sin 15°$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}=0{,}7598357$
$\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$	$\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}+1-x}{\sqrt{3}-1+x}$		
$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$	$\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}-1+x}{\sqrt{3}+1-x}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=0{,}9659258=\sin 75°$	
$\int_{-\infty}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$	$\cos\varphi=\frac{1-x-\sqrt{3}}{1-x+\sqrt{3}}$		
$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$	$\operatorname{tg}\varphi=(\sqrt{2}+1)\frac{1-x}{1+x}$	$2(\sqrt{2}-1)\sqrt[4]{2}=0{,}9851714=\sin 80°,\ 12070$	$2-\sqrt{2}=0{,}5857864$
$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$	$\cos\varphi=\frac{x^2-1}{x^2+1}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}7071068=\sin 45°$	$\frac{1}{2}$
$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$	$\cos\varphi=\frac{1-x^2}{1+x^2}$		
$\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}$	$\cos\varphi=\frac{1}{x}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$	$\cos\varphi=x$		

2.3. Следующие интегралы могут быть выражены через F, E и D (все от аргументов φ, k):

$$\int_0^\varphi \frac{\cos^2\psi}{\Delta(\psi, k)}\,d\psi=F-D, \quad \int_0^\varphi \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\Delta(\psi, k)}\,d\psi=\frac{\Delta(\varphi, k)\operatorname{tg}\varphi-E}{k'^2},$$

$$\int_0^\varphi \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k)\cos^2\psi}=\frac{\Delta(\varphi, k)\operatorname{tg}\varphi+k^2(D-F)}{k'^2}, \quad \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\Delta^3(\psi, k)}=\frac{E}{k'^2}-\frac{k^2}{k'^2}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi, k)},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\psi}{\Delta^3(\psi, k)}\,d\psi=\frac{F-D}{k'^2}-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{k'^2\Delta(\varphi, k)}, \quad \int_0^\varphi \frac{\cos^2\psi}{\Delta^3(\psi, k)}\,d\psi=D+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi, k)},$$

$$\int_0^\varphi \Delta(\psi, k)\operatorname{tg}^2\psi\,d\psi=\Delta(\varphi, k)\operatorname{tg}\varphi+F-2E.$$

В. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА НЕПОЛНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Представления

1.1. Неполный эллиптический интеграл 1-го рода $F(\varphi, k)$ (рис. 40—44) и неполный эллиптический интеграл 2-го рода $E(\varphi, k)$ (рис. 45—48) допускают

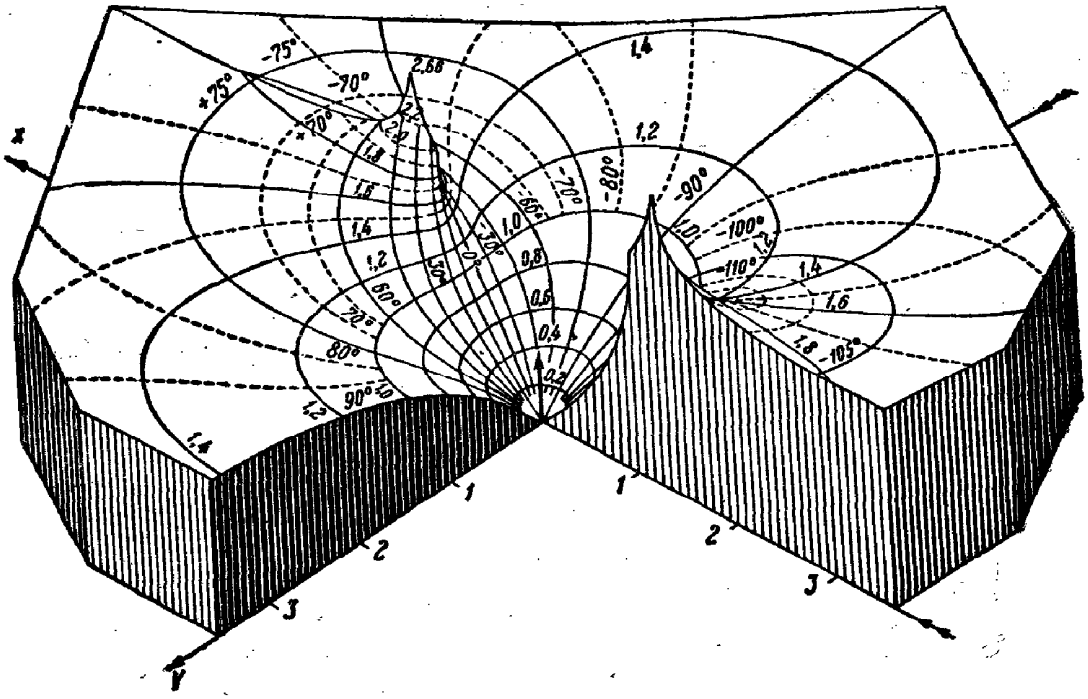


Рис. 40. Рельеф функции $F(\varphi, k)$ при $k=0{,}8$ над плоскостью $x+iy=\sin\varphi$.

следующие представления в действительной области:

$$F(\varphi, k)=\int_0^{\sin\varphi}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=\int_{\cos\varphi}^{1}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2+k^2t^2)}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\sin^2\varphi}\frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{(1-t)(1-k^2t)}}=\int_{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}^{1}\frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{k'^2(1+t^2)+2(1+k^2)t}}=$$

$$=\int_0^{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{1+t^2+2(k'^2-k^2)t}}=\int_1^{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}\frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{k'^2(1+t^2)+2(1+k^2)t}};$$

$$E(\varphi, k)=\int_0^{\sin\varphi}\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt=\int_{\cos\varphi}^{1}\sqrt{\frac{k'^2+k^2t^2}{1-t^2}}\,dt=$$

$$=\int_0^{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}\frac{\sqrt{1+t^2+2(k'^2-k^2)}}{(1+t)^2\sqrt{t}}\,dt=\int_1^{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}\sqrt{2(1+k^2)+k'^2\left(t+\frac{1}{t}\right)}\,\frac{dt}{(1+t)^2}=$$

$$=\int_{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}^{1}\sqrt{2(1+k^2)+k'^2\left(t+\frac{1}{t}\right)}\,\frac{dt}{(1+t)^2}.$$

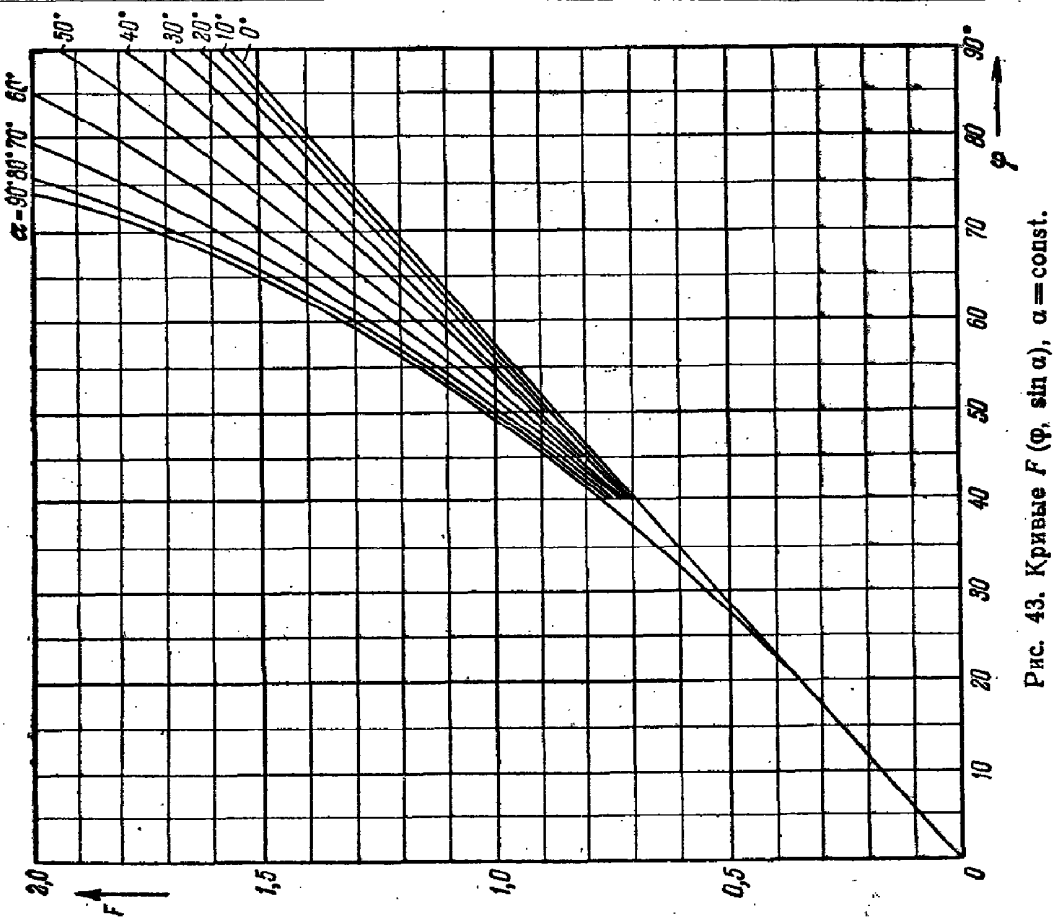


Рис. 43. Кривые $F(\varphi, \sin\alpha)$, $\alpha = \text{const}$.

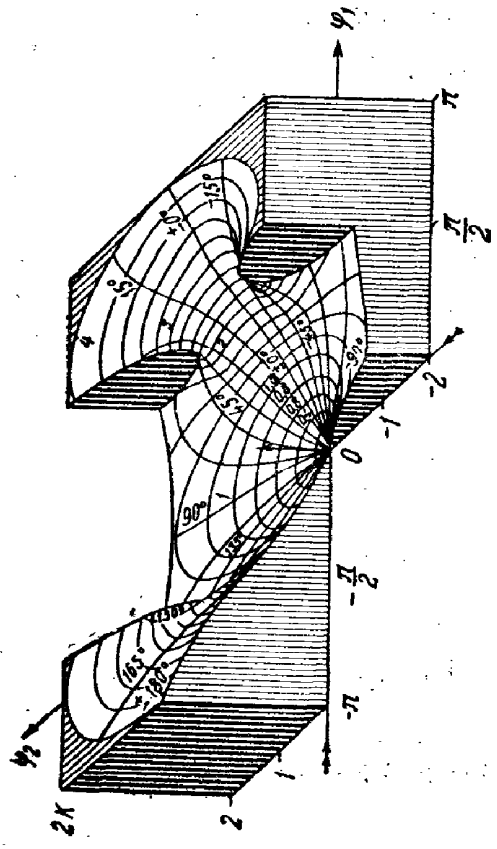


Рис. 41. Рельеф первой ветви функции $F(\varphi, k)$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, при $k = 0{,}8$.

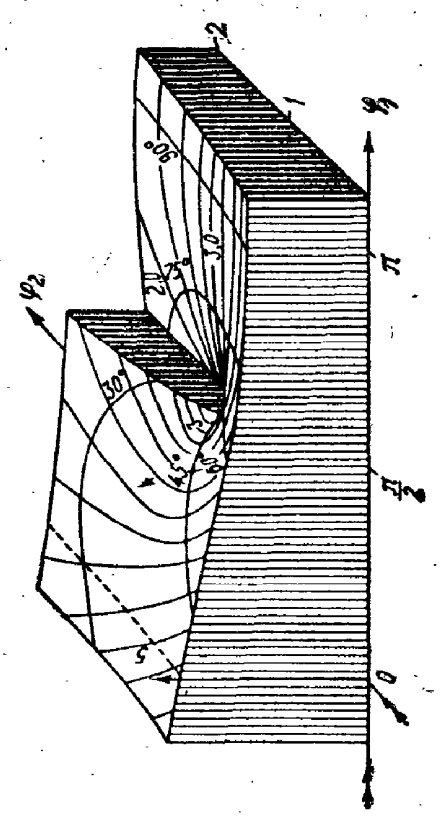


Рис. 42. Рельеф второй ветви функции $F(\varphi, k)$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, при $k = 0{,}8$.

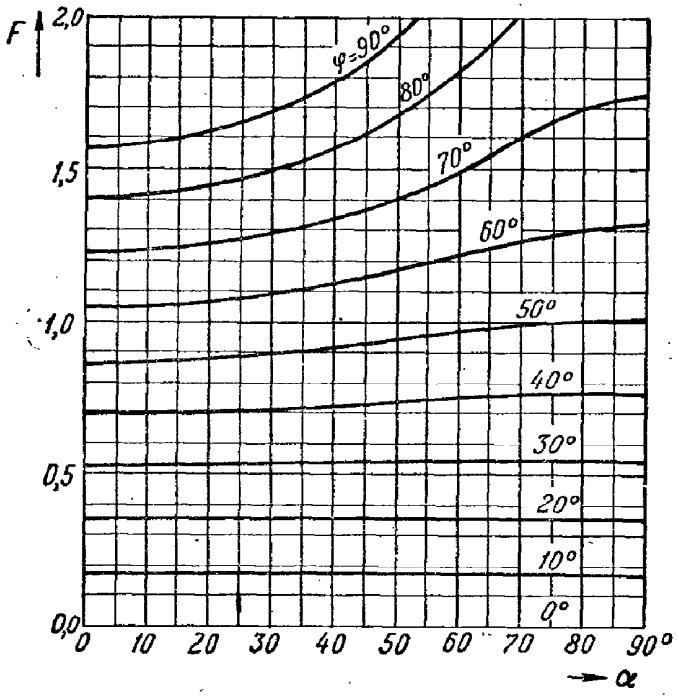


Рис. 44. Кривые $F(\varphi, \sin\alpha)$, $\varphi = \text{const}$.

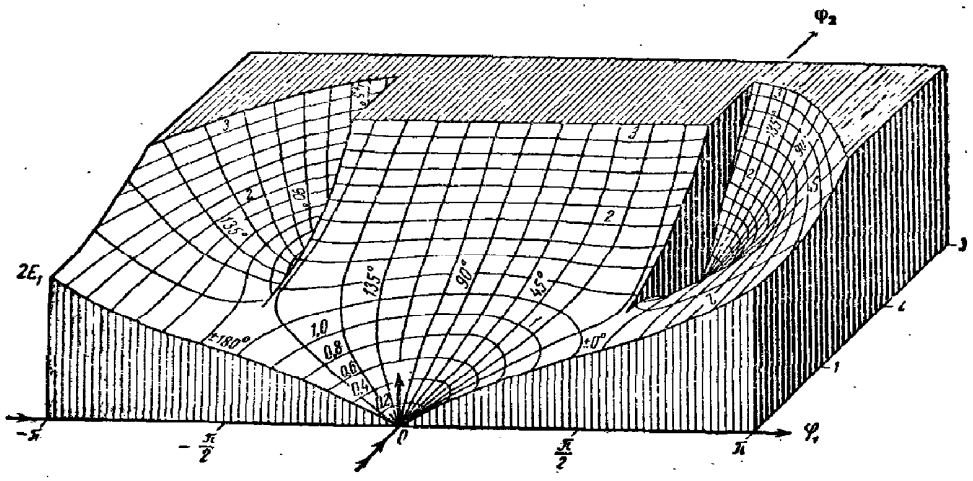


Рис. 45. Рельеф первой ветви функции $E(\varphi, k)$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, при $k = 0{,}8$.

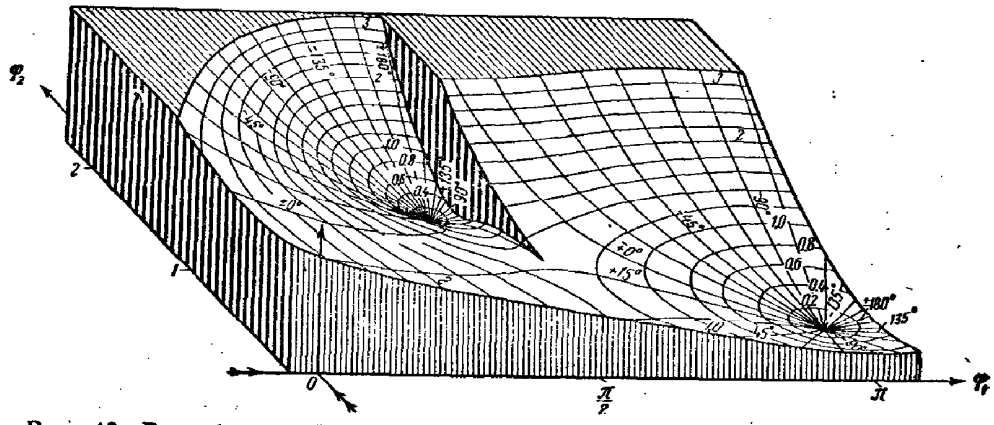


Рис. 46. Рельеф второй ветви функции $E(\varphi, k)$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, при $k = 0{,}8$.

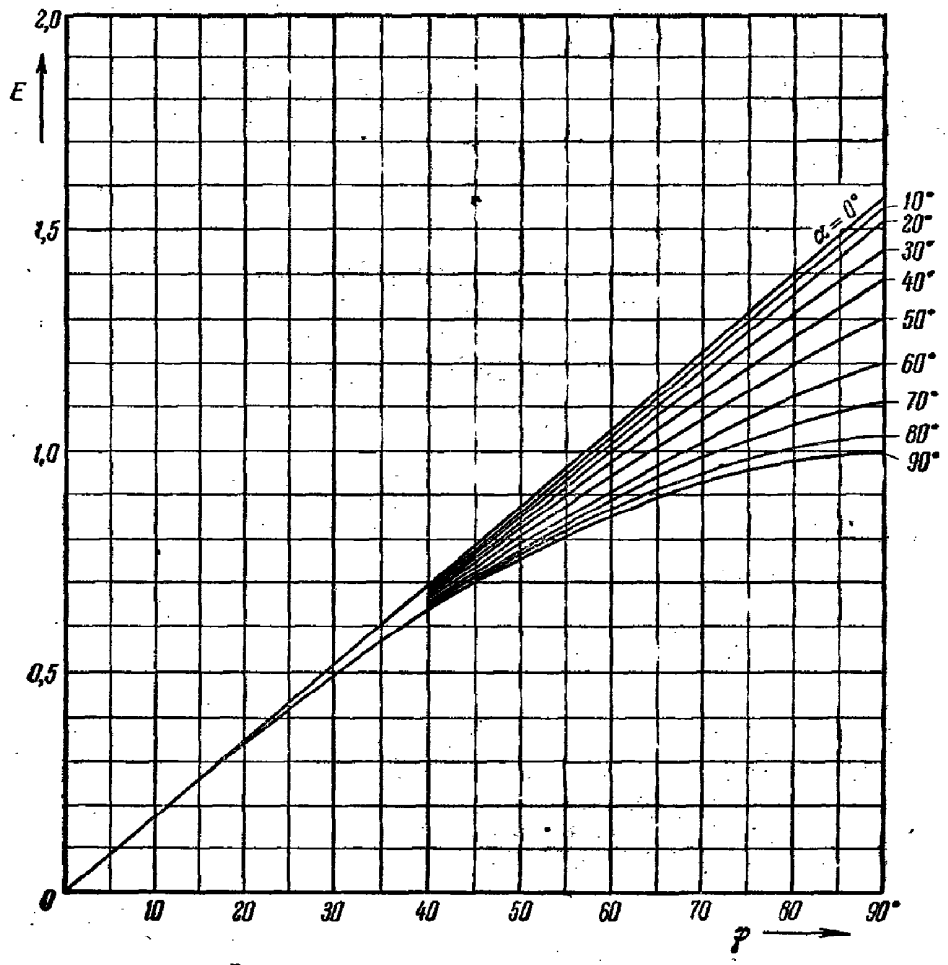


Рис. 47. Кривые $E(\varphi, \sin\alpha)$, $\alpha=\text{const}$.

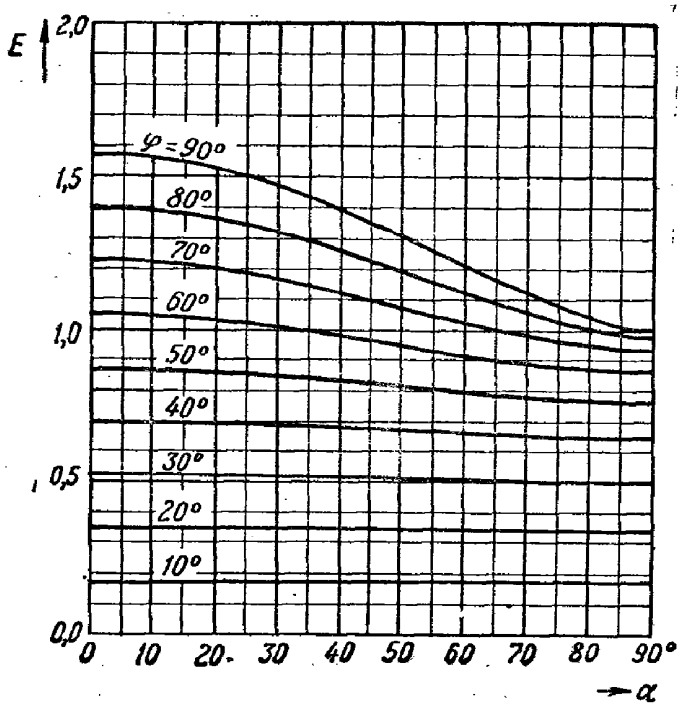


Рис. 48. Кривые $E(\varphi, \sin\alpha)$, $\varphi=\text{const}$.

Таблица 27. **Неполный эллиптический интеграл 1-го рода $F(\varphi, k)$**

φ	$\alpha = 0°$		$\alpha = 5°$		$\alpha = 10°$		$\alpha = 15°$		$\alpha = 20°$		$\alpha = 25°$		$\alpha = 30°$	
	0,		0,		0,		0,		0,		0,		0,	
0°	00000	+ 1745,5	00000	+ 1745,5	00000	+ 1745,5	00000	+ 1745,5	00000	+ 1745,5	00000	+ 1745,5	00000	+ 1745,5
2°	03491	1745	03491	1745	03491	1745	03491	1745,5	03491	1745,5	03491	1745,5	03491	1746
4°	06981	1745,5	06981	1745,5	06981	1746	06982	1745,5	06982	1746	06982	1746,5	06983	1747
6°	10472	1745,5	10472	1745,5	10473	1745,5	10473	1746,5	10474	1747	10475	1748	10477	1748,5
8°	13963	1745	13963	1745,5	13964	1746	13966	1746,5	13968	1748	13971	1749	13974	1750,5
10°	1745	+ 174,5	1745	+ 175	1746	+ 174,5	1746	+ 174,5	1746	+ 175	1747	+ 175	1748	+ 175
12°	2094	174,5	2095	174,5	2095	174,5	2095	175	2096	175	2097	175,5	2098	176
14°	2443	175	2444	174,5	2444	175	2445	175	2446	175,5	2448	175,5	2450	176
16°	2793	174,5	2793	174,5	2794	174,5	2795	175	2797	175,5	2799	176	2802	176
18°	3142	174,5	3142	174,5	3143	175	3145	175	3148	175,5	3151	176	3154	177
20°	3491	+ 174,5	3491	+ 174,5	3493	+ 174,5	3495	+ 175,5	3499	+ 176	3503	+ 176,5	3508	+ 177,5
22°	3840	174,5	3840	175	3842	175	3846	175,5	3851	176	3856	177	3863	178
24°	4189	174,5	4190	174,5	4192	175	4197	175,5	4203	176,5	4210	177,5	4219	178,5
26°	4538	174,5	4539	174,5	4542	175,5	4548	175,5	4556	176,5	4565	178	4576	179
28°	4887	174,5	4888	175	4893	175	4899	176	4909	177	4921	178	4934	180
30°	5236	+ 174,5	5238	+ 174,5	5243	+ 175	5251	+ 176	5263	+ 177	5277	+ 179	5294	+ 181
32°	5585	174,5	5587	175	5593	175,5	5603	176,5	5617	178	5635	179,5	5656	181
34°	5934	174,5	5937	174,5	5944	175,5	5956	176,5	5973	178	5994	179,5	6018	182,5
36°	6283	174,5	6286	175	6295	175,5	6309	176,5	6329	178	6353	180,5	6383	183
38°	6632	174,5	6636	174,5	6646	175,5	6662	177	6685	179	6714	181	6749	183,5
40°	6981	+ 174,5	6985	+ 175	6997	+ 175,5	7016	+ 177	7043	+ 179	7076	+ 182	7116	+ 185
42°	7330	174,5	7335	175	7348	176	7370	177,5	7401	179,5	7440	182	7486	185,5
44°	7679	175	7685	174,5	7700	176	7725	177,5	7760	180	7804	183	7857	186,5
46°	8029	174,5	8034	175	8052	175,5	8080	178	8120	180	8170	183,5	8230	188
48°	8378	174,5	8384	175	8403	176,5	8436	178	8480	181	8537	184	8606	188
50°	8727	+ 174,5	8734	+ 175	8756	+ 176	8792	+ 178	8842	+ 181	8905	+ 185	8982	+ 189,5
52°	9076	174,5	9084	175	9108	176	9148	178,5	9204	181,5	9275	185,5	9361	190,5
54°	9425	174,5	9434	175	9460	176,5	9505	178,5	9567	181,5	9646	186	9742	191,5
56°	9774	174,5	9784	175	9813	176,5	9862	178,5	9930	182,5	*0018	186,5	*0125	192
58°	*0123	174,5	*0134	175	*0166	176,5	*0219	179	*0295	182,5	0391	187,5	0509	193,5
60°	0472	+ 174,5	0484	+ 175	0519	+ 176,5	0577	+ 179,5	0660	+ 183	0766	+ 187,5	0896	+ 194
62°	0821	174,5	0834	175	0872	176,5	0936	179,5	1026	183	1141	188,5	1284	195
64°	1170	174,5	1184	175	1225	177	1295	179,5	1392	183,5	1518	189	1674	195,5
66°	1519	174,5	1534	175	1579	176,5	1654	179,5	1759	184	1896	189,5	2065	196,5
68°	1868	174,5	1884	175	1932	177	2013	180	2127	184	2275	190	2458	197,5
70°	2217	+ 174,5	2234	+ 175,5	2286	+ 177	2373	+ 180	2495	+ 184,5	2655	+ 190,5	2853	+ 198
72°	2566	174,5	2585	175	2640	177	2733	180	2864	185	3036	190,5	3249	199
74°	2915	175	2935	175	2994	177	3093	180,5	3234	186,5	3417	191,5	3647	199
76°	3265	174,5	3285	175,5	3348	177	3454	180	3603	185,5	3800	191,5	4045	200
78°	3614	174,5	3636	175	3702	177	3814	180,5	3974	185	4183	191,5	4445	200,5
80°	3963	+ 174,5	3986	+ 175	4056	+ 177,5	4175	+ 180,5	4344	+ 185,5	4566	+ 192	4846	+ 200,5
82°	4312	174,5	4336	175,5	4411	177	4536	180,5	4715	185,5	4950	192,5	5247	201
84°	4661	174,5	4687	175	4765	177,5	4897	181	5086	185,5	5335	192,5	5649	201,5
86°	5010	174,5	5037	175,5	5120	177	5259	180,5	5457	186	5720	192,5	6052	201
88°	5359	174,5	5388	175	5474	177	5620	180,5	5829	185,5	6105	192,5	6454	202
90°	5708		5738		5828		5981		6200		6490		6858	
	1,		1,		1,		1,		1,		1,		1,	

Продолжение табл. 27

φ	$\alpha = 35°$		$\alpha = 40°$		$\alpha = 45°$		$\alpha = 50°$		$\alpha = 55°$		$\alpha = 60°$	
	0,		0,		0,		0,					
0°	00000	+ 1745,5	00000	+ 1745,5	00000	+ 1745,5	00000	+ 1745,5	0,00000	+ 1745,5	0,00000	+ 1745,5
2°	03491	1746	03491	1746,5	03491	1746,5	03491	1747	0,03491	1747	0,03491	1747,5
4°	06983	1747,5	06984	1748	06984	1749	06985	1749	0,06985	1750	0,06986	1750
6°	10478	1750	10480	1750,5	10482	1751,5	10483	1753	0,10485	1754	0,10486	1755,5
8°	13978	1752	13981	1754,5	13985	1756,5	13989	1758	0,13993	1760	0,13997	1761,5
10°	1748	+ 175,5	1749	+ 176	1750	+ 176	1751	+ 176	0,1751	+ 177	0,1752	+ 177
12°	2099	176	2101	176	2102	177	2103	177,5	0,2105	177,5	0,2106	178
14°	2451	176,5	2453	177,5	2456	177,5	2458	178	0,2460	178,5	0,2462	179
16°	2804	177,5	2808	177,5	2811	178	2814	179	0,2817	180	0,2820	180,5
18°	3159	177,5	3163	178,5	3167	179,5	3172	180,5	0,3177	181	0,3181	182
20°	3514	+ 178,5	3520	+ 179,5	3526	+ 180,5	3533	+ 181,5	0,3539	+ 182,5	0,3545	+ 183,5
22°	3871	179	3879	180	3887	181,5	3896	182,5	0,3904	184	0,3912	185,5
24°	4229	179,5	4239	181,5	4250	183	4261	184,5	0,4272	186,5	0,4283	187,5
26°	4588	181	4602	182,5	4616	184,5	4630	186,5	0,4645	188	0,4658	190
28°	4950	181,5	4967	183,5	4985	185,5	5003	188	0,5021	190	0,5038	192
30°	5313	+ 183	5334	+ 185	5356	+ 187,5	5379	+ 190	0,5401	+ 192,5	0,5422	+ 195
32°	5679	183,5	5704	186,5	5731	189	5759	192	0,5786	195	0,5812	198
34°	6046	185	6077	187,5	6109	191	6143	194	0,6176	197,5	0,6208	201
36°	6416	186	6452	189,5	6491	193	6531	197	0,6571	201	0,6610	204,5
38°	6788	187	6831	191	6877	195	6925	199	0,6973	203,5	0,7019	208,5
40°	7162	+ 188,5	7213	+ 192,5	7267	+ 197	7323	+ 202	0,7380	+ 207	0,7436	+ 212
42°	7539	189,5	7598	194	7661	199	7727	204,5	0,7794	210,5	0,7860	216,5
44°	7918	191	7986	196	8059	201,5	8136	208	0,8215	214	0,8293	220,5
46°	8300	192,5	8378	197,5	8462	204	8552	210,5	0,8643	218	0,8734	225,5
48°	8685	193,5	8773	200	8870	206,5	8973	214	0,9079	222	0,9185	231
50°	9072	+ 195	9173	+ 201	9283	+ 209	9401	+ 217	0,9523	+ 226,5	0,9647	+ 235,5
52°	9462	196,5	9575	203,5	9701	211,5	9835	221	0,9976	230,5	1,0118	242
54°	9855	197,5	9982	205,5	*0124	214	*0277	224	1,0437	235,5	1,0602	247,5
56°	*0250	199	*0393	207	0552	216,5	0725	227,5	1,0908	240,5	1,1097	254
58°	0648	200,5	0807	209,5	0985	219,5	1180	231,5	1,1389	245	1,1605	260,5
60°	1049	+ 201,5	1226	+ 211	1424	+ 222	1643	+ 235	1,1879	+ 250	1,2126	+ 267,5
62°	1452	203,5	1648	212,5	1868	225	2113	239	1,2379	255,5	1,2661	274
64°	1859	204	2073	215	2318	227,5	2591	242,5	1,2890	260,5	1,3209	282
66°	2267	205,5	2503	216,5	2773	229,5	3076	246	1,3411	265,5	1,3773	289
68°	2678	207	2936	218	3232	232,5	3568	250	1,3942	271	1,4351	296,5
70°	3092	+ 207,5	3372	+ 220	3697	+ 235	4068	+ 253	1,4484	+ 276	1,4944	+ 304
72°	3507	208,5	3812	221	4167	236,5	4574	256,5	1,5036	280,5	1,5552	311,5
74°	3924	210	4254	223	4640	239	5087	259,5	1,5597	285,5	1,6175	318,5
76°	4344	210,5	4700	223,5	5118	241	5606	262	1,6168	290	1,6812	325
78°	4765	211	5147	225	5600	242,5	6130	265	1,6748	293,5	1,7462	331,5
80°	5187	+ 212	5597	+ 226	6085	+ 243,5	6660	+ 266,5	1,7335	+ 297	1,8125	+ 337
82°	5611	212	6049	226,5	6572	245	7193	269	1,7929	299,5	1,8799	341,5
84°	6035	213	6502	227,5	7062	246	7731	270	1,8528	302	1,9482	345
86°	6461	212,5	6957	227,5	7554	246,5	8271	271	1,9132	303,5	2,0172	347,5
88°	6886	213	7412	228	8047	247	8813	271,5	1,9739	304	2,0867	349
90°	7312		7868		8541		9356		2,0347		2,1565	
	1,		1,		1,		1,					

Продолжение табл. 27

φ	$\alpha = 65°$		$\alpha = 70°$		$\alpha = 75°$		$\alpha = 80°$		$\alpha = 85°$		$\alpha = 89°$		$\alpha = 90°$	
0°	0,00000	+ 1745,5	0,00000	+ 1745,5	0,00000	+ 1745,5	0,00000	+ 1745,5	0,00000	+ 1745,5	0,00000	+ 1745,5	0,00000	+ 1745,5
2°	0,03491	1747,5	0,03491	1747,5	0,03491	1748	0,03491	1748	0,03491	1748	0,03491	1748	0,03491	1748
4°	0,06986	1751	0,06986	1751,5	0,06987	1751,5	0,06987	1752	0,06987	1752	0,06987	1752	0,06987	1752
6°	0,10488	1756	0,10489	1757	0,10490	1757,5	0,10491	1758	0,10491	1758,5	0,10491	1758,5	0,10491	1758,5
8°	0,14000	1763	0,14003	1764,5	0,14005	1766!	0,14007	1766,5!	0,14008	1767!	0,14008	1767,5!	0,14008	1767,5!
10°	0,1753	+ 177	0,1753	+ 177,5	0,1754	+ 177,5	0,1754	+ 177,5	0,1754	+ 178	0,1754	+ 178	0,1754	+ 178
12°	0,2107	178,5	0,2108	178,5	0,2109	178,5	0,2109	179	0,2110	179	0,2110	179	0,2110	179
14°	0,2464	179,5	0,2465	180	0,2466	180,5	0,2467	180,5	0,2468	180,5	0,2468	181	0,2468	181
16°	0,2823	181	0,2825	181,5	0,2827	182	0,2828	182,5	0,2829	182,5	0,2830	182,5	0,2830	182,5
18°	0,3185	182,5	0,3188	183,5	0,3191	184	0,3193	184	0,3194	184,5	0,3195	184,5	0,3195	184,5
20°	0,3550	+ 184,5	0,3555	+ 185,5	0,3559	+ 186	0,3561	+ 187	0,3563	+ 187	0,3564	+ 187	0,3564	+ 187
22°	0,3919	186,5	0,3926	187,5	0,3931	188,5	0,3935	189	0,3937	189,5	0,3938	189,5	0,3938	189,5
24°	0,4292	189	0,4301	190	0,4308	191	0,4313	192	0,4316	192,5	0,4317	192,5	0,4317	192,5
26°	0,4670	191,5	0,4681	193	0,4690	194,5	0,4697	195	0,4701	195,5	0,4702	196	0,4702	196
28°	0,5053	194,5	0,5067	196	0,5079	197,5	0,5087	198,5	0,5092	199,5	0,5094	199,5	0,5094	199,5
30°	0,5442	+ 197,5	0,5459	+ 199,5	0,5474	+ 201	0,5484	+ 202,5	0,5491	+ 203,5	0,5493	+ 203,5	0,5493	+ 203,5
32°	0,5837	200,5	0,5858	203,5	0,5876	205,5	0,5889	207	0,5898	207,5	0,5900	208	0,5900	208,5
34°	0,6238	204,5	0,6265	207	0,6287	209,5	0,6303	211,5	0,6313	213	0,6316	213,5	0,6317	213
36°	0,6647	208	0,6679	211,5	0,6706	214,5	0,6726	216,5	0,6739	218	0,6743	218,5	0,6743	218,5
38°	0,7063	212,5	0,7102	216,5	0,7135	220	0,7159	222,5	0,7175	224	0,7180	224,5	0,7180	224,5
40°	0,7488	+ 217	0,7535	+ 222	0,7575	+ 12	0,7604	+ 13	0,7623	+ 13	0,7629	+ 13	0,7629	+ 13
42°	0,7922	222,5	0,7979	227	0,8026	13	0,8062	14	0,8084	15	0,8091	15	0,8092	15
44°	0,8367	227	0,8433	233,5	0,8490	14	0,8533	15	0,8560	16	0,8569	16	0,8569	16
46°	0,8821	233	0,8900	240,5	0,8968	15	0,9019	17	0,9052	18	0,9062	18	0,9063	18
48°	0,9287	239,5	0,9381	247,5	0,9461	17	0,9523	19	0,9561	20	0,9574	20	0,9575	20
50°	0,9766	+ 13	0,9876	+ 16	0,9971	+ 18	1,0044	+ 21	1,0091	+ 22	1,0106	+ 23	1,0107	+ 23
52°	1,0258	14	1,0387	17	1,0499	20	1,0587	23	1,0642	25	1,0661	25	1,0662	25
54°	1,0764	15	1,0915	19	1,1048	22	1,1152	25	1,1219	28	1,1241	28	1,1242	28
56°	1,1285	16	1,1462	20	1,1619	25	1,1743	28	1,1823	31	1,1849	32	1,1851	32
58°	1,1822	17	1,2030	22	1,2215	27	1,2362	32	1,2458	35	1,2490	37	1,2492	37
60°	1,2376	+ 18	1,2619	+ 24	1,2837	+ 30	1,3014	+ 36	1,3129	+ 40	1,3168	+ 42	1,3170	+ 42
62°	1,2949	19	1,3231	26	1,3490	33	1,3701	41	1,3841	46	1,3888	49	1,3890	49
64°	1,3541	20	1,3870	28	1,4175	37	1,4429	46	1,4599	54	1,4657	57	1,4659	57
66°	1,4153	21	1,4536	30	1,4898	41	1,5203	53	1,5411	63	1,5482	67	1,5485	67
68°	1,4786	22	1,5232	32	1,5661	45	1,6030	60	1,6287	74	1,6376	80	1,6379	80
70°	1,5441	+ 22	1,5959	+ 33	1,6468	+ 49	1,6918	+ 70	1,7237	+ 89	1,7349	+ 97	1,7356	+ 97
72°	1,6118	23	1,6720	35	1,7326	54	1,7876	81	1,8277	108	1,8421	120	1,8427	120
74°	1,6818	22	1,7516	36	1,8237	59	1,8915	93	1,9427	133	1,9614	152	1,9623	153
76°	1,7540	22	1,8347	37	1,9207	63	2,0047	108	2,0711	168	2,0962	198	2,0973	199
78°	1,8284	21	1,9215	36	2,0240	66	2,1288	124	2,2164	215	2,2513	268	2,2528	270
80°	1,9048	+ 19	2,0119	+ 34	2,1339	+ 67	2,2653	+ 140	2,3836	+ 282	2,4340	+ 381	2,4362	+ 386
82°	1,9831	16	2,1057	30	2,2504	64	2,4157	152	2,5795	377	2,6566	578	2,6603	589
84°	2,0630	13	2,2024	25	2,3731	56	2,5811	151	2,8136	507	2,9421		2,9487	
86°	2,1442	9	2,3017	18	2,5013	42	2,7612	129	3,0978	630	3,3396		3,3547	
88°	2,2263	5	2,4026	9	2,6336	23	2,9537	76	3,4412		3,9911		4,0481	
90°	2,3088	0	2,5046	0	2,7681	0	3,1534	0	3,8317		5,4349		∞	

Таблица 28. **Неполный эллиптический интеграл 2-го рода $E(\varphi, k)$**

φ	$\alpha = 0°$		$\alpha = 5°$		$\alpha = 10°$		$\alpha = 15°$		$\alpha = 20°$		$\alpha = 25°$		$\alpha = 30°$	
	0,		0,		0,		0,		0,		0,		0,	
0°	00000	+ 1745,5	00000	+ 1745,5	00000	+ 1745,5	00000	+ 1745,5	00000	+ 1745,5	00000	+ 1745,5	00000	+ 1745
2°	03491	1745	03491	1745	03491	1745	03491	1745	03491	1745	03491	1744,5	03490	1745
4°	06981	1745,5	06981	1745,5	06981	1745	06981	1745	06981	1744,5	06980	1744,5	06980	1743,5
6°	10472	1745,5	10472	1745	10471	1745	10471	1744,5	10470	1743,5	10469	1743	10467	1742
8°	13963	1745	13962	1745,5	13961	1745	13960	1743,5	13957	1743	13955	1741,5	13951	1740
10°	1745	+ 174,5	1745	+ 174,5	1745	+ 174,5	1745	+ 174	1744	+ 174,5	1744	+ 174	1743	+ 174
12°	2094	174,5	2094	174,5	2094	174,5	2093	174,5	2093	174	2092	173,5	2091	173
14°	2443	175	2443	174,5	2443	174	2442	174	2441	173,5	2439	173,5	2437	173,5
16°	2793	174,5	2792	174,5	2791	174,5	2790	174	2788	174	2786	173,5	2784	172,5
18°	3142	174,5	3141	174,5	3140	174,5	3138	174	3136	173,5	3133	172,5	3129	172
20°	3491	+ 174,5	3490	+ 174,5	3489	+ 174	3486	+ 174	3483	+ 173	3478	+ 172,5	3473	+ 172
22°	3840	174,5	3839	174,5	3837	174	3834	173,5	3829	173	3823	172,5	3817	171
24°	4189	174,5	4188	174,5	4185	174	4181	173,5	4175	172,5	4168	171,5	4159	170,5
26°	4538	174,5	4537	174,5	4533	174	4528	173	4520	172,5	4511	171,5	4500	170
28°	4887	174,5	4886	174	4881	174	4874	173,5	4865	172	4854	170,5	4840	169,5
30°	5236	+ 174,5	5234	+ 174,5	5229	+ 174	5221	+ 173	5209	+ 172	5195	+ 170,5	5179	+ 168,5
32°	5585	174,5	5583	174,5	5577	173,5	5567	172,5	5553	171,5	5536	170	5516	168
34°	5934	174,5	5932	174	5924	174	5912	173	5896	171	5876	169	5852	167
36°	6283	174,5	6280	174,5	6272	173,5	6258	172	6238	171	6214	169	6186	166,5
38°	6632	174,5	6629	174	6619	173,5	6602	172,5	6580	170,5	6552	168	6519	166
40°	6981	+ 174,5	6977	+ 174,5	6966	+ 173,5	6947	+ 172	6921	+ 170	6888	+ 168	6851	+ 164,5
42°	7330	174,5	7326	174	7313	173	7291	171,5	7261	169,5	7224	167	7180	164
44°	7679	175	7674	174,5	7659	173,5	7634	171,5	7600	169,5	7558	166,5	7508	163,5
46°	8029	174,5	8023	174	8006	173	7977	171,5	7939	169	7891	166	7835	162,5
48°	8378	174,5	8371	174	8352	173	8320	171,5	8277	168,5	8223	165,5	8160	161,5
50°	8727	+ 174,5	8719	+ 174,5	8698	+ 173	8663	+ 170,5	8614	+ 168,5	8554	+ 165	8483	+ 161
52°	9076	174,5	9068	174	9044	172,5	9004	171	8951	168	8884	164	8805	160
54°	9425	174,5	9416	174	9389	173	9346	170,5	9287	167,5	9212	164	9125	159
56°	9774	174,5	9764	174	9735	172,5	9687	170,5	9622	167	9540	163	9443	158,5
58°	*0123	174,5	*0112	174	*0080	173	*0028	170	9956	167	9866	162,5	9760	158
60°	0472	+ 174,5	0460	+ 174	0426	+ 172,5	0368	+ 170	*0290	+ 166,5	*0191	+ 162,5	*0076	+ 156,5
62°	0821	174,5	0808	174	0771	172	0708	170	0623	166	0516	161,5	0389	156,5
64°	1170	174,5	1156	174	1115	172,5	1048	169,5	0955	166	0839	161,5	0702	155,5
66°	1519	174,5	1504	174	1460	172,5	1387	169,5	1287	165,5	1162	160,5	1013	155
68°	1868	174,5	1852	174	1805	173	1726	169,5	1618	165,5	1483	160,5	1323	154,5
70°	2217	+ 174,5	2200	+ 174	2149	+ 172	2065	+ 169	1949	+ 165,5	1804	+ 160	1632	+ 153,5
72°	2566	174,5	2548	174	2493	172,5	2403	169,5	2280	164,5	2124	159,5	1939	153,5
74°	2915	175	2896	174	2838	172	2742	169	2609	165	2443	159,5	2246	153
76°	3265	174,5	3244	174	3182	172	3080	168,5	2939	164,5	2762	159	2552	152
78°	3614	174,5	3592	173,5	3526	172	3417	169	3268	164,5	3080	159	2856	152,5
80°	3963	+ 174,5	3939	+ 174	3870	+ 172	3755	+ 169	3597	+ 164	3398	+ 158,5	3161	+ 151,5
82°	4312	174,5	4287	174	4214	172	4093	168,5	3925	164,5	3715	158,5	3464	151,5
84°	4661	174,5	4635	174	4558	171,5	4430	168,5	4254	164	4032	158	3767	151,5
86°	5010	174,5	4983	173,5	4901	172	4767	168,5	4582	164	4348	158,5	4070	151
88°	5359	174,5	5330	174	5245	172	5104	169	4910	164	4665	158	4372	151,5
90°	5708		5678		5589		5442		5238		4981		4675	
	1,		1,		1,		1,		1,		1,		1,	

Продолжение табл. 28

φ	$\alpha = 35°$		$\alpha = 40°$		$\alpha = 45°$		$\alpha = 50°$		$\alpha = 55°$		$\alpha = 60°$	
	0,		0,		0,		0,		0,		0,	
0°	00000	+ 1745	00000	+ 1745	00000	+ 1745	00000	+ 1745	00000	+ 1745	00000	+ 1745
2°	03490	1744,5	03490	1744,5	03490	1744	03490	1744	03490	1744	03490	1743,5
4°	06979	1743,5	06979	1742,5	06978	1742	06978	1741,5	06978	1740,5	06977	1740,5
6°	10466	1741	10464	1740	10462	1739	10461	1737,5	10459	1736,5	10458	1735,5
8°	13948	1738	13944	1736,5	13940	1734,5	13936	1732,5	13932	1731	13929	1729
10°	1742	+ 173,5	1742	+ 173	1741	+ 173	1740	+ 172,5	1739	+ 172,5	1739	+ 172
12°	2089	173,5	2088	172,5	2087	172	2085	172	2084	171,5	2083	171
14°	2436	172,5	2433	172,5	2431	172	2429	171	2427	170,5	2425	170
16°	2781	172	2778	171,5	2775	170,5	2771	170,5	2768	169,5	2765	169
18°	3125	171,5	3121	170,5	3116	170	3112	169	3107	168,5	3103	167,5
20°	3468	+ 170,5	3462	+ 170	3456	+ 168,5	3450	+ 167,5	3444	+ 166,5	3438	+ 166
22°	3809	170,5	3802	168,5	3793	168	3785	166,5	3777	165,5	3770	164
24°	4150	169	4139	168	4129	166,5	4118	165,5	4108	164	4098	162,5
26°	4488	168,5	4475	167	4462	165,5	4449	163,5	4436	162	4423	160,5
28°	4825	168	4809	166	4793	163,5	4776	162	4760	160	4744	158,5
30°	5161	+ 166,5	5141	+ 164,5	5120	+ 163	5100	+ 160,5	5080	+ 158	5061	+ 156
32°	5494	166	5470	163,5	5446	161	5421	158,5	5396	156,5	5373	154
34°	5826	164,5	5797	162,5	5768	159,5	5738	156,5	5709	154	5681	151,5
36°	6155	164	6122	161	6087	158	6051	155	6017	152	5984	149
38°	6483	162,5	6444	159,5	6403	156	6361	153	6321	149,5	6282	146,5
40°	6808	+ 162	6763	+ 158	6715	+ 154,5	6667	+ 151	6620	+ 147	6575	+ 143,5
42°	7132	160,5	7079	157	7024	153	6969	148,5	6914	145	6862	141
44°	7453	159,5	7393	155,5	7330	151,5	7266	147	7204	142	7144	137,5
46°	7772	158,5	7704	154	7633	149	7560	144,5	7488	140	7419	135,5
48°	8089	157,5	8012	152,5	7931	148	7849	142,5	7768	137	7690	132
50°	8404	+ 156	8317	+ 151,5	8227	+ 145,5	8134	+ 140	8042	+ 134,5	7954	+ 129
52°	8716	155	8620	149,5	8518	144	8414	138	8311	132	8212	126
54°	9026	154,5	8919	148,5	8806	142,5	8690	136	8575	129,5	8464	123
56°	9335	153	9216	147	9091	140,5	8962	134	8834	127	8710	120
58°	9641	152	9510	145,5	9372	139	9230	131,5	9088	124	8950	117
60°	9945	+ 150,5	9801	+ 144,5	9650	+ 137	9493	+ 129,5	9336	+ 122	9184	+ 114
62°	*0246	150,5	*0090	143	9924	135,5	9752	127,5	9580	119	9412	111
64°	0547	149	0376	142	*0195	134	*0007	125,5	9818	117	9634	108
66°	0845	148	0660	140,5	0463	132,5	0258	124	*0052	114,5	9850	105,5
68°	1141	147,5	0941	140	0728	131	0506	122	0281	112,5	*0061	102,5
70°	1436	+ 146,5	1221	+ 138,5	0990	+ 130	0750	+ 120,5	0506	+ 110,5	0266	+ 100,5
72°	1729	146	1498	137,5	1250	128,5	0991	118,5	0727	108,5	0467	97,5
74°	2021	145,5	1773	137	1507	127,5	1228	117,5	0944	107	0662	96
76°	2312	144,5	2047	136	1762	126,5	1463	116	1158	105	0854	93,5
78°	2601	144,5	2319	135,5	2015	125,5	1695	115,5	1368	104	1041	92
80°	2890	+ 143,5	2590	+ 134,5	2266	+ 125	1926	+ 114	1576	+ 102,5	1225	+ 90,5
82°	3177	143,5	2859	134,5	2516	124,5	2154	113,5	1781	101,5	1406	89
84°	3464	143,5	3128	134	2765	123,5	2381	112,5	1984	101	1584	88,5
86°	3751	143	3396	134	3012	124	2606	112,5	2186	100	1761	87,5
88°	4037	143	3664	133,5	3260	123	2831	112	2386	100,5	1936	87,5
90°	4323		3931		3506		3055		2587		2111	
	1,		1,		1,		1,		1,		1,	

Продолжение табл. 28

φ	$\alpha = 65°$		$\alpha = 70°$		$\alpha = 75°$		$\alpha = 80°$		$\alpha = 85°$		$\alpha = 90°$	
	0,		0,		0,		0,		0,		0,	
0°	00000	+ 1745	00000	+ 1745	00000	+ 1745	00000	+ 1745	00000	+ 1745	00000	+ 1745
2°	03490	1743,5	03490	1743	03490	1743	03490	1743	03490	1743	03490	1743
4°	06977	1739,5	06976	1739,5	06976	1739	06976	1738,5	06976	1738,5	06976	1738,5
6°	10456	1734,5	10455	1734	10454	1733	10453	1733	10453	1732,5	10453	1732
8°	13925	1728	13923	1726	13920	1725,5	13919	1724!	13918	1723,5!	13917	1724!
10°	1738	+ 172	1738	+ 171,5	1737	+ 171,5	1737	+ 171,5	1737	+ 171	1736	+ 171,5
12°	2082	171	2081	170,5	2080	170,5	2080	170	2079	170	2079	170
14°	2424	169,5	2422	169,5	2421	169	2420	168,5	2419	169	2419	168,5
16°	2763	168	2761	167,5	2759	167,5	2757	167,5	2757	167	2756	167
18°	3099	167	3096	166,5	3094	165,5	3092	165	3091	165	3090	165
20°	3433	+ 165	3429	+ 164	3425	+ 163,5	3422	+ 163,5	3421	+ 163	3420	+ 163
22°	3763	163,5	3757	162,5	3752	162	3749	161	3747	160,5	3746	160,5
24°	4090	161	4082	160	4076	159	4071	159	4068	158,5	4067	158,5
26°	4412	159	4402	158	4394	157	4389	156	4385	155,5	4384	155,5
28°	4730	157	4718	155,5	4708	154	4701	153	4696	153	4695	152,5
30°	5044	+ 154	5029	+ 152,5	5016	+ 151,5	5007	+ 150,5	5002	+ 149,5	5000	+ 149,5
32°	5352	152	5334	150	5319	148,5	5308	147,5	5301	147	5299	146,5
34°	5656	149	5634	147	5616	145,5	5603	144	5595	143	5592	143
36°	5954	146,5	5928	144	5907	142	5891	140,5	5881	139,5	5878	139,5
38°	6247	143	6216	140,5	6191	138,5	6172	137	6160	136	6157	135,5
40°	6533	+ 140,5	6497	+ 137,5	6468	+ 135	6446	+ 133	6432	+ 132,5	6428	+ 131,5
42°	6814	137	6772	134	6738	131	6712	129,5	6697	128	6691	128
44°	7088	136	7040	130,5	7000	127,5	6971	125	6953	123,5	6947	123
46°	7356	131	7301	127	7255	123,5	7221	121,5	7200	120	7193	119
48°	7618	127	7555	123	7502	119,5	7464	116,5	7440	115	7431	114,5
50°	7872	+ 124	7801	+ 119	7741	+ 115,5	7697	+ 112,5	7670	+ 110,5	7660	+ 110
52°	8120	120,5	8039	119,5	7972	111	7922	107,5	7891	105,5	7880	105
54°	8361	117	8270	111,5	8194	107	8137	103,5	8102	101	8090	100
56°	8595	113,5	8493	107	8408	102	8344	98	8304	96	8290	95
58°	8822	110	8707	103,5	8612	98	8540	94	8496	90,5	8480	90
60°	9042	+ 106	8914	+ 99,5	8808	+ 93,5	8728	+ 88,5	8677	+ 86	8660	+ 84,5
62°	9254	103	9113	95,5	8995	89	8905	83,5	8849	80	8829	79,5
64°	9460	99,5	9304	91,5	9173	84	9072	79	9009	75	8988	73,5
66°	9659	96,5	9487	87,5	9341	80	9230	73,5	9159	70	9135	68,5
68°	9852	93	9662	84	9501	75,5	9377	68,5	9299	64	9272	62,5
70°	*0038	+ 90	9830	+ 80	9652	+ 71	9514	+ 64	9427	+ 58,5	9397	+ 57
72°	0218	87	9990	76,5	9794	67	9642	58,5	9544	53	9511	51
74°	0392	84,5	*0143	73,5	9928	62,5	9759	54	9650	47,5	9613	45
76°	0561	81,5	0290	70	*0053	59	9867	49	9745	42	9703	39
78°	0724	80	0430	67,5	0171	55,5	9965	44,5	9829	36,5	9781	33,5
80°	0884	+ 78	0565	+ 65	0282	+ 52,5	*0054	+ 40,5	9902	+ 31,5	9848	+ 27,5
82°	1040	76	0695	63	0387	49,5	0135	37	9965	26	9903	21
84°	1192	75	0821	61,5	0486	47,5	0209	34	*0017	21,5	9945	15,5
86°	1342	74,5	0944	60	0581	46	0277	31,5	0060	17,5	9976	9
88°	1491	73,5	1064	60	0673	45,5	0340	30,5	0095	16	9994	3
90°	1638		1184		0764		0401		0127		*0000	
	1,		1,		1,		1,		1,		1,	

В таблицах 27 и 28 для нормальной формы действительных интегралов $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$ аргументами выбраны φ и α, где α определяется через модули по формулам: $k = \sin\alpha$, $k' = \cos\alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 90°)$.

Если φ и α оба очень близки к 90°, то при вычислении $F(\varphi, k)$ целесообразно пользоваться формулой

$$F(\varphi, k) = \mathsf{K}(k) - F(\varphi^*, k),$$

где φ^* определяется из условия $k' \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi^* = 1$. Значение $\mathsf{K}(k)$ берется из таблицы 30 полных интегралов в нормальной форме.

1.2. Имеют место следующие формулы:

$$F\left(\frac{\pi}{2} + i\chi, k\right) = \mathsf{K}(k) + iF\left(\arcsin\frac{\operatorname{th}\chi}{k'}, k'\right) \qquad \left(1 < \operatorname{ch}\chi \leqslant \frac{1}{k}\right),$$

$$F\left(\frac{\pi}{2} + i\chi, k\right) = F\left(\arcsin\frac{1}{k\operatorname{ch}\chi}, k\right) + i\mathsf{K}'(k) \qquad \left(\frac{1}{k} \leqslant \operatorname{ch}\chi < \infty\right),$$

$$F(+i\infty, k) = i\mathsf{K}'(k), \quad F\left(\frac{\pi}{2} + i\operatorname{Arch}\frac{1}{k}, k\right) = \mathsf{K}(k) + i\mathsf{K}'(k).$$

2. Функциональные уравнения

$$F(-\varphi, k) = -F(\varphi, k), \qquad F(n\pi \pm \varphi, k) = 2n\,\mathsf{K}(k) \pm F(\varphi, k),$$
$$E(-\varphi, k) = -F(\varphi, k), \qquad E(n\pi \pm \varphi, k) = 2n\mathsf{E}(k) \pm E(\varphi, k).$$

Дифференцирование и интегрирование по модулю k приводят к следующим соотношениям (все функции F, E, D от аргументов φ, k):

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \frac{k}{k'^2}\left(F - D - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi, k)}\right), \quad \frac{\partial E}{\partial k} = -kD,$$

$$\frac{\partial D}{\partial k} = \frac{1}{kk'^2}\left(F - D - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi, k)}\right) - \frac{D}{k},$$

$$\int Fk\,dk = E - k'^2F - [1 - \Delta(\varphi, k)]\operatorname{ctg}\varphi, \qquad \int Dk\,dk = -E.$$

С. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ПОЛНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Полные интегралы (рис. 49—56) получаются из неполных при определенном выборе пределов интегрирования.

1. Представления

1.1. При $k^2 \ll 1$ пригодны следующие степенные ряды для K, E и D:

$$\frac{2}{\pi}\mathsf{K} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\right]^2 k^{2n} = 1 + 2\frac{k^2}{8} + 9\left(\frac{k^2}{8}\right)^2 + 50\left(\frac{k^2}{8}\right)^3 + \frac{1225}{4}\left(\frac{k^2}{8}\right)^4 + \ldots,$$

$$\frac{2}{\pi}\mathsf{E} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} = 1 - 2\frac{k^2}{8} - 3\left(\frac{k^2}{8}\right)^2 - 10\left(\frac{k^2}{8}\right)^3 - \frac{175}{4}\left(\frac{k^2}{8}\right)^4 - \ldots,$$

$$\frac{4}{\pi}\mathsf{D} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\right]^2 \frac{n}{2n-1}k^{2n-2} =$$

$$= 1 + 3\frac{k^2}{8} + 15\left(\frac{k^2}{8}\right)^2 + \frac{175}{2}\left(\frac{k^2}{8}\right)^3 + \frac{2205}{4}\left(\frac{k^2}{8}\right)^4 + \ldots,$$

где принято обозначение $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)$.

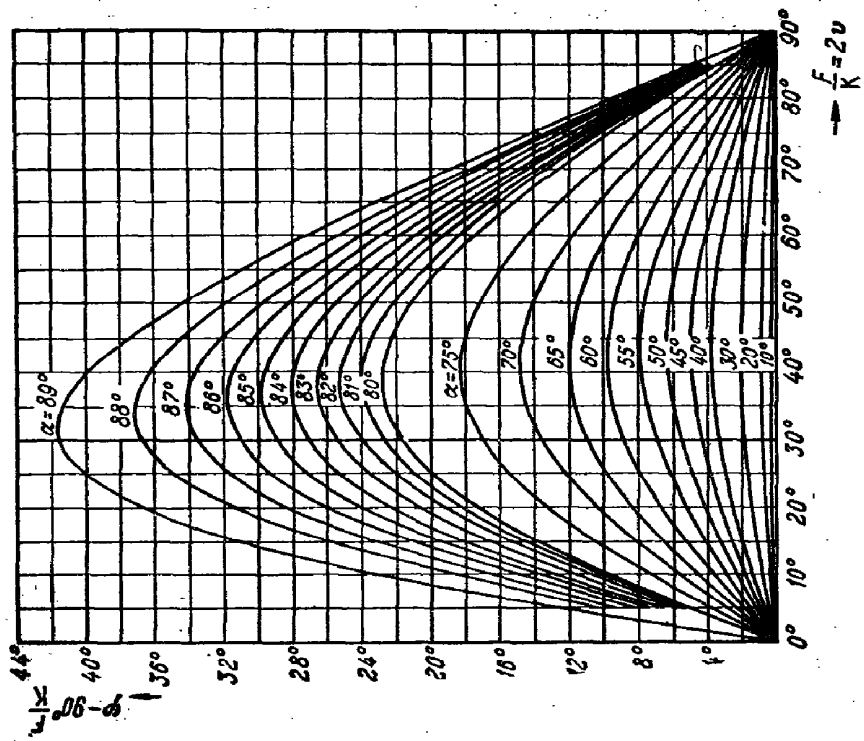


Рис. 50. $\varphi = 90° \frac{F}{K}$ + периодическая функция.

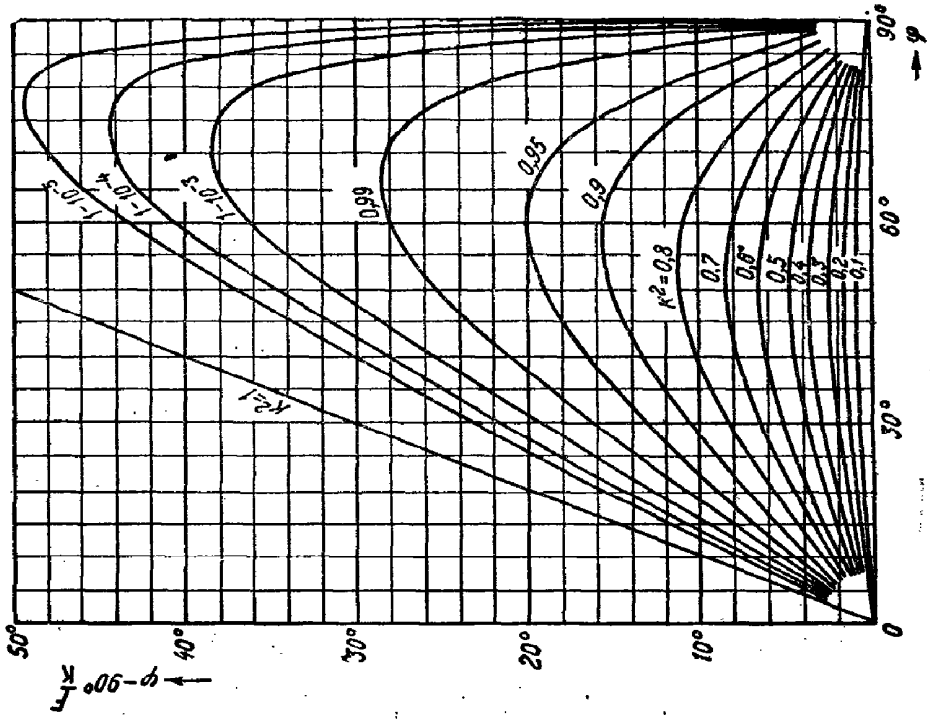


Рис. 49. $90° \frac{F}{K} = \varphi$ — периодическая функция.

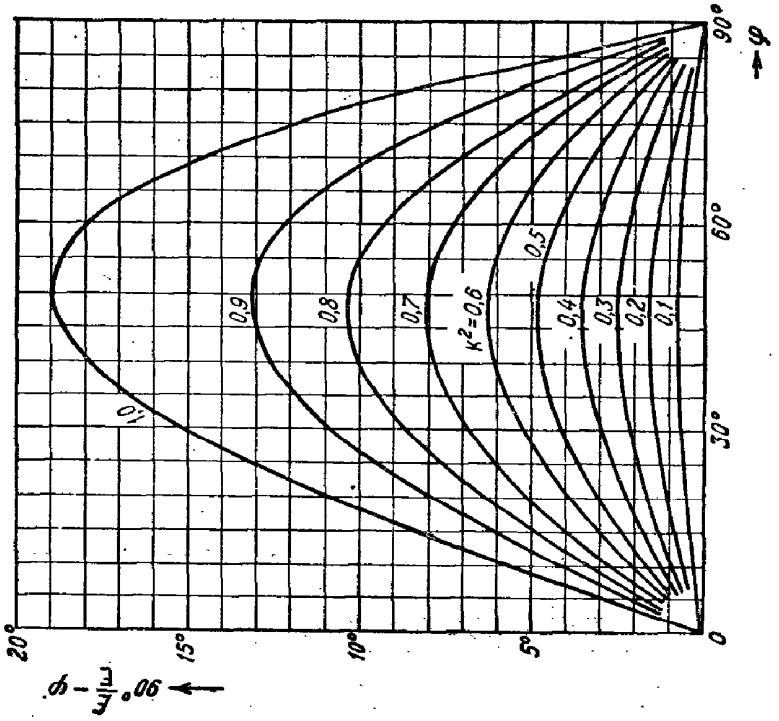


Рис. 52. $90°\frac{E}{E}=\varphi+$ периодическая функция.

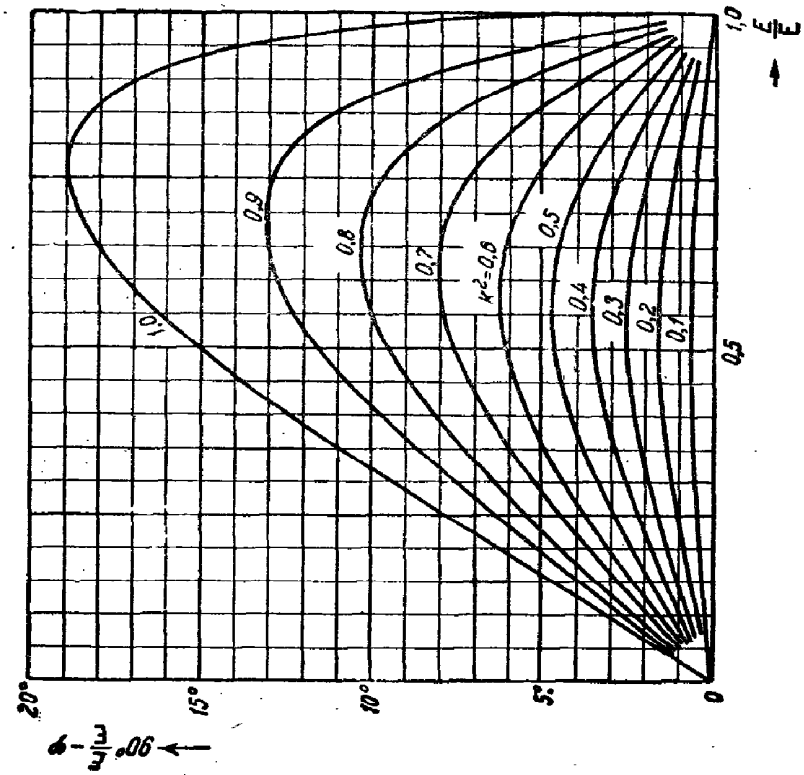


Рис. 51. $\varphi=90°\frac{E}{E}$ — периодическая функция.

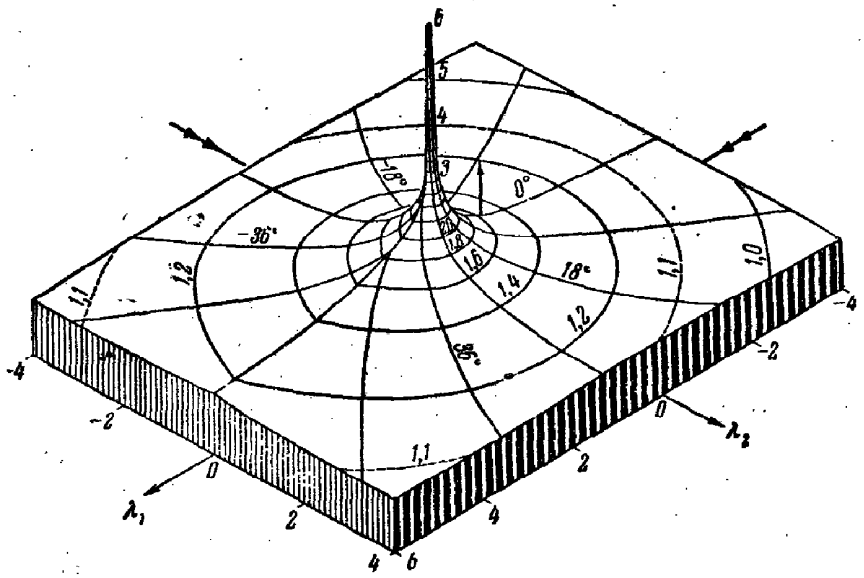


Рис. 53. Рельеф полного эллиптического интеграла K как функции $k^2 = \lambda_1 + i\lambda_2$.

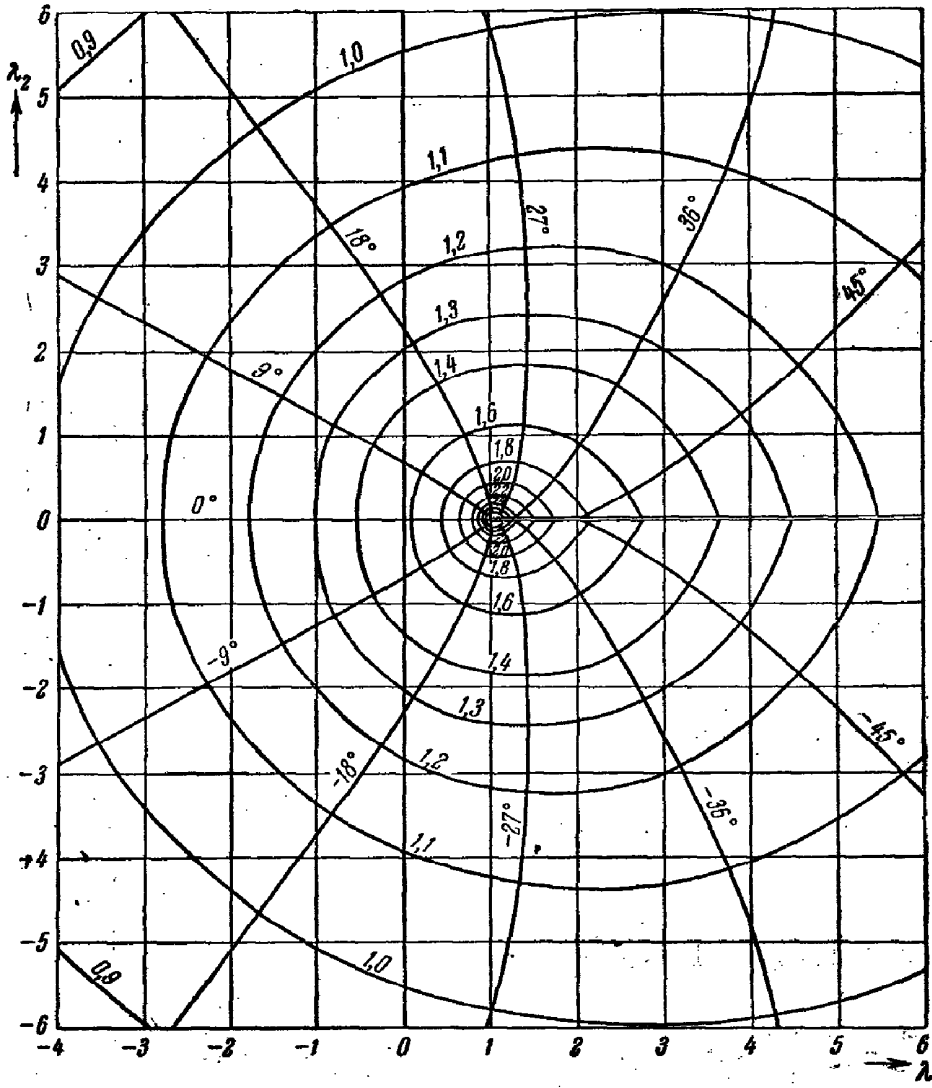


Рис. 54. Карта горизонталей рельефа полного эллиптического интеграла K.

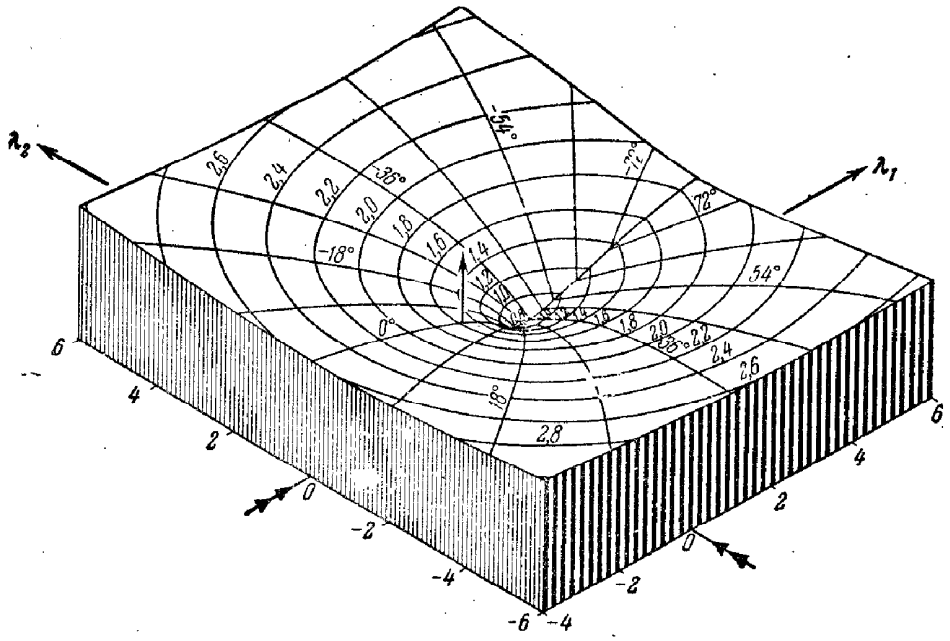


Рис. 55. Рельеф полного эллиптического интеграла E как функции $k^2=\lambda_1+i\lambda_2$.

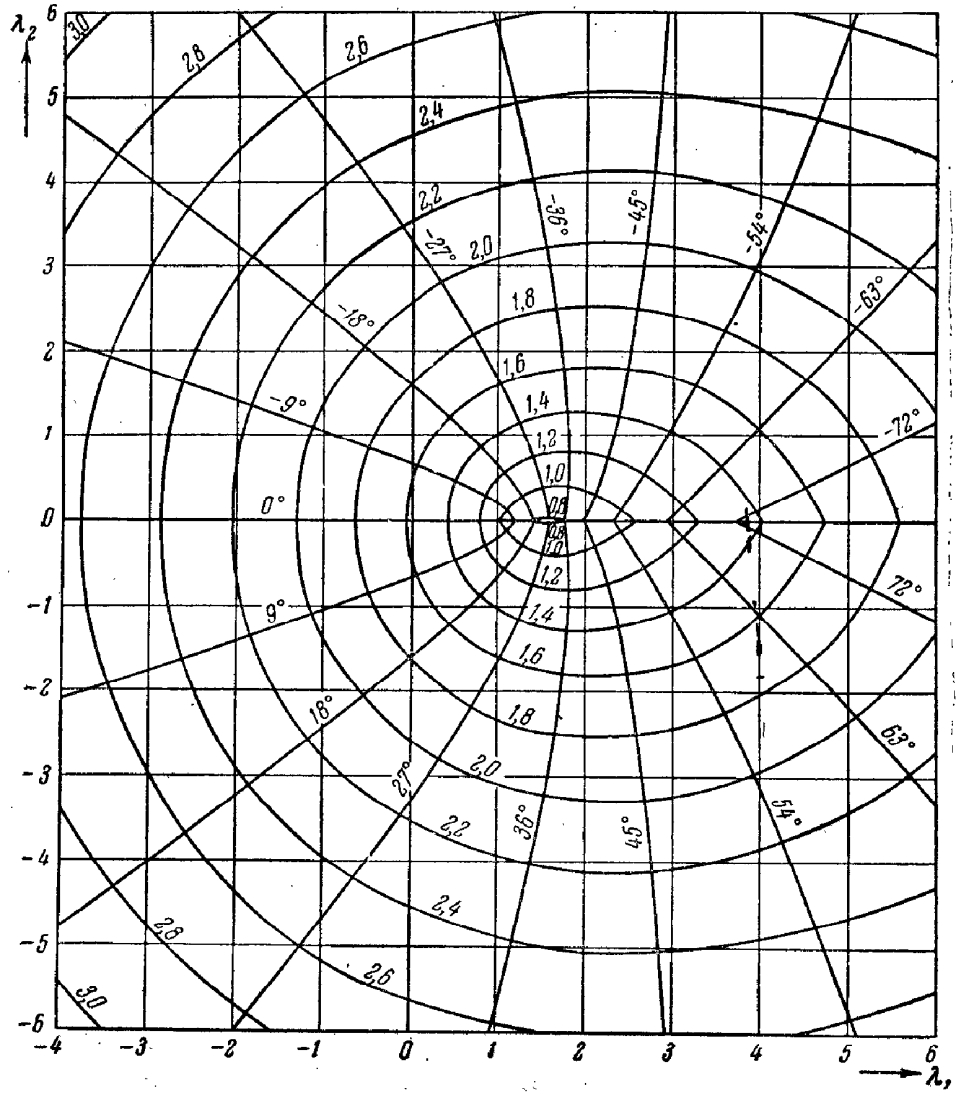


Рис. 56. Карта горизонталей рельефа полного эллиптического интеграла E.

Если $k^2 \approx 1$ и, следовательно, $k'^2 \ll 1$, пользуются рядами

$$\mathsf{K} = \Lambda + \frac{\Lambda - 1}{4} k'^2 + \frac{9}{64}\left(\Lambda - \frac{7}{6}\right) k'^4 + \frac{25}{256}\left(\Lambda - \frac{37}{30}\right) k'^6 + \ldots,$$

$$\mathsf{E} = 1 + \frac{1}{2}\left(\Lambda - \frac{1}{2}\right) k'^2 + \frac{3}{16}\left(\Lambda - \frac{13}{12}\right) k'^4 + \frac{15}{128}\left(\Lambda - \frac{6}{5}\right) k'^6 + \ldots,$$

$$\mathsf{D} = \Lambda - 1 + \frac{3}{4}\left(\Lambda - \frac{4}{3}\right) k'^2 + \frac{45}{64}\left(\Lambda - \frac{41}{30}\right) k'^4 + \frac{175}{256}\left(\Lambda - \frac{289}{210}\right) k'^6 + \ldots,$$

где $\Lambda = \ln \frac{4}{k'}$ или, иначе, $k' = 4e^{-\Lambda}$ (рис. 57).

Некоторые разложения для K и E можно получить с помощью тэта-функций (см. X, C).

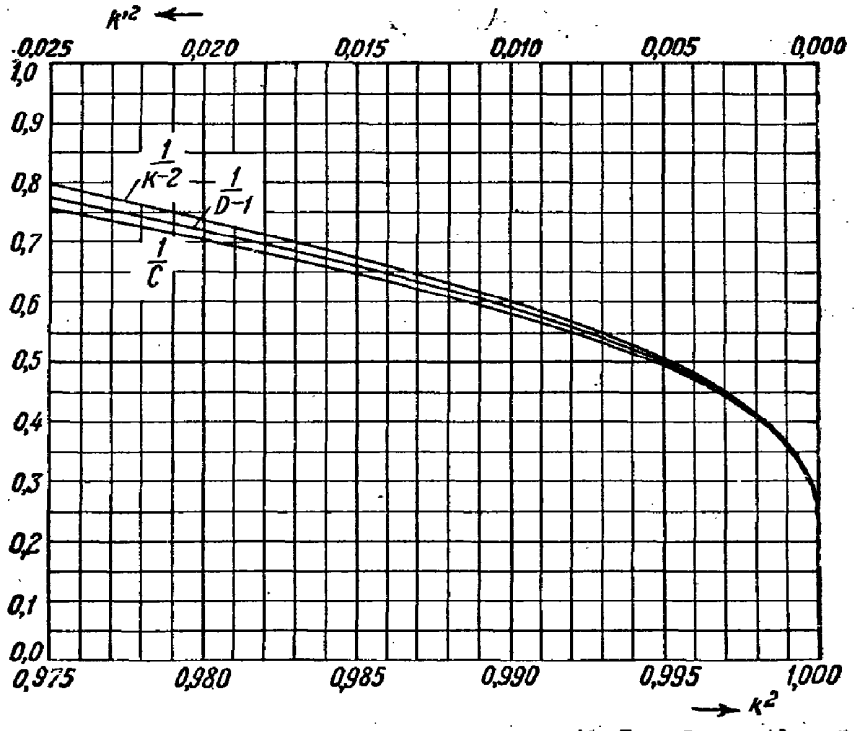


Рис. 57. Поведение эллиптических интегралов K, D и C при $k^2 \to 1$.

Таблицы нормальных форм полных эллиптических интегралов дают значения K, E в зависимости от аргумента α, где $k = \sin\alpha$ (таблица 29), или в зависимости от аргумента k^2 (таблица 30).

При вычислениях иногда бывает выгодно (особенно чтобы избежать неточности, появляющейся для малых разностей) пользоваться, кроме K и E, также следующими интегралами *) (таблица 31, рис. 58):

$$\mathsf{B}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\psi}{\Delta(\psi, k)}\, d\psi, \quad \mathsf{C}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\psi \cos^2\psi}{[\Delta(\psi, k)]^3}\, d\psi, \quad \mathsf{D}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\psi}{\Delta(\psi, k)}\, d\psi.$$

Между этими интегралами имеют место соотношения:

$$\mathsf{K} = \mathsf{D} + \mathsf{B}, \quad 2\mathsf{D} = \mathsf{K} + k^2\mathsf{C}, \quad \mathsf{E} = (1 + k'^2)\mathsf{B} + k'^2k^2\mathsf{C},$$
$$\mathsf{K} = 2\mathsf{B} + k^2\mathsf{C}, \quad \mathsf{E} = k'^2\mathsf{D} + \mathsf{B}, \quad (1 + k'^2)\mathsf{K} = 2\mathsf{E} + k^2\mathsf{C},$$
$$\mathsf{D} = \mathsf{B} + k^2\mathsf{C}, \quad \mathsf{E} = k'^2\mathsf{K} + k^2\mathsf{B}, \quad (1 + k'^2)\mathsf{D} = \mathsf{E} + k^2\mathsf{C}.$$

*) Введенными F. Emde, Arch. fur Elektrotechnik, т. 30 (1936), стр. 243—250.

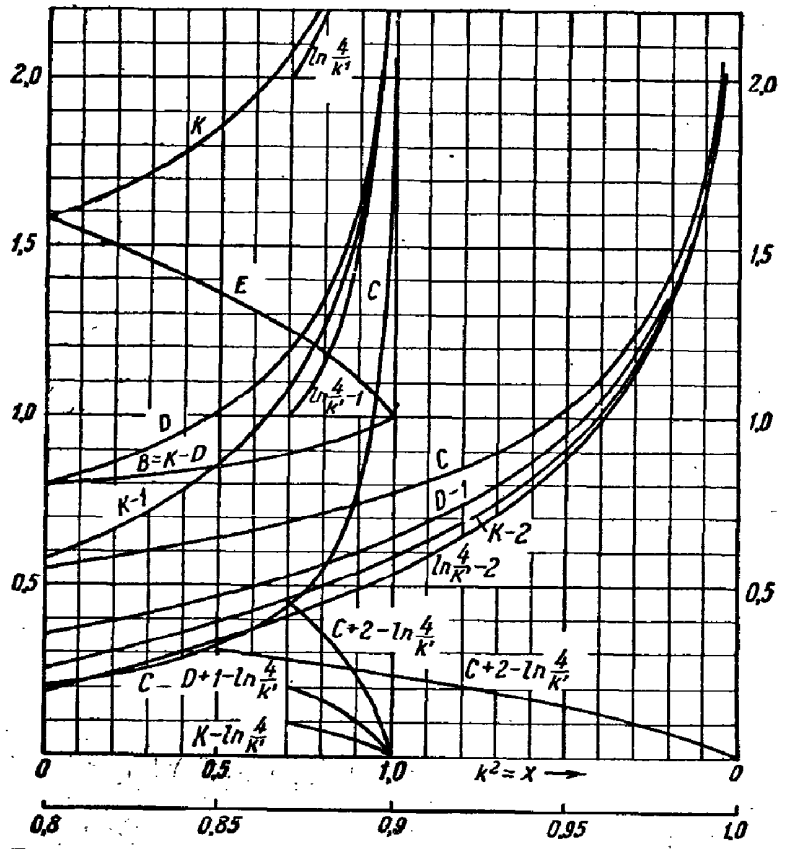


Рис. 58. Полные эллиптические интегралы действительного аргумента $x=k^2$.

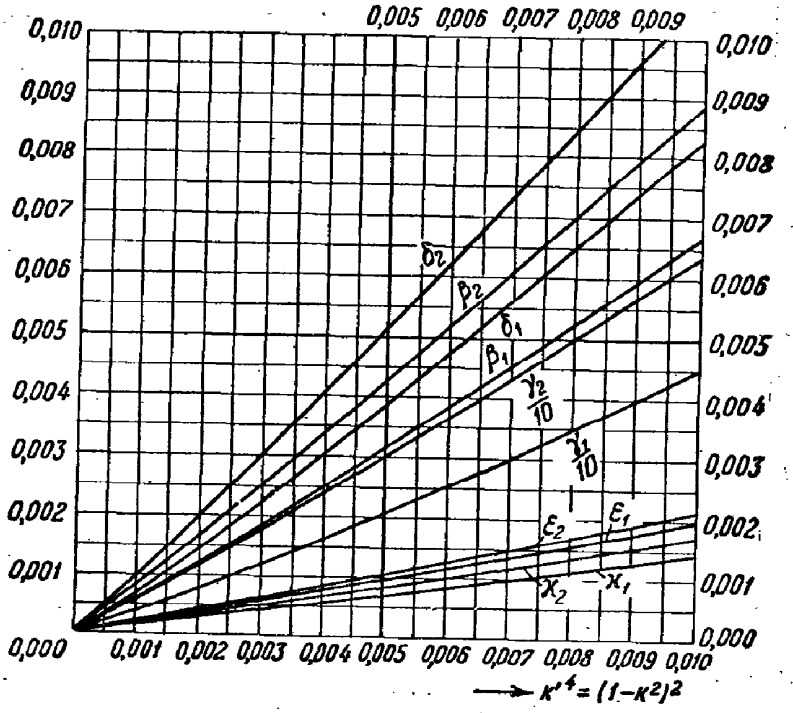


Рис. 59. $E-1=(0{,}5k'^2+\varepsilon_1)\ln\frac{4}{k'}-(0{,}25k'^2+\varepsilon_2)$,

$1-B=(0{,}5k'^2+\beta_1)\ln\frac{4}{k'}-(0{,}75k'^2+\beta_2)$, $h=(0{,}25k'^2+\varkappa_1)\ln\frac{4}{k'}-(0{,}25k'^2+\varkappa_2)$,

$d=(0{,}75k'^2+\delta_1)\ln\frac{4}{k'}-(k'^2+\delta_2)$, $c=(2{,}25k'^2+\gamma_1)\ln\frac{4}{k'}-(3{,}75k'^2+\gamma_2)$.

Так как $\mathsf{K}(k) \to \infty$ при $k \to 1$, то значения аргумента в таблице 29 выбираются вблизи $\alpha = 90°$ через малые интервалы. Таблица 32 для функции (рис. 59)

$$\mathsf{h}(k) = \mathsf{K}(k) - \ln 4/k'$$

используется для улучшения точности вычислений при значениях модуля k, близких к единице. Величина $\mathsf{K}(k)$ легко получается, если взять $\ln(4/k')$ по таблице логарифмов и прибавить значения $\mathsf{h}(k)$, получаемые по таблице 32.

Таблица 32 для функций (рис. 59)

$$\mathsf{c}(k) = \mathsf{C}(k) + 2 - \ln 4/k', \qquad \mathsf{d}(k) = \mathsf{D}(k) + 1 - \ln 4/k'$$

позволяет получать значения $\mathsf{C}(k)$ и $\mathsf{D}(k)$ вблизи $k = 1$ аналогичным приемом.

1.2. Для нормальной формы полного интеграла 3-го рода при больших значениях модуля, точнее, когда $k'/\lambda' \ll 1$, имеем *):

$$\left(1 + \frac{k^2}{\lambda^2}\right)\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda^2, k\right) - \frac{k^2}{\lambda^2}\mathsf{K}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos^2\psi + k'^2\sin^2\psi}}{\cos^2\psi + \lambda'^2\sin^2\psi}\,d\psi = \sqrt{\lambda'^2 - k'^2}\left(\frac{\arccos\frac{1}{\lambda'}}{\lambda'\sqrt{\lambda'^2 - 1}} + R\right),$$

где

$$R = \frac{k'^2}{2}\left(\Lambda + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\lambda'^3} + \frac{k'^4}{16}\left[-1 + \left(\Lambda + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{\lambda'^3}\left(1 + \frac{6}{\lambda'^2}\right)\right] + \frac{k'^6}{16}\left[-\frac{7}{16} - \frac{1}{\lambda'^2} + \left(\Lambda + \frac{1}{6}\right)\frac{1}{\lambda'^3}\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{\lambda'^2} + \frac{5}{\lambda'^4}\right)\right] + \frac{15k'^8}{256}\left[-\frac{37}{144} - \frac{21}{40\lambda'^2} - \frac{1}{\lambda'^4} + \left(\Lambda + \frac{1}{8}\right)\frac{1}{\lambda'^3}\left(\frac{5}{24} + \frac{9}{20\lambda'^2} + \frac{1}{\lambda'^4} + \frac{14}{3\lambda'^6}\right)\right] + \ldots,$$

$$\lambda'^2 = 1 + \lambda^2, \qquad \Lambda = \ln 4/k', \quad k' = 4e^{-\Lambda}.$$

2. Функциональные уравнения

2.1. Соотношение Лежандра:

$$\mathsf{E}(k)\mathsf{K}'(k) + \mathsf{E}'(k)\mathsf{K}(k) - \mathsf{K}(k)\mathsf{K}'(k) = \pi/2.$$

2.2. Формулы перехода к другому модулю:

$$\mathsf{K}\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) = \frac{1+k'}{2}\mathsf{K}(k), \quad \mathsf{K}\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = (1+k)\mathsf{K}(k), \quad \mathsf{K}\left(i\frac{k}{k'}\right) = k'\mathsf{K}(k),$$

$$\mathsf{E}\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) = \frac{1}{1+k'}\left[\mathsf{E}(k) + k'\mathsf{K}(k)\right], \quad \mathsf{E}\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\left[2\mathsf{E}(k) - k'^2\mathsf{K}(k)\right],$$

$$\mathsf{K}'i\left(\frac{k}{k'}\right) = k'\left[\mathsf{K}'(k) - i\mathsf{K}(k)\right], \quad \mathsf{K}\left(\frac{1}{k}\right) = k\mathsf{K}(k) + i\mathsf{K}'(k).$$

2.3. Производные и интегралы:

$$\int_0^1 \mathsf{K}(k)\,dk = 2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots\right) = 2G, \qquad G = 0{,}915965594\ldots$$

(G — постоянная Каталана).

*) См. G. Hamel, S.-Ber. Berliner Math. Ges., т. 31 (1932), стр. 17—22 и M. Kolscher, Z. Angew. Math. Mech., т. 31 (1951), стр. 114—120.

Таблица 29. **Полные эллиптические интегралы $K(\sin\alpha)$ и $E(\sin\alpha)$**

α	K		E		α	K		E		α	K		E	
	1,		1,			1,		1,					1,	
0°	5708	+ 1	5708	— 1	50°	1,9356	+ 183	3055	— 92	82°,0	3,3699	+ 123,5	0278	— 5,5
1°	5709	4	5707	4	51°	1,9539	190	2963	93	82°,2	3,3946	126,5	0267	5,5
2°	5713	6	5703	6	52°	1,9729	198	2870	94	82°,4	3,4199	130,5	0256	5,5
3°	5719	8	5697	8	53°	1,9927	206	2776	95	82°,6	3,4460	134	0245	5,5
4°	5727	11	5689	11	54°	2,0133	214	2681	94	82°,8	3,4728	138	0234	5,5
5°	5738	+ 13	5678	— 13	55°	2,0347	+ 224	2587	— 95	83°,0	3,5004	+ 142	0223	— 5
6°	5751	16	5665	16	56°	2,0571	233	2492	95	83°,2	3,5288	146,5	0213	5,5
7°	5767	18	5649	17	57°	2,0804	243	2397	96	83°,4	3,5581	151,5	0202	5
8°	5785	20	5632	21	58°	2,1047	253	2301	95	83°,6	3,5884	156	0192	5
9°	5805	23	5611	22	59°	2,1300	265	2206	95	83°,8	3,6196	161,5	0182	5
10°	5828	+ 26	5589	— 25	60°	2,1565	+ 277	2111	— 96	84°,0	3,6519	+ 166,5	0172	— 4,5
11°	5854	28	5564	27	61°	2,1842	290	2015	95	84°,2	3,6852	173	0163	5
12°	5882	31	5537	30	62°	2,2132	303	1920	94	84°,4	3,7198	179,5	0153	4,5
13°	5913	33	5507	31	63°	2,2435	319!	1826	94	84°,6	3,7557	186,5	0144	4,5
14°	5946	35	5476	34	64°	2,2754	334!	1732	94	84°,8	3,7930	193,5	0135	4
15°	5981	+ 39	5442	— 37	65°	2,3088	+ 351!	1638	— 93	85°,0	3,8317	+ 16	0127	— 4,5
16°	6020	41	5405	38	66°	2,3439	370!	1545	92	85°,2	3,8721	17	0118	4
17°	6061	44	5367	41	67°	2,3809	389!	1453	91	85°,4	3,9142	19	0110	4
18°	6105	46	5326	43	68°	2,4198	412!	1362	90	85°,6	3,9583	21	0102	4
19°	6151	49	5283	45	69°	2,4610	436!	1272	88	85°,8	4,0044	23	0094	4
20°	6200	+ 52	5238	— 47	70°	2,5046	+ 45,4	1184	— 8,8	86°,0	4,0528	+ 25	0086	— 3,5
21°	6252	55	5191	50	70°,5	2,5273	46,8	1140	8,8	86°,2	4,1037	28	0079	3,5
22°	6307	58	5141	51	71°	2,5507	48,4	1096	8,6	86°,4	4,1574	31	0072	3,5
23°	6365	61	5090	53	71°,5	2,5749	49,8	1053	8,4	86°,6	4,2142	35	0065	3
24°	6426	64	5037	56	72°	2,5998	51,6	1011	8,6	86°,8	4,2744	39	0059	3
25°	6490	+ 67	4981	— 57	72°,5	2,6256	+ 53,0	0968	— 8,2	87°,0	4,3387	+ 44	0053	— 3
26°	6557	70	4924	60	73°	2,6521	55,0	0927	8,4	87°,2	4,4073	51	0047	3
27°	6627	74	4864	61	73°,5	2,6796	57,0	0885	8,2	87°,4	4,4811	59	0041	2,5
28°	6701	76	4803	63	74°	2,7081	58,8	0844	8,0	87°,6	4,5609	69	0036	2,5
29°	6777	81	4740	65	74°,5	2,7375	61,2	0804	8,0	87°,8	4,6477	82	0031	2,5
30°	6858	+ 83	4675	— 67	75°	2,7681	+ 63,4	0764	— 7,8	88°,0	4,7427	+ 100	0026	— 2,5
31°	6941	87	4608	69	75°,5	2,7998	65,8	0725	7,8	88°,2	4,8478	123	0021	2
32°	7028	91	4539	70	76°	2,8327	68,4	0686	7,6	88°,4	4,9654	155	0017	1,5
33°	7119	95	4469	72	76°,5	2,8669	71,4	0648	7,4	88°,6	5,0988	201	0014	2
34°	7214	98	4397	74	77°	2,9026	74,2!	0611	7,4	88°,8	5,2527	273	0010	1
35°	7312	+ 103	4323	— 75	77°,5	2,9397	+ 77,8!	0574	— 7,2	89°,0	5,4349	+ 388	0008	— 2
36°	7415	107	4248	77	78°	2,9786	81,2!	0538	7,2	89°,1	5,5402		0006	1
37°	7522	111	4171	79	78°,5	3,0192	85,0!	0502	6,8	89°,2	5,6579		0005	1
38°	7633	115	4092	79	79°	3,0617	89,4!	0468	6,8	89°,3	5,7914		0004	1
39°	7748	120	4013	82	79°,5	3,1064	94,0!	0434	6,6	89°,4	5,9455		0003	1
40°	7868	+ 124	3931	— 82	80°,0	3,1534	+ 97,5	0401	— 6,5	89°,5	6,1278		0002	— 1
41°	7992	130	3849	84	80°,2	3,1729	99,5	0388	6,5	89°,6	6,3509		0001	0
42°	8122	134	3765	85	80°,4	3,1928	102	0375	6	89°,7	6,6385		0001	1
43°	8256	140	3680	86	80°,6	3,2132	104	0363	6,5	89°,8	7,0440		0000	0
44°	8396	145	3594	88	80°,8	3,2340	106,5	0350	6	89°,9	7,7371		0000	0
45°	8541	+ 150	3506	— 88	81°,0	3,2553	+ 109	0338	— 6	90°	∞		0000	0
46°	8691	157	3418	89	81°,2	3,2771	112	0326	6				1,	
47°	8848	163	3329	91	81°,4	3,2995	114	0314	6					
48°	9011	169	3238	91	81°,6	3,3223	117,5	0302	6					
49°	9180	176	3147	92	81°,8	3,3458	120,5	0290	6					
50°	9356		3055		82°,0	3,3699		0278						
	1,		1,					1,						

Таблица 30 Полные эллиптические интегралы K (k) и E (k)

k^2	K		E		k^2	K		E	
	1,		1,					1,	
0,00	5708	+ 39,5	5708	− 39,5	0,50	1,8541	+ 86,5	3506	− 50,5
02	5787	41	5629	39,5	52	1,8714	90,5	3405	51,5
04	5869	41,5	5550	40	54	1,8895	95	3302	52
06	5952	42,5	5470	40,5	56	1,9085	100	3198	53
08	6037	43,5	5389	40,5	58	1,9285	105,5	3092	54
0,10	6174	+ 45	5308	− 41	0,60	1,9496	+ 111	2984	− 54,5
12	6214	46	5226	41,5	62	1,9718	117,5	2875	56
14	6306	47	5143	42	64	1,9953	125	2763	56,5
16	6400	48,5	5059	42	66	2,0203	133!	2650	57,5
18	6497	49,5	4975	42,5	68	2,0469	142,5!	2535	59
0,20	6596	+ 51,5	4890	− 42,5	0,70	2,0754		2417	− 60,5
22	6699	52,5	4805	43,5	72	2,1059		2296	61,5
24	6804	54	4718	43,5	74	2,1390		2173	63
26	6912	56	4631	44	76	2,1748		2047	64,5
28	7024	57,5	4543	44,5	78	2,2140		1918	66,5
0,30	7139	+ 59,5	4454	− 45	0,80	2,2572		1785	− 68,5
32	7258	61,5	4364	45,5	82	2,3052		1648	70,5
34	7381	63,5	4273	46	84	2,3593		1507	73,5
36	7508	65,5	4181	46,5	86	2,4209		1360	76,5
38	7639	68	4088	47	88	2,4926		1207	79,5
0,40	7775	+ 71	3994	− 47,5	0,90	2,5781		1048	− 84,5
42	7917	73	3899	48	92	2,6836		0879	89,5
44	8063	76,5	3803	49	94	2,8208		0700	97,5!
46	8216	79,5	3705	49,5	96	3,0161		0505	109,5!
48	8375	83	3606	50	98	3,3541		0286	
0,50	8541		3506		1,00	∞		0000	
	1,		1,					1,	

Таблица 31. Полные эллиптические интегралы B (k), C (k) и D (k)

k^2	B		C		D		k^2	B		C		D	
	0,		0,		0,			0,					
0,00	7854	+ 10	19635	+ 449,5	7854	+ 79,5	0,50	8472	+ 16	0,3193	+ 41	1,0069	+ 70,5
02	7874	10	19934	454,5	7913	81	52	8504	16,5	0,3279	45,5	1,0210	74
04	7894	10	20243	459,5	7975	81,5	54	8537	17	0,3370	48,5	1,0358	78
06	7914	10,5	20562	465	8038	82	56	8571	18	0,3467	52	1,0514	82
08	7935	10,5	20892	470,5	8102	83	58	8607	18,5	0,3571	55,5	1,0678	87
0,10	7956	+ 10,5	21233	+ 476,5	8168	+ 84,5	0,60	8644	+ 18,5	0,3682	+ 59,5	1,0852	+ 92,5
12	7977	11	21586	482,5	8237	85	62	8681	19	0,3801	64	1,1037	98,5
14	7999	11	21951	489,5	8307	86	64	8719	20,5	0,3929	69	1,1234	104,5
16	8021	11,5	22330	496,5	8379	87	66	8760	20,5	0,4067	75	1,1443	112,5!
18	8044	11,5	22723	504	8453	88	68	8801	21,5	0,4217	81,5	1,1668	121!
0,20	8067	+ 11,5	23131	+ 512	8529	+ 89,5	0,70	8844	+ 22	0,4380		1,1910	
22	8090	12	23555	520	8608	91	72	8888	23,5	0,4559		1,2171	
24	8114	12	23995	529!	8690	92	74	8935	24	0,4757		1,2455	
26	8138	12,5	24453	539!	8774	93,5	76	8983	25,5	0,4975		1,2765	
28	8163	12,5	24931	549!	8861	95	78	9034	27	0,5219		1,3106	
0,30	8188	+ 13	2543	+ 26	8951	+ 96,5	0,80	9088	+ 28	0,5495		1,3484	
32	8214	13	2595	27	9044	98,5	82	9144	30,5	0,5809		1,3908	
34	8240	13,5	2649	28,5	9141	100	84	9205	31,5	0,6171		1,4388	
36	8267	13,5	2706	29,5	9241	102	86	9268	34	0,6596		1,4941	
38	8294	14	2765	31,5	9345	104	88	9336	37,5	0,7106		1,5590	
0,40	8322	+ 14	2828	+ 33	9453	+ 106,5	0,90	9411	+ 40,5	0,7733		1,6370	
42	8350	15	2894	34,5	9566	108,5	92	9492	45,5	0,8535		1,7344	
44	8380	15	2963	36	9683	111,5	94	9583	51,5	0,9620		1,8625	
46	8410	15,5	3035	38,5	9806	114	96	9686	57,5	1,1235		2,0475	
48	8441	15,5	3112	40,5	9934	117,5	98	9811		1,4203		2,3730	
0,50	8472		3193		*0069		1,00	*0000		∞		∞	

Таблица 32. Вспомогательные функции h (k), c (k) и d (k)

$$h = K - \ln\frac{4}{k'} \qquad c = C + 2 - \ln\frac{4}{k'} \qquad d = D + 1 - \ln\frac{4}{k'}$$

k^2	h		c		d		k^2	h		c		d	
	0,0		0,		0,2			0,0		0,		0,1	
0,70	871	— 20	4497	— 81	027	— 41	0,85	542	— 26	3027	— 125	306	— 59
71	851	19	4416	85	*986	43	86	516	27	2902	127	247	59
72	832	20	4331	85	943	43	87	489	27	2775	133	188	62
73	812	21	4246	87	900	43	88	462	28	2642	139	126	65
74	791	20	4159	90	857	45	89	434	29	2503	146	061	67
0,75	771	— 21	4069	— 93	812	— 46	0,90	405	— 30	236	— 16	*994	— 70
76	750	22	3976	93	766	46	91	375	31	220	16	924	72
77	728	21	3883	98	720	48	92	344	33	204	17	852	76
78	707	23	3785	98	672	48	93	311	33	187	18	776	81
79	684	22	3687	102	624	50	94	278	36	169	20	695	86
0,80	662	— 23	3585	— 106	574	— 51	0,95	242	— 38	149	— 21	609	— 91
81	639	24	3479	107	523	52	96	204	41	128	23	518	100
82	615	24	3372	112	471	54	97	163	45	105	27	418	1111
83	591	24	3260	115	417	55	98	118	50!	078	32	307	
84	567	25	3145	118	362	56	99	068		046		178	
0,85	542		3027		306		1,00	000		000		000	
	0,0		0,		0,1			0,0		0,		0,0	

Если рассматривать интегралы K, E как функции аргумента $x = k^2$, то получим (аргументы опущены):

$$2\frac{dK}{dx} = \frac{E}{x(1-x)} - \frac{K}{x}, \quad 2\frac{dE}{dx} = \frac{E-K}{x}, \quad \int K\,dx = 2[E-(1-x)K] = 2x(K-D),$$

$$\int E\,dx = \frac{2}{3}[(1+x)E-(1-x)K], \quad \int D\,dx = -2E, \quad \int (K+D)\,dx = -2(1-x)K,$$

$$\int Kx\,dx = \frac{2}{9}[(4+x)E+(3x^2+x-4)K],$$

$$\int Ex\,dx = \frac{2}{45}[(9x^2+x+4)E+(3x^2+x-4)K],$$

$$(2n+3)^2\int Kx^{n+1}dx - 4(n+1)^2\int Kx^n dx = 2x^{n+1}[E-(2n+3)(1-x)K],$$

$$4(n+1)^2\int Ex^n dx - (2n-3)(2n+5)\int Ex^{n+1}dx =$$

$$= 2x^{n+1}\{[(2n+1)-(2n+3)x]E+(1-x)K\} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\int \frac{K}{x\sqrt{x}}dx = -2\frac{E}{\sqrt{x}}, \quad \int \frac{D}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}(K-D),$$

$$\int \frac{E}{x\sqrt{x}}dx = -\frac{2}{\sqrt{x}}[2E+(x-1)K], \quad \int \frac{E}{x^2\sqrt{x}}dx = -\frac{2}{9x\sqrt{x}}[(4-2x)E+(x-1)K],$$

$$\int \frac{E}{1-x}dx = 2(K-E) = 2xD, \quad \int \frac{E}{(1-x)\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}K.$$

2.4. K, E и D удовлетворяют гипергеометрическим дифференциальным уравнениям [в которых принято обозначение аргумента $x = k^2$]:

$$\frac{1}{4}K = \frac{d}{dx}\left[x(1-x)\frac{dK}{dx}\right], \qquad x(1-x)\frac{d^2K}{dx^2} + (1-2x)\frac{dK}{dx} - \frac{1}{4}K = 0,$$

$$-\frac{1}{4}E = (1-x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{dE}{dx}\right), \qquad x(1-x)\frac{d^2E}{dx^2} + (1-x)\frac{dE}{dx} + \frac{1}{4}E = 0,$$

$$-\frac{1}{4}D = \frac{d}{dx}\left[(1-x)\frac{dxD}{dx}\right], \qquad x(1-x)\frac{d^2D}{dx^2} + (2-3x)\frac{dD}{dx} - \frac{3}{4}D = 0.$$

X. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Определения и обозначения

Эллиптическими функциями называются функции, обратные к эллиптическим интегралам.

Эллиптическая функция является двоякопериодической мероморфной функцией комплексного переменного. Все ее периоды можно представить в виде $2m\omega_1 + 2n\omega_2$ (m, n — целые числа), где $2\omega_1$, $2\omega_2$ называются *парой основных периодов*. Отношение основных периодов $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ является комплексной величиной, и можно считать, что $\operatorname{Im}\tau > 0$.

Начиная из произвольной точки u_0, можно покрыть всю плоскость комплексного аргумента сеткой параллелограммов периодов, вершинами которых будут точки $u_0 + 2m\omega_1 + 2n\omega_2$ (m, n — целые числа). В силу своей двоякопериодичности функция принимает одно и то же значение в соответствующих (гомологических) точках всех параллелограммов периодов.

А. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЯКОБИ

1. Амплитуда Якоби $\operatorname{am}(u, k)$

Если

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k)}$$

— неполный эллиптический интеграл 1-го рода, то φ называется *амплитудой* u:

$$\varphi = \operatorname{am}(u, k).$$

Она является бесконечнозначной периодической функцией от $u = u_1 + iu_2$ (рис. 60, 61) с точками ветвления*) $u = 2m\mathsf{K} + (2n+1)\mathsf{K}'i$ (m, n — целые числа) и с периодом $4\mathsf{K}'i$:

$$\operatorname{am}(u + 4\mathsf{K}'i, k) = \operatorname{am}(u, k).$$

Далее, имеют место свойства

$$\operatorname{am}(u + 2\mathsf{K}, k) = \pi + \operatorname{am}(u, k), \quad \operatorname{am}(u + 2\mathsf{K}'i, k) = \pi - \operatorname{am}(u, k),$$
$$\operatorname{am}(-u, k) = -\operatorname{am}(u, k);$$

при u близких к нулю верно представление

$$\operatorname{am}(i\mathsf{K}' - iu, k) \approx i \ln \frac{2}{ku}.$$

---

*) Здесь K означает полный эллиптический интеграл 1-го рода $\mathsf{K} = \mathsf{K}(k)$, $\mathsf{K}' = \mathsf{K}(k')$, где $k' = \sqrt{1-k^2}$. — *Прим. ред.*

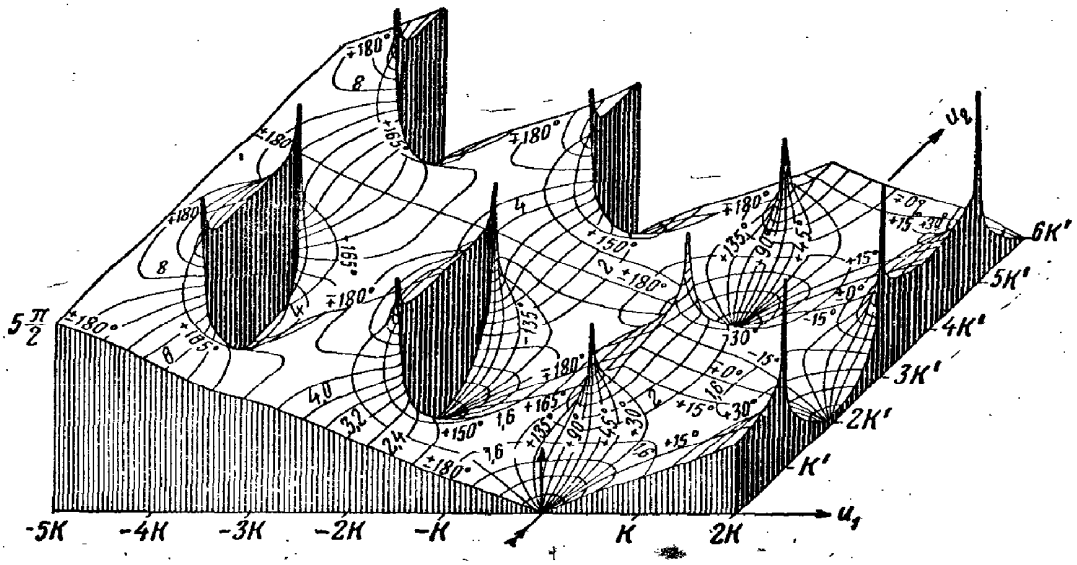


Рис. 60. Рельеф амплитуды Якоби $\operatorname{am}(u, k)$ при $k=0{,}8$. Четыре заштрихованные поверхности слева означают линии ветвления.

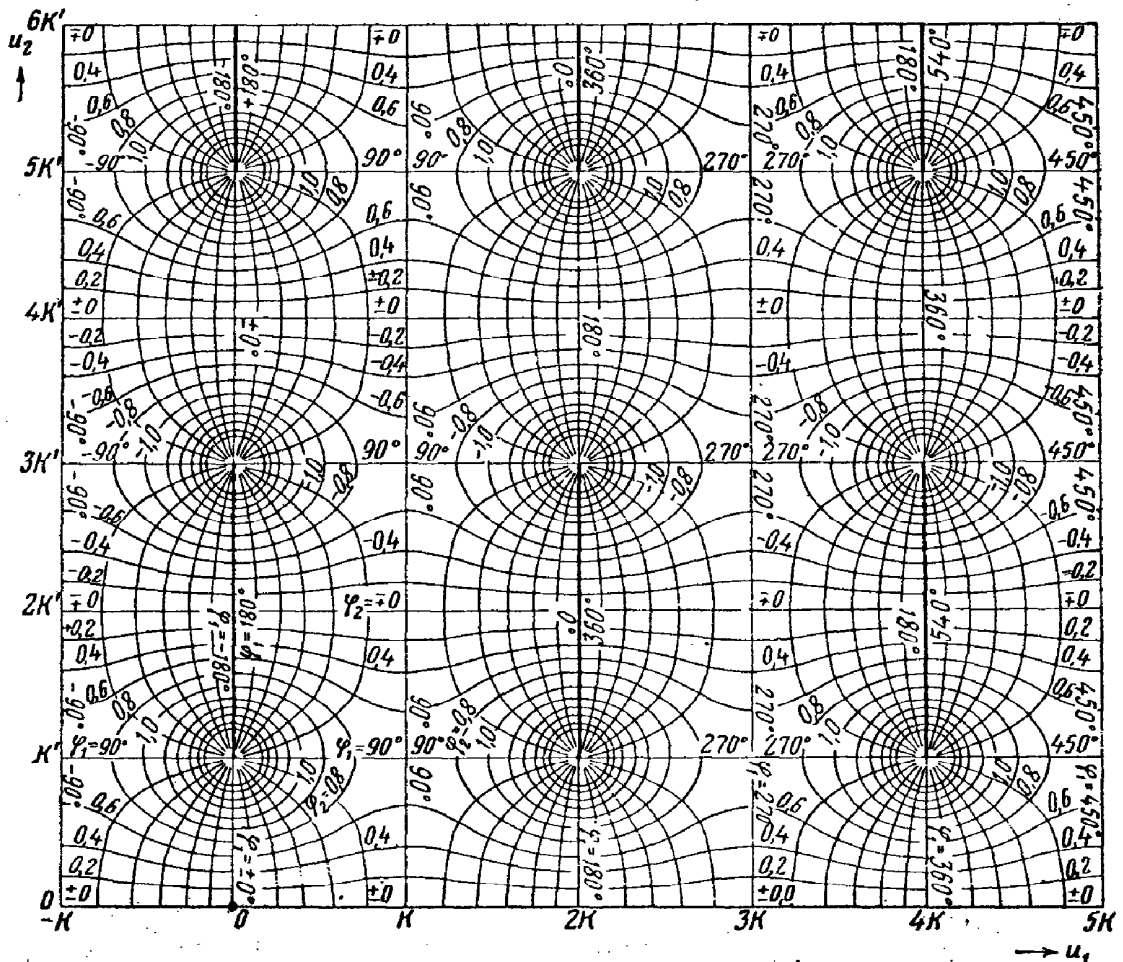


Рис. 61. Карта горизонталей рельефа амплитуды Якоби $\varphi_1+i\varphi_2=\operatorname{am}(u, k)$ при $k=0{,}8$ ($K=2{,}00$, $K'=1{,}75$). Обратите внимание на линии ветвления!

2. Функции Якоби $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$

Двоякопериодические функции Якоби получаются из $\varphi = \operatorname{am}(u, k)$ посредством формул

$$\operatorname{sn}(u, k) = \sin\varphi = \sin \operatorname{am}(u, k),$$
$$\operatorname{cn}(u, k) = \cos\varphi = \cos \operatorname{am}(u, k),$$
$$\operatorname{dn}(u, k) = \Delta(\varphi, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(u, k)}.$$

Парами основных периодов являются соответственно

$$4K,\ 2K'i;\quad 4K,\ 2K + 2K'i;\quad 2K,\ 4K'i.$$

Если эти функции рассматриваются как функции только одного аргумента

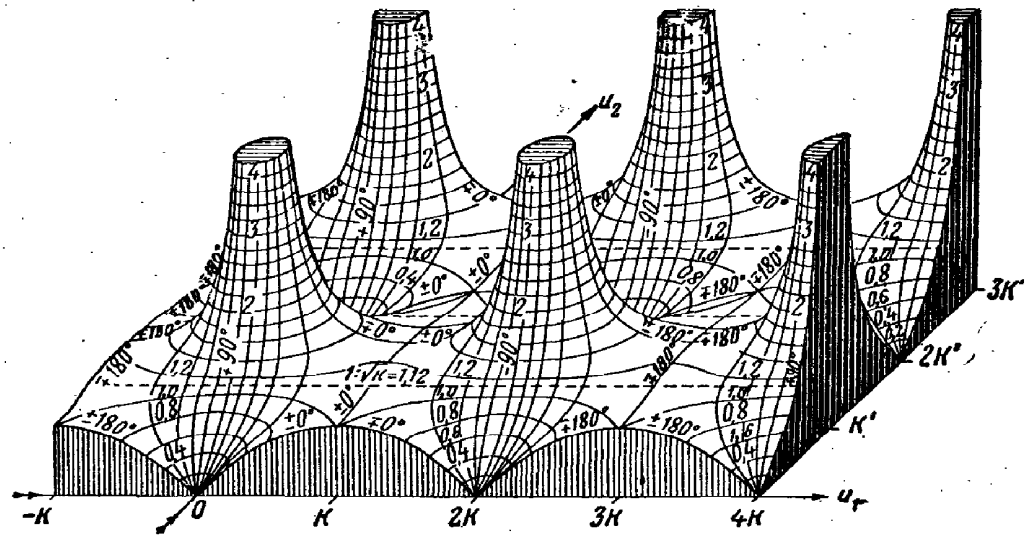


Рис. 62. Рельеф функции Якоби $\operatorname{sn} u$ при $k = 0{,}8$.

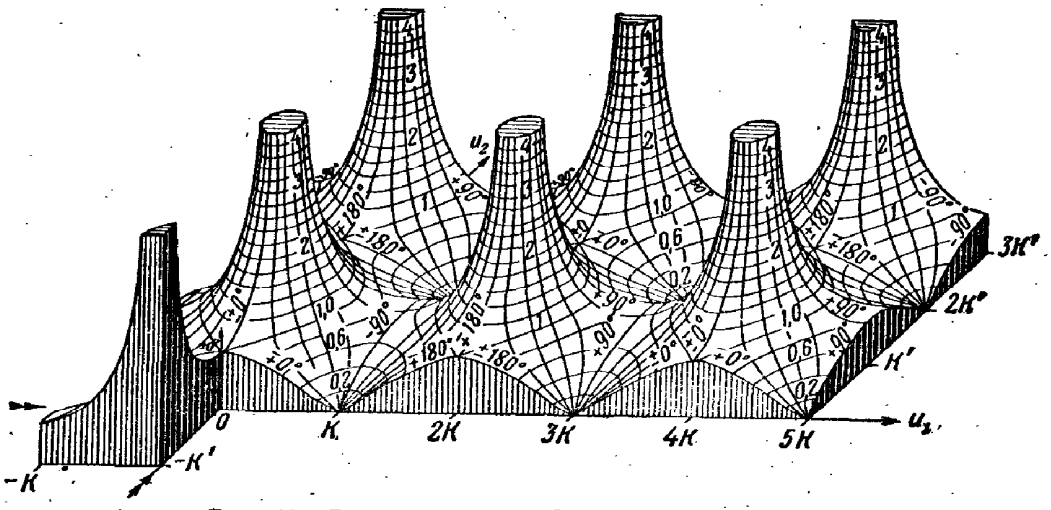


Рис. 63. Рельеф функции Якоби $\operatorname{cn} u$ при $k = 0{,}8$.

$u = u_1 + iu_2$ при постоянном *модуле* k, то пишут для краткости $\operatorname{sn} u$ (рис. 62,65). $\operatorname{cn} u$ (рис. 63,66) $\operatorname{dn} u$ (рис. 64,67). Представления этих функций через тэта-функции см. в С, 4.3.

Отметим два исключительных случая:

$$k=0,\ k'=1:\quad \operatorname{sn} u=\sin u,\quad \operatorname{cn} u=\cos u,\quad \operatorname{dn} u=1,$$

$$\mathsf{K}=\frac{\pi}{2},\ \mathsf{K}'=\infty,\ \lim_{k\to 0}\frac{1}{k^2}e^{-\pi\mathsf{K}'/\mathsf{K}}=\frac{1}{16};$$

$$k=1,\ k'=0:\quad \varphi=\operatorname{gd} u,\ \operatorname{sn} u=\operatorname{th} u,\ \operatorname{cn} u=\operatorname{dn} u=\frac{1}{\operatorname{ch} u},$$

$$\mathsf{K}=\infty,\quad \mathsf{K}'=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{k\to 1}\frac{1}{1-k^2}e^{-\pi\mathsf{K}/\mathsf{K}'}=\frac{1}{16}.$$

3. Частные значения

$$\operatorname{sn}(0)=0,\quad \operatorname{cn}(0)=1,\quad \operatorname{dn}(0)=1.$$

	Нули	Полюсы	Вычеты
$\operatorname{sn} u$	$2m\mathsf{K}+2n\mathsf{K}'i$	$2m\mathsf{K}+(2n+1)\mathsf{K}'i$	$(-1)^m\,1/k$
$\operatorname{cn} u$	$(2m+1)\mathsf{K}+2n\mathsf{K}'i$	$2m\mathsf{K}+(2n+1)\mathsf{K}'i$	$(-1)^{m+n-1}\,i/k$
$\operatorname{dn} u$	$(2m+1)\mathsf{K}+(2n+1)\mathsf{K}'i$	$2m\mathsf{K}+(2n+1)\mathsf{K}'i$	$(-1)^{n-1}i$

Если $u=u_1+iu_2$ и $k>0$, то

$$\left|\operatorname{sn}\left(\frac{1}{2}\mathsf{K}'i+u_1+0i\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{k}},\quad \left|\operatorname{dn}\left(\frac{1}{2}\mathsf{K}+0+u_2 i\right)\right|=\sqrt{k'}.$$

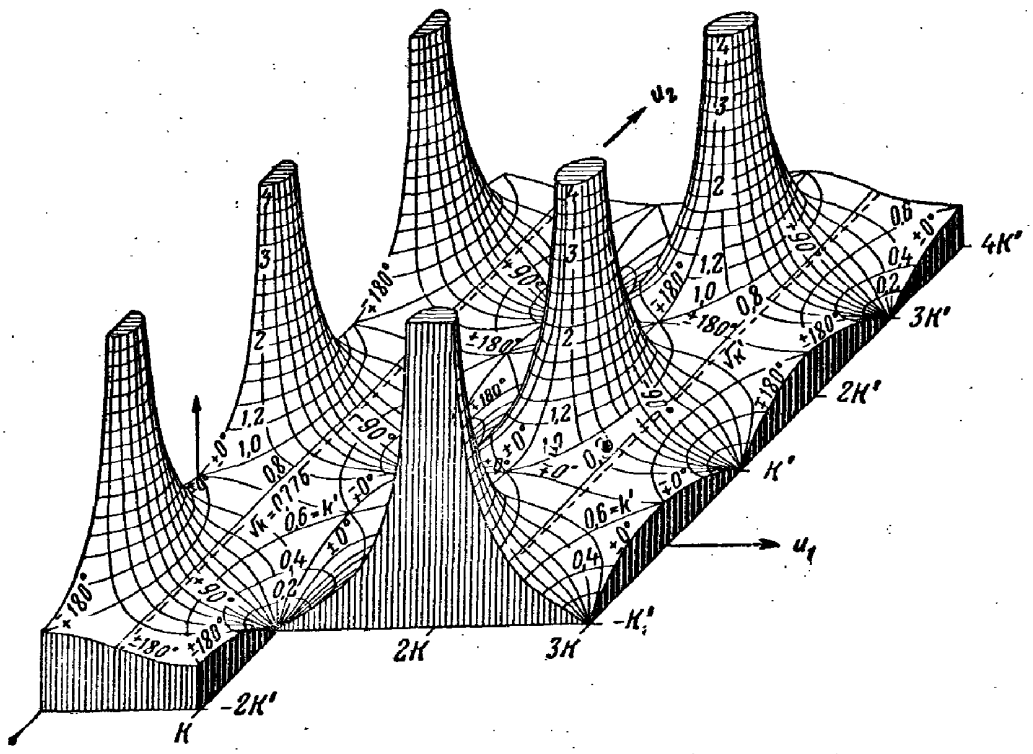


Рис. 64. Рельеф функции Якоби $\operatorname{dn} u$ при $k=0{,}8$.

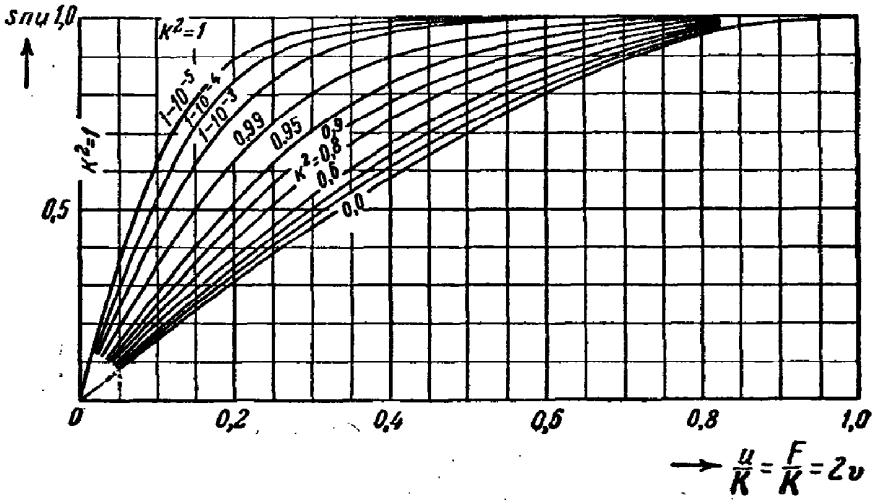


Рис. 65. sn (K·2v) как функция 2v.

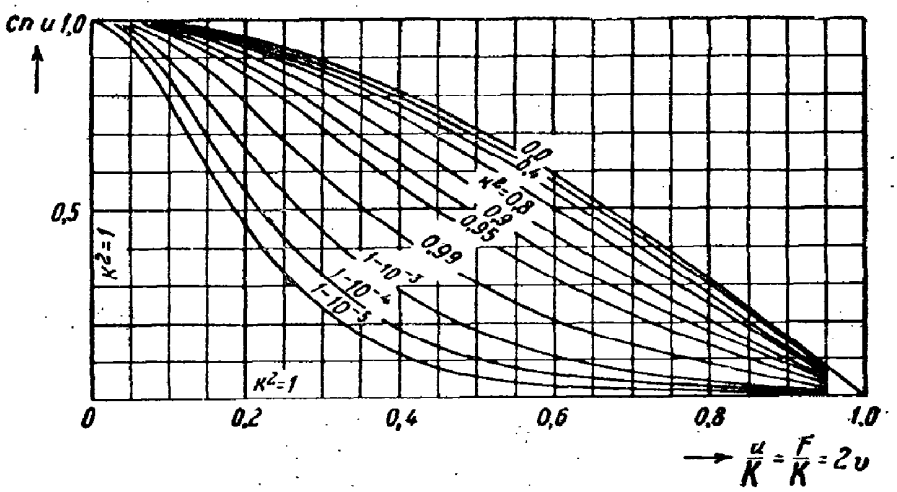


Рис. 66. cn (K·2v) как функция 2v.

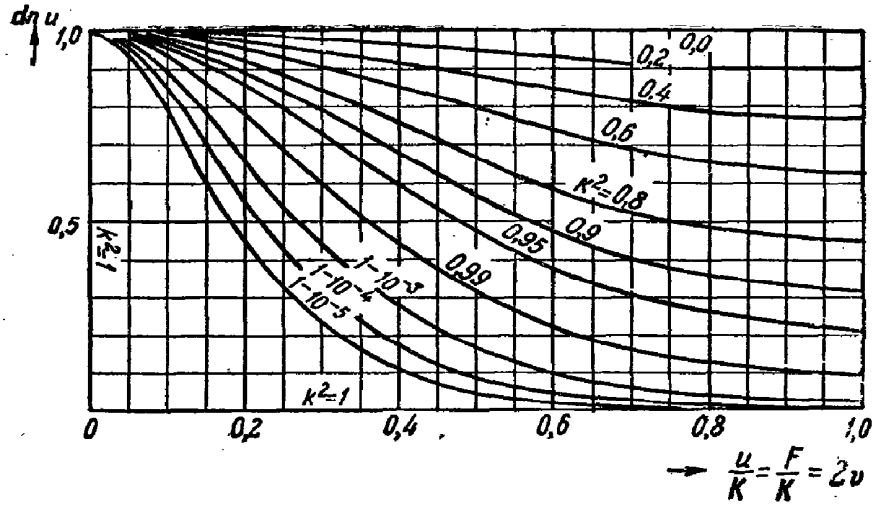


Рис. 67. dn (K·2v) как функция 2v.

4. Функциональные уравнения

4.1. Справедливы следующие равенства:

$$\operatorname{sn}(-u)=-\operatorname{sn}u,\quad \operatorname{cn}(-u)=\operatorname{cn}u,$$

$$\operatorname{dn}(-u)=\operatorname{dn}u,\quad \operatorname{sn}^2u+\operatorname{cn}^2u=1,$$

$$\operatorname{dn}^2u=1-k^2\operatorname{sn}^2u=k'^2+k^2\operatorname{cn}^2u=\operatorname{cn}^2u+k'^2\operatorname{sn}^2u,$$

$$\operatorname{sn}^2u=\frac{1-\operatorname{cn}2u}{1+\operatorname{dn}2u},\qquad \operatorname{cn}^2u=\frac{\operatorname{cn}2u+\operatorname{dn}2u}{1+\operatorname{dn}2u},\qquad \operatorname{dn}^2u=\frac{\operatorname{dn}2u+k^2\operatorname{cn}2u+k'^2}{1+\operatorname{dn}2u},$$

$$\operatorname{sn}(u\pm v)=\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v\pm\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v},\qquad \operatorname{sn}(iu,\ k)=i\frac{\operatorname{sn}(u,\ k')}{\operatorname{cn}(u,\ k')},$$

$$\operatorname{cn}(u\pm v)=\frac{\operatorname{cn}u\operatorname{cn}v\mp\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{dn}u\operatorname{dn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v},\qquad \operatorname{cn}(iu,\ k)=\frac{1}{\operatorname{cn}(u,\ k')},$$

$$\operatorname{dn}(u\pm v)=\frac{\operatorname{dn}u\operatorname{dn}v\mp k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{cn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v},\qquad \operatorname{dn}(iu,\ k)=\frac{\operatorname{dn}(u,\ k')}{\operatorname{cn}(u,\ k')},$$

$$(1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v)\times\begin{cases}\operatorname{sn}(u+v)\operatorname{sn}(u-v)=\operatorname{sn}^2u-\operatorname{sn}^2v,\\ \operatorname{cn}(u+v)\operatorname{cn}(u-v)=\operatorname{cn}^2u-\operatorname{sn}^2v\operatorname{dn}^2u,\\ \operatorname{dn}(u+v)\operatorname{dn}(u-v)=\operatorname{dn}^2u-k^2\operatorname{sn}^2v\operatorname{cn}^2u.\end{cases}$$

4.2. Изменение функций при возрастании аргумента u на четверть- и полупериод берется из следующих таблиц, в которых для краткости написано s, c, d вместо $\operatorname{sn}u$, $\operatorname{cn}u$, $\operatorname{dn}u$:

$\operatorname{sn}(m\mathrm{K}+n\mathrm{K}'i+u)$

	$-\mathrm{K}$	0	$+\mathrm{K}$	$\pm2\mathrm{K}$
$\pm i\mathrm{K}'$	$\frac{-d}{kc}$	$\frac{1}{ks}$	$\frac{d}{kc}$	$\frac{-1}{ks}$
0	$-\frac{c}{d}$	s	$\frac{c}{d}$	$-s$

$\operatorname{cn}(m\mathrm{K}+n\mathrm{K}'i+u)$

	$-\mathrm{K}$	0	$+\mathrm{K}$	$\pm2\mathrm{K}$
$+i\mathrm{K}'$	$\frac{ik'}{kc}$	$\frac{d}{iks}$	$\frac{k'}{ikc}$	$\frac{id}{ks}$
0	$k'\frac{s}{d}$	c	$-k'\frac{s}{d}$	$-c$
$-i\mathrm{K}'$	$\frac{k'}{ikc}$	$\frac{id}{ks}$	$\frac{ik'}{kc}$	$\frac{d}{iks}$

$\operatorname{dn}(m\mathrm{K}+n\mathrm{K}'i+u)$

	0	$\pm\mathrm{K}$
$\pm2i\mathrm{K}'$	$-d$	$-\frac{k'}{d}$
$+i\mathrm{K}$	$\frac{c}{is}$	$ik'\frac{s}{c}$
0	d	$\frac{k'}{d}$
$-i\mathrm{K}$	$\frac{ic}{s}$	$\frac{k's}{is}$

4.3. Функции $\operatorname{cn}u$, $\operatorname{dn}u$ выражаются через $\operatorname{sn}u$ посредством соотношений

$$\operatorname{cn}(u,\ k)=\operatorname{sn}\left(k'\mathrm{K}+k'u,\ \frac{ik}{k'}\right),$$

$$\operatorname{dn}(u,\ k)=k'\operatorname{sn}(\mathrm{K}'-i\mathrm{K}+iu,\ k').$$

Для перехода от одного модуля к другому имеем таблицу, где для краткости вместо $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$ пишем соответственно s, c, d:

u_1	k_1	$\operatorname{sn}(u_1, k_1)$	$\operatorname{cn}(u_1, k_1)$	$\operatorname{dn}(u_1, k_1)$
ku	$\frac{1}{k}$	ks	d	c
iu	k'	$\frac{is}{c}$	$\frac{1}{c}$	$\frac{d}{c}$
$k'u$	$\frac{ik}{k'}$	$\frac{k's}{d}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{1}{d}$
iku	$\frac{ik'}{k}$	$\frac{iks}{d}$	$\frac{1}{d}$	$\frac{c}{d}$
$ik'u$	$\frac{1}{k'}$	$\frac{ik's}{c}$	$\frac{d}{c}$	$\frac{1}{c}$
$(1+k)u$	$\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$	$\frac{(1+k)s}{1+ks^2}$	$\frac{cd}{1+ks^2}$	$\frac{1-ks^2}{1+ks^2}$
$(1+k')u$	$\frac{1-k'}{1+k'}$	$(1+k')\frac{sc}{d}$	$\frac{1-(1+k')s^2}{d}$	$\frac{1-(1-k')s^2}{d}$
$\frac{(1+\sqrt{k'})^2 u}{2}$	$\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2$	$\frac{k^2 sc}{\sqrt{k_1}(1+d)(k'+d)}$	$\frac{d-\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\sqrt{\frac{2}{1+d}\frac{1+k'}{k'+d}}$	$\frac{\sqrt{1+k_1}(d+\sqrt{k'})}{\sqrt{1+d}\sqrt{k'+d}}$

4.4. Формулы дифференцирования и дифференциальные уравнения:

$$\frac{d\operatorname{am} u}{du} = \operatorname{dn} u,\quad \frac{d\operatorname{sn} u}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,\quad \frac{d\operatorname{cn} u}{du} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,\quad \frac{d\operatorname{dn} u}{du} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u,$$

$$\left(\frac{d\operatorname{sn} u}{du}\right)^2 = (1-\operatorname{sn}^2 u)(1-k^2\operatorname{sn}^2 u),\quad \left(\frac{d\operatorname{cn} u}{du}\right)^2 = (1-\operatorname{cn}^2 u)(k'^2+k^2\operatorname{cn}^2 u),$$

$$\left(\frac{d\operatorname{dn} u}{du}\right)^2 = (1-\operatorname{dn}^2 u)(\operatorname{dn}^2 u - k'^2).$$

4.5. Формулы интегрирования:

$$k\int_0^u \operatorname{sn} u\, du = \ln\frac{\operatorname{dn} u - k\operatorname{cn} u}{1-k} = -\ln\frac{\operatorname{dn} u + k\operatorname{cn} u}{1+k} = \operatorname{Arch}\left(\frac{\operatorname{dn} u - k^2\operatorname{cn} u}{1-k^2}\right) =$$

$$= \operatorname{Arch}\frac{1}{k'} - \operatorname{Arch}\frac{d}{k'} = \operatorname{Arsh}\left(k\frac{\operatorname{dn} u - \operatorname{cn} u}{1-k^2}\right) = \operatorname{Arsh}\frac{k}{k'} - \operatorname{Arsh}\frac{k\operatorname{cn} u}{k'},$$

$$k\int_0^u \operatorname{cn} u\, du = \arccos(\operatorname{dn} u) = \arcsin(k\operatorname{sn} u),\quad \int_0^u \operatorname{dn} u\, du = \arcsin(\operatorname{sn} u) = \operatorname{am} u,$$

$$\int_u^K \frac{du}{\operatorname{sn} u} = \ln\frac{\operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u}{k'\operatorname{sn} u},\quad k'\int_0^u \frac{du}{\operatorname{cn} u} = \ln\frac{\operatorname{dn} u + k'\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u},\quad \int_0^u \operatorname{dn}^2 u\, du = E(\operatorname{am} u, k),$$

$$k'\int_0^u \frac{du}{\operatorname{dn} u} = \arccos\left(\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}\right) = \arcsin\left(k'\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}\right),\quad k'\int_0^u \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}\, du = \ln\frac{\operatorname{dn} u + k'}{(1+k')\operatorname{cn} u},$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\, du = \ln\frac{1+\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u},\quad \int_u^K \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u}\, du = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} - k',\quad k'^2\int_0^u \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}^2 u}\, du = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} - 1,$$

$$k'^2\int_0^u \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn}^2 u}\, du = 1 - \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u},\quad \int_u^K \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^2 u}\, du = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u},\quad \int_0^u \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u}\, du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u},\quad \int_0^u \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^2 u}\, du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}.$$

5. Дзета-функция Якоби $\mathrm{zn}(u, k)$

Дзета-функция Якоби (рис. 68) определяется так:

$$\mathrm{zn}(u, k) = E(\mathrm{am}\, u, k) - \frac{E}{K} u = \int_0^u \mathrm{dn}^2(u, k)\, du - \frac{E}{K} u.$$

Она является периодической мероморфной функцией от u (модуль k считается постоянным) с одним периодом $2K$:

$$\mathrm{zn}\, u = -\mathrm{zn}(2K - u) = \mathrm{zn}(2K + u) = -\mathrm{zn}(-u).$$

Нули этой функции лежат в точках nK ($n = 0, \pm 1, \ldots$). О ее представлении с помощью тэта-функций см. С, 4.3.

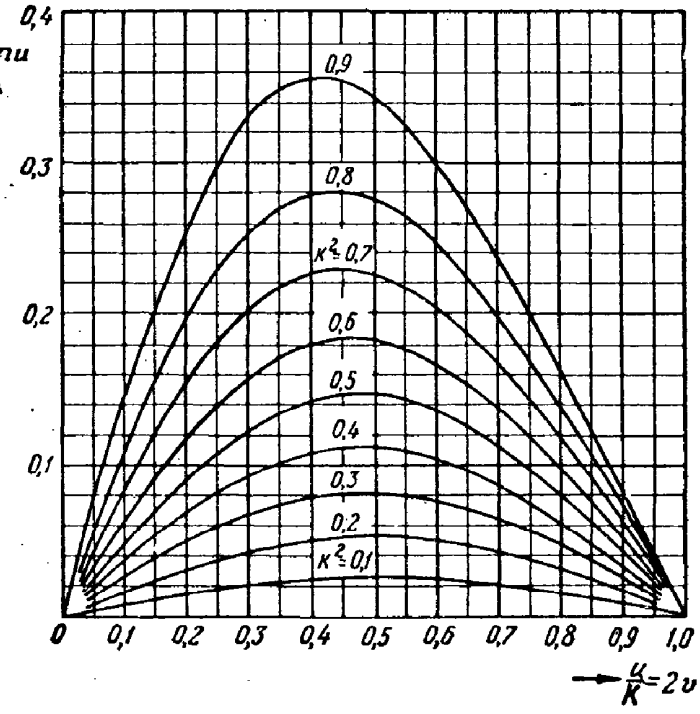


Рис. 68. $\mathrm{zn}(K \cdot 2v)$ как функция $2v$.

В. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА

1. Функции Вейерштрасса $\wp u$, ζu, σu

Нормальной формой Вейерштрасса эллиптического интеграла 1-го рода называется

$$u = \int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}},$$

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3 = 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3).$$

Обратная функция называется *эллиптической функцией Вейерштрасса* и обозначается через

$$s = \wp u = \wp(u;\ g_2,\ g_3).$$

Она является двоякопериодической функцией комплексного аргумента $u = u_1 + iu_2$ (рис. 69) с основными периодами 2ω, $2\omega'$, которые для действительных $e_1 > e_2 > e_3$ даются равенствами

$$2\omega = 2\int_{e_1}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}}, \qquad 2\omega' = 2i\int_{-\infty}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{-S}}.$$

Величины g_2, g_3 называются *инвариантами* функции. Инварианты g_2, g_3, нули e_1, e_2, e_3 полинома S и периоды ω, ω' связаны равенствами ($\sum'$ означает суммирование по всем отличным от нуля периодам $w = 2m\omega + 2n\omega'$; $m, n = 0, \pm 1, \ldots$):

$$g_2 = -4(e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2) = 60\sum' \frac{1}{w^4}; \quad g_3 = 4e_1e_2e_3 = 140\sum' \frac{1}{w^6};$$

$$e_1 = \wp(\omega), \quad e_2 = \wp(\omega + \omega'), \quad e_3 = \wp(\omega'); \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Дзета-функция Вейерштрасса ζu и сигма-функция σu определяются как

$$\wp u = -\frac{d\zeta u}{du} = -\frac{d^2 \ln \sigma u}{du^2},$$

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \int_0^u \left(\wp u - \frac{1}{u^2}\right) du, \qquad \sigma u = u e^{\int_0^u \left(\zeta u - \frac{1}{u}\right) du}.$$

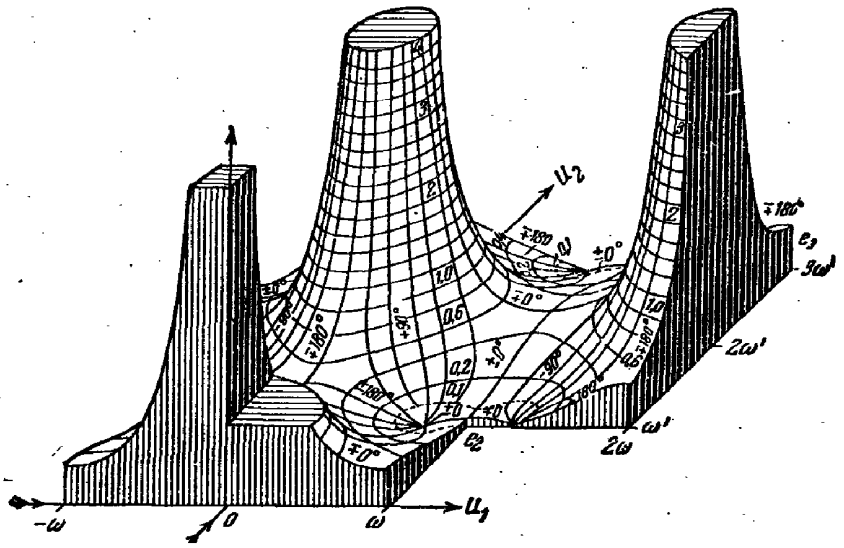


Рис. 69. Рельеф функции Вейерштрасса $\wp u$ при $\omega = K = 2{,}00$, $\omega' = iK' = 1{,}75i$, $k = 0{,}8$, $k' = 0{,}6$, $e_1 = 0{,}453 = 1 + e_3$, $e_2 = 0{,}093$, $e_3 = -0{,}546$, $g_2 = 1{,}026$, $g_3 = -0{,}092$.

Для действительных нулей $e_1 \geqslant e_2 \geqslant e_3$ полинома S возможны следующие частные случаи:

$$e_1 = e_2 = -\frac{e_3}{2} \ (>0): \begin{cases} g_2 = 3e_3^2, & \omega = \infty, \\ g_3 = e_3^3, & \omega' = \dfrac{\pi i}{\sqrt{12 e_1}}, \end{cases}$$

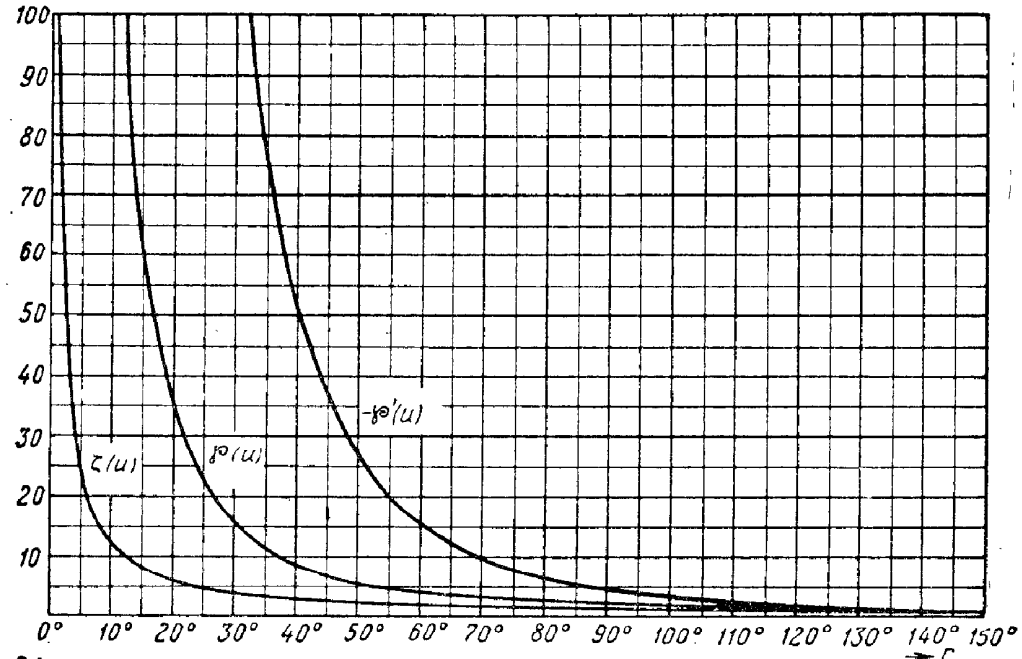
$$\wp u = -2e_1 + 3e_1 \operatorname{cth}^2 (\sqrt{3e_1}\, u),$$
$$\zeta u = -e_1 u + \sqrt{3e_1} \operatorname{cth} (\sqrt{3e_1}\, u),$$
$$\sigma u = \frac{1}{\sqrt{3e_1}} e^{-e_1 u^2/2} \operatorname{sh} (\sqrt{3e_1}\, u).$$

$$e_2 = e_3 = -\frac{e_1}{2} \ (<0): \begin{cases} g_2 = 3e_1^2, & \omega = \dfrac{\pi}{\sqrt{6e_1}}, \\ g_3 = e_1^3, & \omega' = \infty, \end{cases}$$

$$\wp u = e_1 + \frac{3}{2} e_1 \operatorname{ctg}^2 \left(\sqrt{\frac{3}{2} e_1}\, u\right),$$
$$\zeta u = \frac{1}{2} e_1 u + \sqrt{\frac{3}{2} e_1} \operatorname{ctg} \left(\sqrt{\frac{3}{2} e_1}\, u\right),$$
$$\sigma u = \frac{1}{\sqrt{3e_1/2}} e^{e_1 u^2/4} \sin \left(\sqrt{\frac{3}{2} e_1}\, u\right).$$

$e_1 = e_2 = e_3 = 0$: $\quad g_2 = g_3 = 0, \quad \omega = \omega' = \infty, \quad \wp u = \dfrac{1}{u^2}, \quad \zeta u = \dfrac{1}{u}, \quad \sigma u = u.$

[При $g_2 = 0$, $g_3 = 1$ получается так называемый *эквиангармонический* случай эллиптических функций (рис. 70, 71). В этом случае $e_1 = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt[3]{4}}$, $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} = 0{,}6300$, $e_3 = \dfrac{\varepsilon^2}{\sqrt[3]{4}}$, где 1, ε, ε^2 — кубические корни из единицы. Из $e_2 = \wp \omega_2$ определяется действительный полупериод $\omega_2 = 1{,}52995$.]



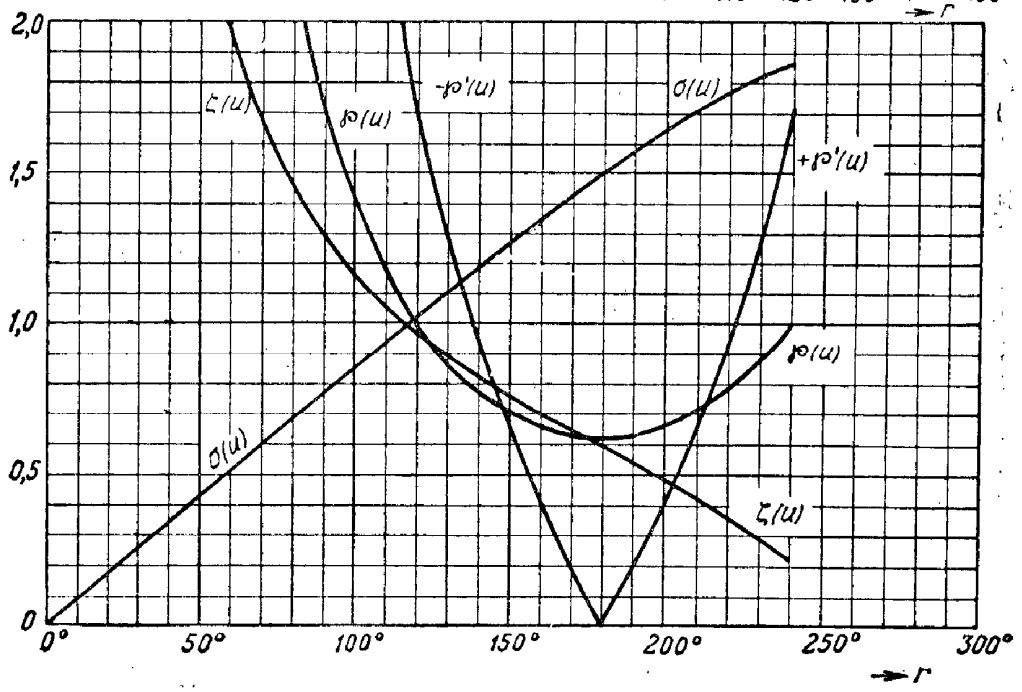


Рис. 70 и 71. Функции Вейерштрасса как функции $r = 180° \frac{u}{\omega_2}$ при $g_2 = 0$, $g_3 = 1$.

2. Представления

В окрестности $u = 0$ справедливы разложения в степенные ряды

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2 u}{10} + \frac{g_3 u^3}{7} + \frac{g_2^2 u^5}{200} + \frac{3 g_2 g_3 u^7}{770} + \ldots,$$

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2 u^2}{20} + \frac{g_3 u^4}{28} + \frac{g_2^2 u^6}{1200} + \frac{3 g_2 g_3 u^8}{6160} + \ldots,$$

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \frac{g_2 u^3}{60} - \frac{g_3 u^5}{140} - \frac{g_2^2 u^7}{8400} - \ldots, \qquad \sigma u = u - \frac{g_2 u^5}{240} - \frac{g_3 u^7}{840} - \frac{g_2^2 u^9}{161\,280} - \ldots$$

3. Функциональные уравнения

3.1. Формулы интегрирования:

$$\int \wp u\,du = -\zeta u, \qquad \int \wp^2 u\,du = \frac{1}{6}\wp' u + \frac{1}{12} g_2 u,$$

$$\int \wp^3 u\,du = \frac{1}{120}\wp''' u - \frac{3}{20} g_2 \cdot \zeta u + \frac{1}{10} g_3 u,$$

$$\wp' v \int \frac{du}{\wp u - \wp v} = 2u \cdot \zeta v + \ln \frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)},$$

$$\frac{1}{2}[\wp' v]^2 \int \frac{du}{[\wp u - \wp v]^2} + \frac{1}{2}\wp'' v \int \frac{du}{\wp u - \wp v} + u \cdot \wp v = -\frac{1}{2}\zeta(u-v) - \frac{1}{2}\zeta(u+v),$$

$$\int \frac{\alpha\wp u + \beta}{\gamma\wp u + \delta}\,du = \frac{\alpha u}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2 \wp' v}\left[\ln\frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)} + 2u\cdot\zeta v\right] \qquad \left(\wp v = -\frac{\delta}{\gamma}\right).$$

3.2. Дифференциальные уравнения, приводящие к функциям Вейерштрасса:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3, \qquad x = \wp(u;\ g_2,\ g_3);$$

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = x^2(x-a)^2, \qquad x = \frac{a}{2} + \frac{27}{16}\wp'\left(\frac{u}{2};\ 0,\ g_3\right), \qquad g_3 = -\frac{64}{729}a^2;$$

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = (x^3 - 3ax^2 + 3x)^2, \qquad x = \frac{2}{a - 3\wp'(u;\ 0,\ g_3)}, \qquad g_3 = \frac{4-3a^2}{27};$$

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^4 = \frac{128}{3}(x+a^2)(x+b)^3, \qquad x = 6\wp^2(u;\ g_2,\ 0) - b, \qquad g_2 = \frac{2}{3}(a-b).$$

4. Соотношения между функциями Якоби и Вейерштрасса

Функции Якоби, соответствующие модулю

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \qquad (0 < k^2 < 1 \text{ для действительных } e_1 > e_2 > e_3)$$

могут быть выражены через $\wp u$

$$\operatorname{sn}(u\sqrt{e_1 - e_3}) = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{\wp u - e_3}}, \qquad \operatorname{cn}(u\sqrt{e_1 - e_3}) = \frac{\sqrt{\wp u - e_1}}{\sqrt{\wp u - e_3}},$$

$$\operatorname{dn}(u\sqrt{e_1 - e_3}) = \frac{\sqrt{\wp u - e_2}}{\sqrt{\wp u - e_3}}.$$

Наоборот,

$$\wp u = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(u\sqrt{e_1 - e_3})}.$$

Для периодов имеем соотношения:

$$\omega = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \qquad \omega' = \frac{iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \qquad \tau = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{iK'}{K}.$$

C. ТЭТА-ФУНКЦИИ

1. Определение и представления

Тэта-функции для комплексного переменного v и комплексного параметра $\varkappa$ при $\operatorname{Re}\varkappa > 0$ определяются посредством рядов

$$\vartheta_1(v,\ \varkappa) = 2q^{\frac{1}{4}}(\sin\pi v - q^2\sin 3\pi v + q^6 \sin 5\pi v - \ldots) =$$

$$= i\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)\pi v i},$$

$$\vartheta_1(v,\ \varkappa)=2q^{\frac{1}{4}}(\cos\pi v+q^2\cos 3\pi v+q^6\cos 5\pi v+\ldots)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}e^{(2n-1)\pi vi},$$

$$\vartheta_2(v,\ \varkappa)=1+2(q\cos 2\pi v+q^4\cos 4\pi v+q^9\cos 6\pi v+\ldots)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}q^{n^2}e^{2n\pi vi},$$

$$\vartheta_4(v,\ \varkappa)=1-2(q\cos 2\pi v-q^4\cos 4\pi v+q^9\cos 6\pi v-\ldots)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{n^2}e^{2n\pi vi}.$$

Здесь $q=e^{-\pi\varkappa}$, а под $q^{1/4}$ понимают однозначно определенное значение $e^{-\frac{1}{4}\pi\varkappa}$; можно также представить $q=e^{i\pi\tau}$, где $\tau=\tau_1+i\tau_2=i\varkappa$ $(\tau_2>0)$.

Если параметр $\varkappa$ фиксирован, то вместо $\vartheta_n(v,\ \varkappa)$ пишут сокращенно $\vartheta_n(v)$. Функцию $\vartheta_4(v)$ обозначают также через $\vartheta(v)$ или $\vartheta_0(v)$. Тэта-функции являются целыми трансцендентными функциями.

Логарифмическими производными по v будут:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d\ln\vartheta_3(v)}{dv}\\[2mm]\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d\ln\vartheta_4(v)}{dv}\end{array}\right\}=\mp\frac{\sin 2\pi v}{\operatorname{sh}\pi\varkappa}+\frac{\sin 4\pi v}{\operatorname{sh}2\pi\varkappa}\mp\frac{\sin 6\pi v}{\operatorname{sh}3\pi\varkappa}+\ldots,$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d\ln\vartheta_2}{dv}+\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\pi v\\[2mm]\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d\ln\vartheta_1}{dv}-\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\pi v\end{array}\right\}=\mp\frac{\sin 2\pi v}{\operatorname{sh}\pi\varkappa}+q^2\frac{\sin 4\pi v}{\operatorname{sh}2\pi\varkappa}\mp q^6\frac{\sin 6\pi v}{\operatorname{sh}3\pi\varkappa}+\ldots$$

2. Частные значения

2.1. Нули тэта-функций даны в таблице (m, n—целые числа)

$\vartheta_1(v,\ \varkappa)$	$\vartheta_2(v,\ \varkappa)$	$\vartheta_3(v,\ \varkappa)$	$\vartheta_4(v,\ \varkappa)$
$m+n\varkappa i$	$m+\frac{1}{2}+n\varkappa i$	$m+\frac{1}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\varkappa i$	$m+\left(n+\frac{1}{2}\right)\varkappa i$

2.2. Значения тэта-функций $\vartheta_n(v)$ и их производных $\vartheta_n'(v)$ по v при $v=0$ обозначаются без указания аргумента: $\vartheta_n(0)=\vartheta_n$; $\vartheta_n'(0)=\vartheta_n'$.

Имеют место формулы:

$$\vartheta_1'=2\pi q^{\frac{1}{4}}(1-3q^2+5q^6-7q^{12}+\ldots),\qquad \vartheta_3=1+2q+2q^4+2q^9+\ldots,$$

$$\vartheta_2=2q^{\frac{1}{4}}(1+q^2+q^6+q^{12}+\ldots),\qquad \vartheta_4=1-2q+2q^4-2q^9+\ldots,$$

$$\vartheta_2^4+\vartheta_4^4=\vartheta_3^4,\qquad \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}=\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}+\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}+\frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4},\qquad \vartheta_1'=\pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4.$$

$$-\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}=\pi^2\frac{1-3^3q^2+5^3q^6-\ldots}{1-3q^2+5q^6-\ldots},\qquad -\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}=8\pi^2\frac{q+4q^4+9q^9+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots},$$

$$-\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}=\pi^2\frac{1+3^2q^2+5^2q^6+\ldots}{1+q^2+q^6+\ldots},\qquad +\frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4}=8\pi^2\frac{q-4q^4+9q^9-\ldots}{1-2q+2q^4-2q^9+\ldots}.$$

3. Функциональные уравнения

3.1. Тэта-функции удовлетворяют соотношениям симметрии

$$\begin{matrix}\vartheta_1(-v)=-\vartheta_1(v),\\ \vartheta_n(-v)=\vartheta_n(v)\end{matrix}\quad (n=2,\ 3,\ 4).$$

3.2. Тэта-функции являются периодическими функциями: для $\vartheta_1(v)$ и $\vartheta_2(v)$ период равен 2, для $\vartheta_3(v)$ и $\vartheta_4(v)$ равен 1. Если обозначить

$$\frac{1}{M}=q^{\frac{1}{4}}e^{\pi vi},\quad \frac{1}{N}=qe^{2\pi vi},$$

то следующая таблица показывает изменение ϑ-функций при сдвигах аргумента v и их связь между собой:

v_1	$\vartheta_3(v_1)$	$\vartheta_4(v_1)$	$\vartheta_2(v_1)$	$\vartheta_1(v_1)$
$-v$	$\vartheta_3(v)$	$\vartheta_4(v)$	$\vartheta_2(v)$	$-\vartheta_1(v)$
$v\pm\frac{1}{2}$	$\vartheta_4(v)$	$\vartheta_3(v)$	$\mp\vartheta_1(v)$	$\pm\vartheta_2(v)$
$v+\frac{i\varkappa}{2}$	$M\vartheta_2(v)$	$iM\vartheta_1(v)$	$M\vartheta_3(v)$	$iM\vartheta_4(v)$
$v+\frac{1}{2}+\frac{i\varkappa}{2}$	$iM\vartheta_1(v)$	$M\vartheta_2(v)$	$-iM\vartheta_4(v)$	$M\vartheta_3(v)$
$v\pm1$	$\vartheta_3(v)$	$\vartheta_4(v)$	$-\vartheta_2(v)$	$-\vartheta_1(v)$
$v+i\varkappa$	$N\vartheta_3(v)$	$-N\vartheta_4(v)$	$N\vartheta_2(v)$	$-N\vartheta_1(v)$
$v-1-i\varkappa$	$N\vartheta_3(v)$	$-N\vartheta_4(v)$	$-N\vartheta_2(v)$	$-N\vartheta_1(v)$

3.3. Обозначим для краткости

$$F=\varkappa^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\pi v^2}{\varkappa}},\qquad G=\varkappa^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\pi v^2}{\varkappa+i}}.$$

Тэта-функции как функции v и $\varkappa$ следующим образом изменяются при переходе от одних значений аргументов v, $\varkappa$ к другим:

v_1	$\varkappa$	$\vartheta_3(v_1,\varkappa_1)$	$\vartheta_4(v_1,\varkappa_1)$	$\vartheta_2(v_1,\varkappa_1)$	$\vartheta_1(v_1,\varkappa_1)$
$\frac{v}{\varkappa i}$	$\frac{1}{\varkappa}$	$F\vartheta_3(v,\varkappa)$	$F\vartheta_2(v,\varkappa)$	$F\vartheta_4(v,\varkappa)$	$-iF\vartheta_1(v,\varkappa)$
$\frac{v}{1-i\varkappa}$	$\frac{\varkappa}{1-i\varkappa}$	$G\vartheta_2(v,\varkappa)$	$\sqrt{i}\,G\vartheta_4(v,\varkappa)$	$G\vartheta_3(v,\varkappa)$	$\sqrt{i}\,G\vartheta_1(v,\varkappa)$
v	$1+i\varkappa$	$\vartheta_4(v,\varkappa)$	$\vartheta_3(v,\varkappa)$	$\sqrt{i}\,\vartheta_2(v,\varkappa)$	$\sqrt{i}\,\vartheta_1(v,\varkappa)$

3.4. Тэта-функции являются решениями дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2\vartheta_n(v,\varkappa)}{\partial v^2}=4\pi\frac{\partial\vartheta_n(v,\varkappa)}{\partial\varkappa}.$$

4. Связь с эллиптическими функциями и эллиптическими интегралами. Модулярная функция

4.1. Между модулем k и отношением $\frac{K'(k)}{K(k)}$ соответствующих нормальных форм полных эллиптических интегралов существует соотношение, которое с помощью значений тэта-функций в нуле записывается в виде

$$k^2=\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4},\quad \text{где}\quad q=e^{-\pi\varkappa},\quad \varkappa=\frac{K'}{K}.$$

Функцию $k^2=\lambda(\tau)$, получаемую после подстановки $\tau=i\varkappa=\tau_1+i\tau_2$ в правую часть, называют *эллиптической модулярной функцией* (рис. 72—74). Для $|q|\ll 1$ получим:

$$k^2\approx 16q\,\frac{1+4q^2}{1+8q+24q^2}.$$

В таблице 33 тэта-функции $\vartheta_n(2v)$ и их производные даны прямо как функции α $(k=\sin\alpha)$ (рис. 75—78).

Первые члены рядов, определяющих ϑ-функции, дают приближенные значения, которые могут быть вычислены с помощью таблицы 35 и таблицы тригонометрических функций. Соответствующие поправки даны во вспомогательной таблице 34, которая допускает линейную интерполяцию.

Вычисление q для данного модуля k (рис. 79, таблица 35) может быть произведено посредством соответствующих нормальных форм интегралов K, K' (таблицы 29, 30). Соответствующие значения q получаются и непосредственно из ряда

$$q=\varepsilon+2\varepsilon^5+15\varepsilon^9+150\varepsilon^{13}+1707\varepsilon^{17}+\ldots,$$

$$2\varepsilon=\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}=\frac{1-\sqrt{\cos\alpha}}{1+\sqrt{\cos\alpha}}\qquad (k=\sin\alpha,\ k'=\cos\alpha).$$

4.2. Нормальные формы полных эллиптических интегралов могут быть представлены через значения тэта-функций в нуле, причем величина q для данного модуля k должна быть вычислена согласно 4.1. Для $k^2<\frac{1}{2}$ приближенно

$$\frac{2}{\pi}K=\vartheta_3^2\approx 1+4q,\qquad \frac{2}{\pi}kK=\vartheta_2^2\approx 4\sqrt{q},\qquad \frac{2}{\pi}k'K=\vartheta_4^2\approx 1-4q,$$

$$\frac{2}{\pi}E=-\frac{1}{\pi^2}\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}\frac{1}{\vartheta_3^2}=\frac{1+9q^2+25q^6+\ldots}{(1+q^2+q^6+\ldots)(1+2q+2q^4+\ldots)^2}\approx 1-4q,$$

$$\frac{4}{\pi}D=\frac{2}{\pi^2}\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^4}\frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4}=\frac{(1+2q+2q^4+\ldots)^2(1-4q^2+9q^6-\ldots)}{(1+q^2+q^6+\ldots)^4(1-2q+2q^4-\ldots)}\approx 1+6q.$$

Если $k^2>\frac{1}{2}$, то найдем q для модуля k' и положим $-\ln q=\Lambda$. Тогда при соответствующих значениях тэта-функций

$$K=\frac{\Lambda}{2}\vartheta_3^2,$$

$$E=\frac{1}{\vartheta_3^2}\left(1+\frac{\Lambda}{2}\frac{1}{\pi^2}\frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4}\right),$$

$$D=\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_4^4}\left[-1+\frac{\Lambda}{2}\left(\vartheta_3^4-\frac{1}{\pi^2}\frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4}\right)\right].$$

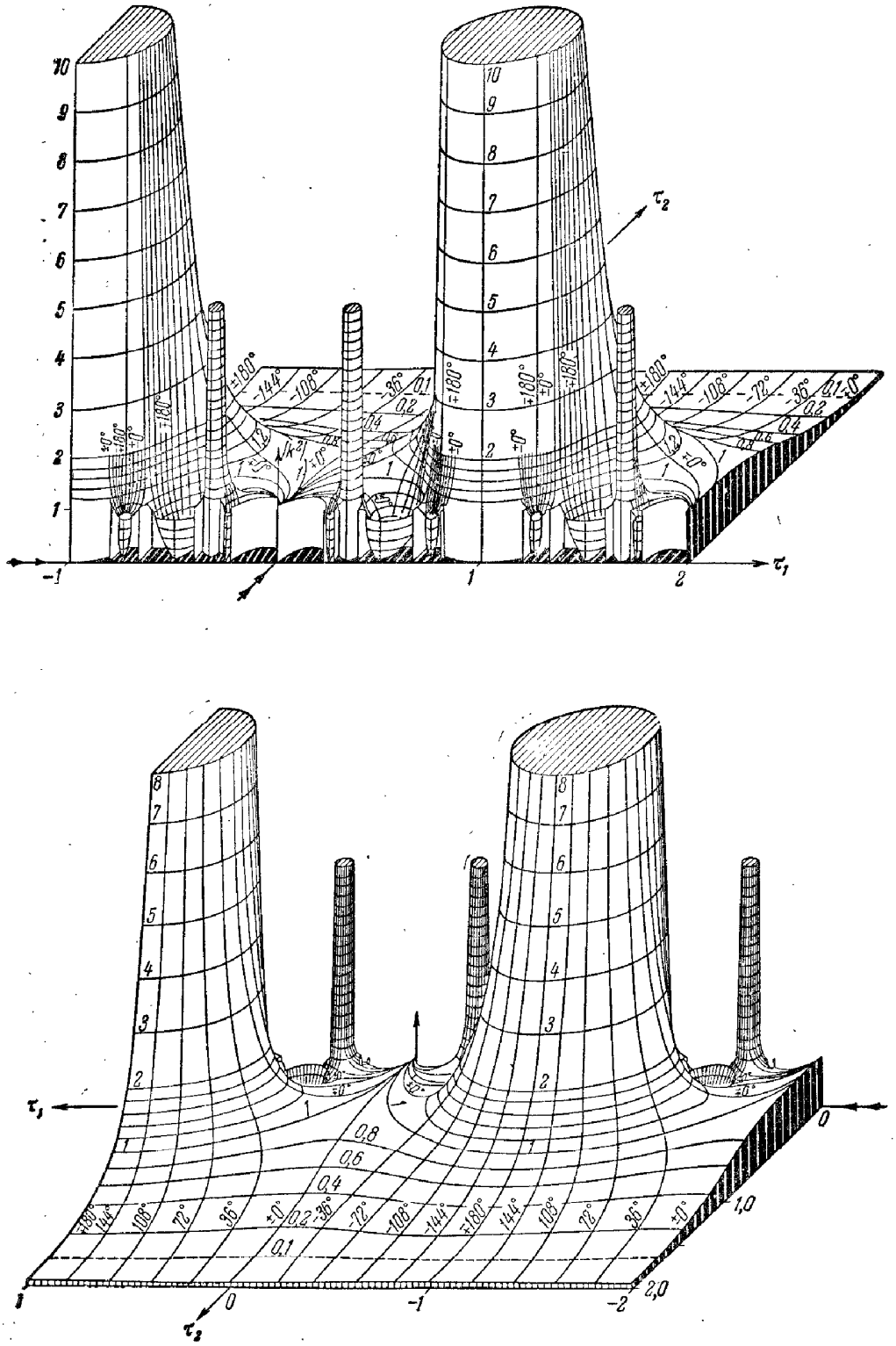


Рис. 72 и 73. Рельеф эллиптической модулярной функции $k^2=\lambda_1(\tau)$.

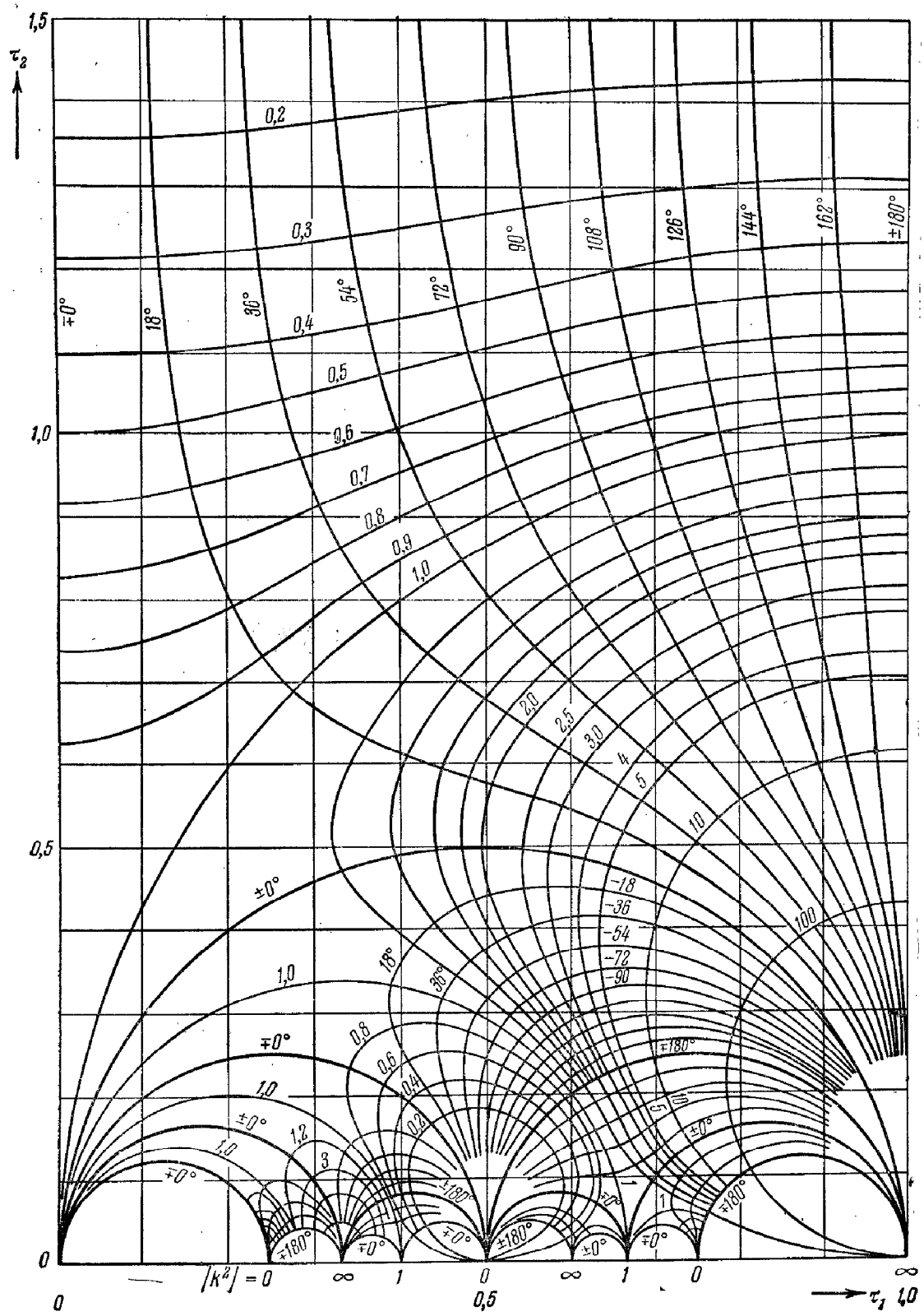


Рис. 74. Карта горизонталей рельефа эллиптической модулярной функции $k^2 = \lambda(\tau)$.

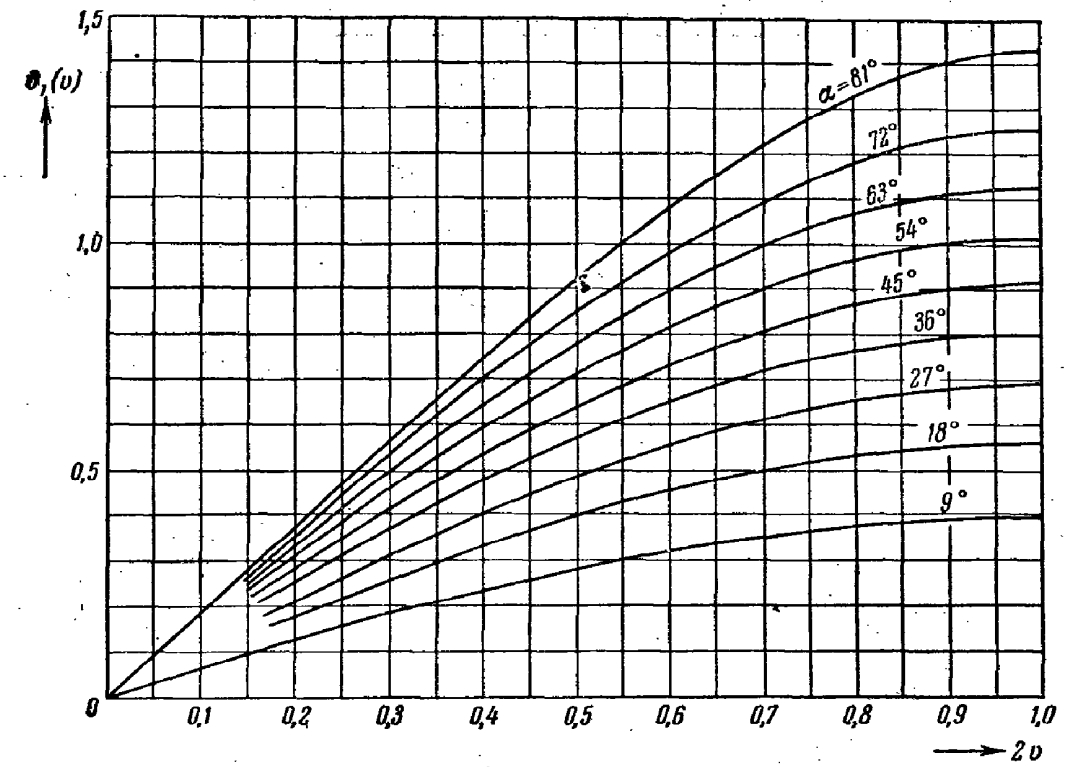


Рис. 75. Функции $\vartheta_1(v)=\vartheta_2(v_1)$, $2v+2v_1=1$.

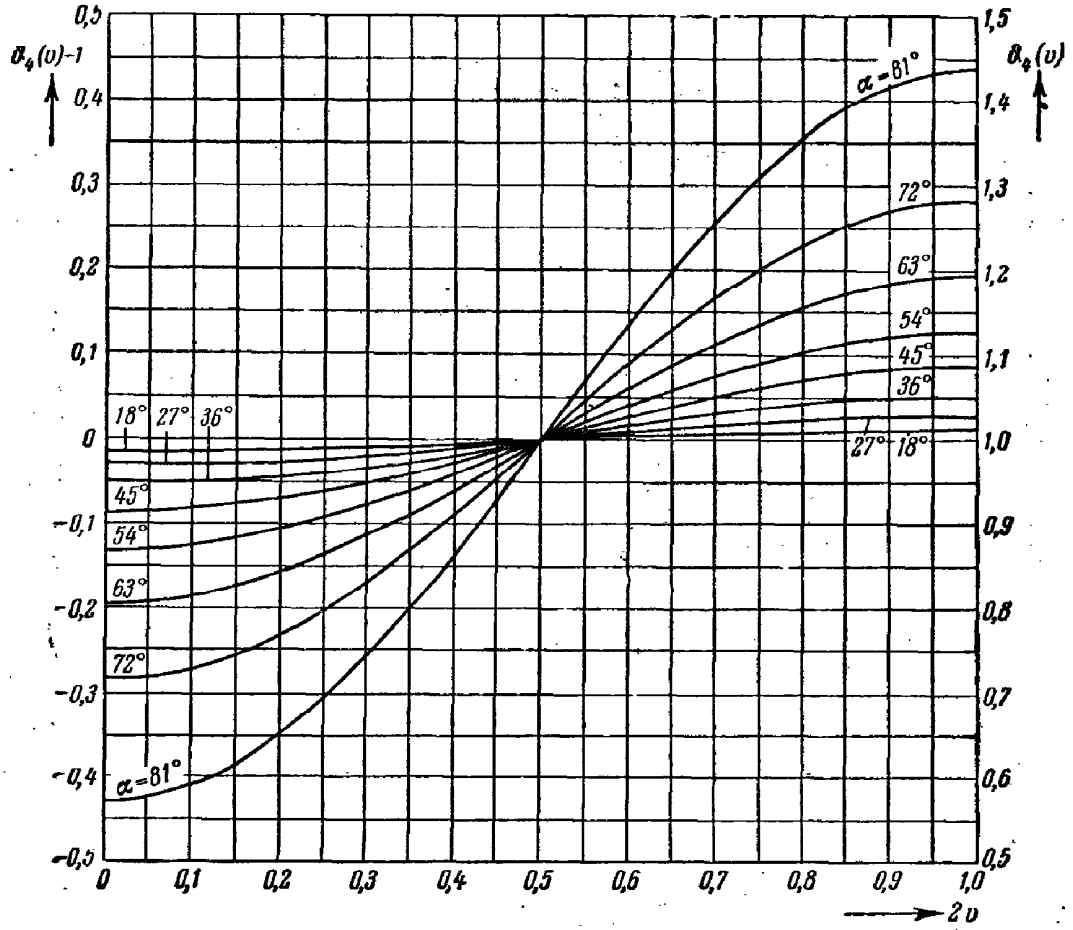


Рис. 76. Функции $\vartheta_4(v)=\vartheta_3(v_1)$, $2v+2v_1=1$.

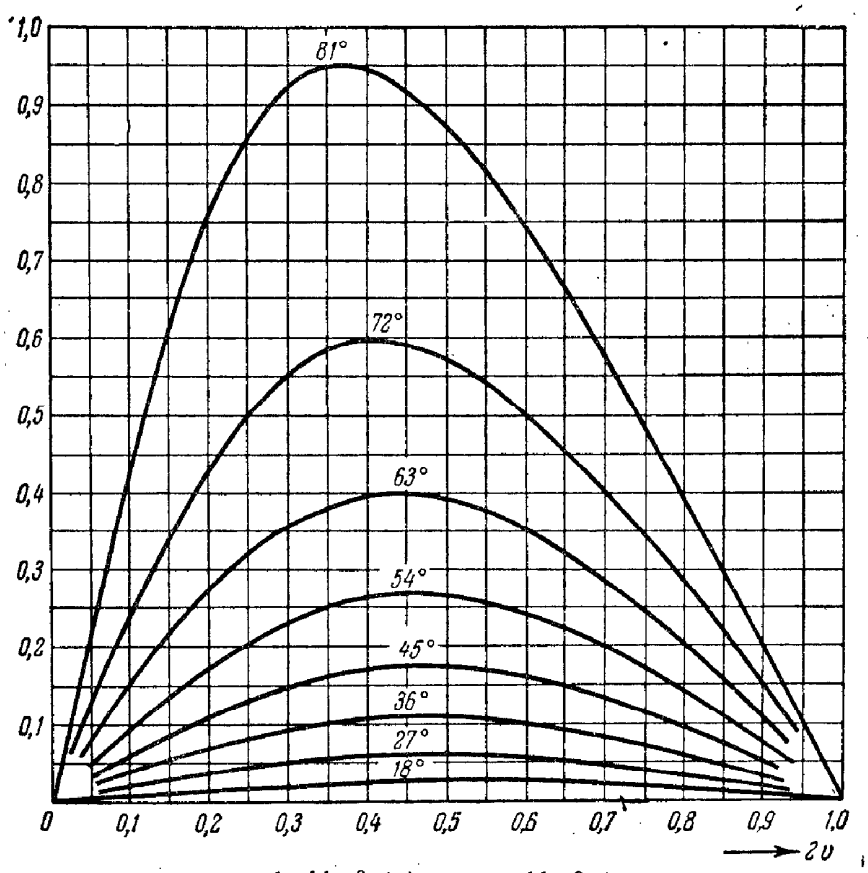


Рис. 77. Функции $\frac{1}{\pi}\frac{d\ln\vartheta_1(v)}{dv}=-\frac{1}{\pi}\frac{d\ln\vartheta_2(v)}{dv_1}$, $2v+2v_1=1$.

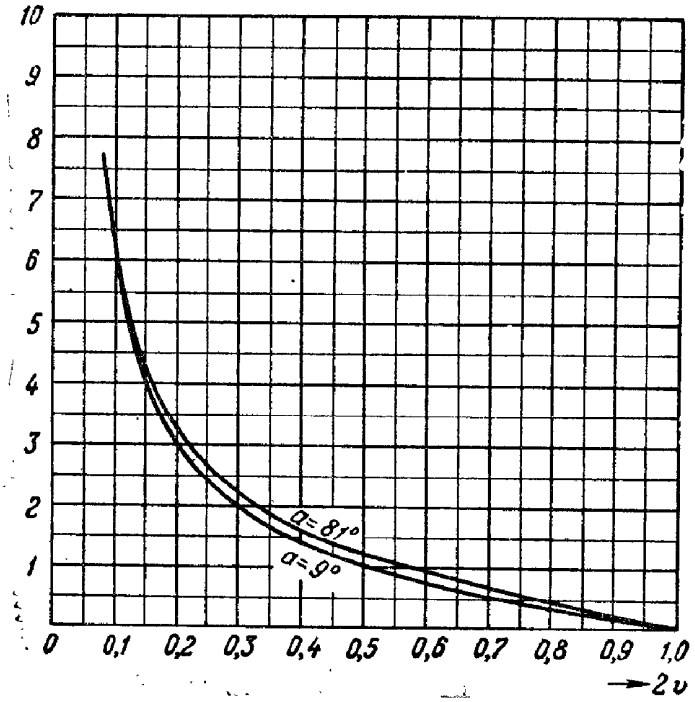


Рис. 78. Функции $\frac{1}{\pi}\frac{d\ln\vartheta_4(v)}{dv}=-\frac{1}{\pi}\frac{d\ln\vartheta_3(v_1)}{dv_1}$, $2v+2v_1=1$.

Таблица 33. Тэта-функции и их производные

$2v$	$\alpha = 0°$	9°	18°	27°	36°	45°	54°	63°	72°	81°	$2v_1$	
0,0	1,0000	0,9970	0,9874	0,9712	0,9471	0,9135	0,8680	0,8052	0,7152	0,5694	1,0	$\vartheta_4(v) = \vartheta_3(v_1)$
1	1,0000	0,9970	0,9881	0,9725	0,9497	0,9178	0,8744	0,8147	0,7290	0,5898	0,9	
2	1,0000	0,9975	0,9899	0,9766	0,9572	0,9300	0,8931	0,8424	0,7691	0,6494	0,8	
3	1,0000	0,9982	0,9927	0,9831	0,9689	0,9493	0,9223	0,8853	0,8318	0,7429	0,7	
4	1,0000	0,9991	0,9961	0,9911	0,9836	0,9732	0,9592	0,9397	0,9110	0,8619	0,6	
0,5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9956	0,5	
6	1,0000	1,001	1,004	1,009	1,016	1,027	1,041	1,060	1,088	1,131	0,4	
7	1,0000	1,002	1,007	1,017	1,031	1,051	1,078	1,115	1,168	1,254	0,3	
8	1,0000	1,003	1,010	1,023	1,043	1,070	1,107	1,158	1,231	1,353	0,2	
9	1,0000	1,003	1,012	1,028	1,050	1,082	1,126	1,186	1,272	1,417	0,1	
1,0	1,0000	1,003	1,013	1,029	1,053	1,086	1,132	1,195	1,286	1,439	0,0	
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0	$\vartheta_1(v) = \vartheta_2(v_1)$
1	0,0000	0,06206	0,08804	0,1084	0,1260	0,1419	0,1566	0,1700	0,1810	0,1843	0,9	
2	0,0000	0,1226	0,1739	0,2140	0,2488	0,2804	0,3098	0,3368	0,3597	0,3698	0,8	
3	0,0000	0,1801	0,2555	0,3145	0,3657	0,4123	0,4560	0,4968	0,5335	0,5563	0,7	
4	0,0000	0,2332	0,3308	0,4073	0,4736	0,5343	0,5917	0,6467	0,6989	0,7413	0,6	
0,5	0,0000	0,2805	0,3980	0,4900	0,5700	0,6436	0,7139	0,7827	0,8517	0,9200	0,5	
6	0,0000	0,3210	0,4553	0,5607	0,6524	0,7372	0,8188	0,9007	0,9870	1,085	0,4	
7	0,0000	0,3535	0,5015	0,6176	0,7188	0,8129	0,9041	0,9972	1,100	1,227	0,3	
8	0,0000	0,3773	0,5353	0,6592	0,7675	0,8682	0,9669	1,069	1,184	1,337	0,2	
9	0,0000	0,3918	0,5559	0,6847	0,7973	0,9022	1,005	1,113	1,237	1,407	0,1	
1,0	0,0000	0,3967	0,5629	0,6933	0,8074	0,9135	1,018	1,128	1,255	1,431	0,0	
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0	$\frac{d \ln \vartheta_3(v_1)}{\pi\, dv_1}$
1	0,0000	0,001920	0,007845	0,01833	0,03444	0,05806	0,09324	0,1473	0,2401	0,4380	0,9	
2	0,0000	0,003650	0,01490	0,03471	0,06502	0,1092	0,1737	0,2712	0,4333	0,7614	0,8	
3	0,0000	0,005020	0,02045	0,04747	0,08839	0,1473	0,2315	0,3555	0,5527	0,9247	0,7	
4	0,0000	0,005897	0,02396	0,05536	0,1024	0,1689	0,2613	0,3942	0,5947	0,9469	0,6	
0,5	0,0000	0,006194	0,02509	0,05769	0,1059	0,1729	0,2642	0,3899	0,5719	0,8742	0,5	$\frac{d \ln \vartheta_4(v)}{\pi\, dv} = -\frac{d \ln \vartheta_3(v_1)}{\pi\, dv_1}$
6	0,0000	0,005883	0,02377	0,05438	0,09906	0,1601	0,2415	0,3502	0,5011	0,7411	0,4	
7	0,0000	0,005002	0,02015	0,04589	0,08306	0,1331	0,1984	0,2836	0,3980	0,5748	0,3	
8	0,0000	0,003632	0,01460	0,03314	0,05968	0,09500	0,1404	0,1985	0,2748	0,3906	0,2	
9	0,0000	0,001909	0,007661	0,01735	0,03115	0,04945	0,07260	0,1020	0,1400	0,1972	0,1	
1,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0	
0,0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1,0	$\frac{d \ln \vartheta_2(v_1)}{\pi\, dv_1}$
1	6,3138	6,314	6,314	6,314	6,314	6,316	6,320	6,326	6,340	6,384	0,9	
2	3,0777	3,078	3,078	3,078	3,080	3,082	3,088	3,100	3,128	3,218	0,8	
3	1,9626	1,962	1,963	1,963	1,965	1,969	1,977	1,994	2,031	2,132	0,7	
4	1,3764	1,376	1,377	1,377	1,379	1,384	1,393	1,413	1,457	1,570	0,6	
0,5	1,0000	1,0000	1,0000	1,001	1,003	1,007	1,017	1,038	1,083	1,198	0,5	$\frac{d \ln \vartheta_1(v)}{\pi\, dv} = -\frac{d \ln \vartheta_2(v_1)}{\pi\, dv_1}$
6	0,7265	0,7266	0,7268	0,7273	0,7293	0,7337	0,7432	0,7628	0,8048	0,9099	0,4	
7	0,5095	0,5096	0,5097	0,5102	0,5118	0,5156	0,5236	0,5403	0,5753	0,6619	0,3	
8	0,3249	0,3249	0,3250	0,3254	0,3266	0,3293	0,3351	0,3473	0,3723	0,4336	0,2	
9	0,1584	0,1584	0,1584	0,1586	0,1593	0,1607	0,1638	0,1700	0,1831	0,2148	0,1	
1,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0	
$2v$	$\alpha = 0°$	9°	18°	27°	36°	45°	54°	63°	72°	81°	$2v_1$	

Таблица 34. Вспомогательная таблица для тэта-функций

$$\vartheta_4^*(v) = \vartheta_3^*(v_1)$$

2v	α=63°	72°	75°	78°	81°	82°	83°	84°	85°	86°	87°	87,5°	88°	88,5°	89°	2v₁
0,00	+0,2	+0,8	+1,4	+2,5	+4,5	+5,6	+7,0	+8,8	+11,5	+15,2	+21	+25	+31	+39	+52	1,00
05	0,2	0,8	1,3	2,3	4,3	5,3	6,6	8,4	10,9	14,5	20	24	29	37	50	0,95
10	0,1	0,7	1,1	2,0	3,6	4,5	5,6	7,2	9,3	12,3	17	20	25	32	42	90
15	0,1	0,5	0,8	1,4	2,6	3,3	4,1	5,2	6,7	9,0	12	15	18	23	31	85
20	+0,1	+0,3	+0,4	+0,8	+1,4	+1,7	+2,2	+2,7	+ 3,5	+ 4,7	+ 7	+ 8	+10	+12	+17	80
0,25	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0	0	0	0	0,75
30	−0,1	−0,3	−0,4	−0,8	−1,4	−1,7	−2,1	−2,7	− 3,5	− 4,7	− 6	− 8	− 9	−12	−16	70
35	0,1	0,5	0,8	1,4	2,6	3,3	4,1	5,2	6,7	8,9	12	15	18	23	31	65
40	0,1	0,7	1,1	2,0	3,6	4,5	5,6	7,2	9,3	12,3	17	20	25	32	42	60
45	0,2	0,8	1,3	2,3	4,3	5,3	6,6	8,4	10,9	14,5	20	24	30	37	50	55
0,50	−0,2	−0,8	−1,4	−2,5	−4,5	−5,6	−7,0	−8,9	−11,5	−15,2	−21	−25	−31	−39	−53	0,50
55	0,2	0,8	1,3	2,3	4,3	5,3	6,6	8,4	10,9	14,5	20	24	30	38	51	45
60	0,1	0,7	1,1	2,0	3,6	4,5	5,6	7,2	9,3	12,4	17	21	25	32	43	40
65	0,1	0,5	0,8	1,4	2,6	3,3	4,1	5,2	6,8	9,0	12	15	18	23	32	35
70	−0,1	−0,3	−0,4	−0,8	−1,4	−1,7	−2,2	−2,7	− 3,6	− 4,7	− 7	− 8	−10	−12	−17	30
0,75	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0	0	0	0	0,25
80	+0,1	+0,3	+0,4	+0,8	+1,4	+1,7	+2,2	+2,7	+ 3,5	+ 4,7	+ 6	+ 8	+10	+12	+16	20
85	0,1	0,5	0,8	1,4	2,6	3,3	4,1	5,2	6,7	9,0	12	15	18	23	31	15
90	0,1	0,7	1,1	2,0	3,6	4,5	5,6	7,2	9,3	12,4	17	21	25	32	43	10
95	0,2	0,8	1,3	2,3	4,3	5,3	6,6	8,4	10,9	14,5	20	24	30	38	51	05
1,00	+0,2	+0,8	+1,4	+2,5	+4,5	+5,6	+7,0	+8,9	+11,5	+15,3	+21	+25	+31	+40	+53	0,00

$$\vartheta_1^*(v) = \vartheta_2^*(v_1)$$

2v	α=54°	63°	72°	75°	78°	81°	82°	83°	83,5°	84°	84,5°	85°	85,5°	86°	86,5°	87°	2v₁
0,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,00
05	−1	− 2	− 6	− 8	−11	−15	−17	−19	−21	−22	− 24	− 25	− 27	− 30	− 32	− 35	0,95
10	2	5	11	15	21	29	33	37	40	43	46	49	53	58	63	69	90
15	3	7	16	22	30	42	47	54	57	61	66	71	76	83	90	99	85
20	4	9	20	27	37	52	59	67	71	76	82	88	95	103	112	123	80
0,25	−4	−10	−23	−31	−43	−60	−67	−76	−81	−87	− 94	−101	−109	−118	−129	−141	0,75
30	4	10	25	33	46	64	72	82	87	93	100	108	117	126	138	151	70
35	4	11	25	34	46	64	73	82	88	94	101	109	118	128	140	153	65
40	4	10	24	32	44	61	69	79	84	90	97	104	113	122	134	147	60
45	4	9	21	29	39	55	62	71	76	81	87	94	101	110	120	132	55
0,50	−3	− 8	−18	−24	−33	−46	−52	−59	−63	−67	− 72	− 78	− 84	− 92	−100	−110	0,50
55	2	6	13	18	24	34	38	44	47	50	54	58	63	68	75	82	45
60	−1	3	8	10	14	20	23	26	28	30	32	35	37	41	45	49	40
65	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 7	− 8	− 8	− 9	− 10	− 11	− 12	− 14	35
70	+1	+ 2	+ 4	+ 5	+ 7	+10	+11	+13	+14	+15	+ 16	+ 17	+ 18	+ 19	+ 21	+ 23	30
0,75	+2	+ 4	+10	+13	+18	+25	+28	+32	+34	+36	+ 39	+ 42	+ 45	+ 49	+ 53	+ 58	0,25
80	3	6	15	20	27	38	43	49	52	56	60	64	70	76	83	91	20
85	3	8	19	26	35	49	56	63	67	72	78	84	90	98	107	118	15
90	4	9	22	30	41	58	65	74	79	85	91	98	106	115	126	139	10
95	4	10	24	33	45	63	71	81	86	93	99	107	116	126	138	152	05
1,00	+4	+11	+25	+34	+46	+65	+73	+83	+89	+95	+102	+110	+119	+130	+142	+156	0,00

$$\vartheta_1(v) = 2q^{1/4}\sin\pi v + 10^{-3}\vartheta_1^*(v), \qquad \vartheta_2(v_1) = 2q^{1/4}\cos\pi v_1 + 10^{-3}\vartheta_2^*(v_1),$$
$$\vartheta_4(v) = 1 - 2q\cos 2\pi v + 10^{-3}\vartheta_4^*(v), \qquad \vartheta_3(v_1) = 1 + 2q\cos 2\pi v_1 + 10^{-3}\vartheta_3^*(v_1).$$

Таблица 35. Функция ln q

α	log q		α	log q		α	log q		α	log q		α	log q		α	log q	
				$\bar{4}$,			$\bar{3}$,			$\bar{3}$,			$\bar{3}$,			$\bar{2}$,	
0°,0	$-\infty$		5°,0	6781	+ 172	10°,0	2818	+ 87	15°,0	6368	+ 59	20°,0	8907	+ 44	25°,0	0897	+ 36
1	$\bar{7}$,2796		1	6953	169	1	2905	86	1	6427	58	1	8951	44	1	0933	36
2	$\bar{7}$,8817		2	7122	166	2	2991	86	2	6485	57	2	8995	44	2	0969	35
3	$\bar{6}$,2339		3	7288	163	3	3077	84	3	6542	58	3	9039	44	3	1004	36
4	$\bar{6}$,4838		4	7451	159	4	3161	84	4	6600	57	4	9083	43	4	1040	35
0°,5	$\bar{6}$,6776	— 337	5°,5	7610	+ 157	10°,5	3245	+ 82	15°,5	6657	+ 56	20°,5	9126	+ 43	25°,5	1075	+ 35
6	$\bar{6}$,8359	237	6	7767	154	6	3327	82	6	6713	56	6	9169	43	6	1110	35
7	$\bar{6}$,9698	175	7	7921	151	7	3409	82	7	6769	56	7	9212	43	7	1145	35
8	$\bar{5}$,0858	134	8	8072	149	8	3491	80	8	6825	56	8	9255	43	8	1180	35
9	$\bar{5}$,1881	108	9	8221	146	9	3571	80	9	6881	55	9	9298	42	9	1215	35
1°,0	$\bar{5}$,2797	— 86	6°,0	8367	+ 144	11°,0	3651	+ 79	16°,0	6936	+ 55	21°,0	9340	+ 42	26°,0	1250	+ 34
1	$\bar{5}$,3624	71	1	8511	142	1	3730	79	1	6991	54	1	9382	42	1	1284	35
2	$\bar{5}$,4380	60	2	8653	139	2	3809	77	2	7045	54	2	9424	42	2	1319	34
3	$\bar{5}$,5076	51	3	8792	137	3	3886	77	3	7099	54	3	9466	42	3	1353	34
4	$\bar{5}$,5719	44	4	8929	135	4	3963	77	4	7153	54	4	9508	41	4	1387	34
1°,5	$\bar{5}$,6319	— 38	6°,5	9064	+ 133	11°,5	4040	+ 75	16°,5	7207	+ 53	21°,5	9549	+ 42	26°,5	1421	+ 34
6	$\bar{5}$,6879	34	6	9197	131	6	4115	75	6	7260	53	6	9591	41	6	1455	34
7	$\bar{5}$,7406	30	7	9328	129	7	4190	75	7	7313	53	7	9632	41	7	1489	34
8	$\bar{5}$,7903	27	8	9457	127	8	4265	74	8	7366	52	8	9673	40	8	1523	34
9	$\bar{5}$,8372	24	9	9584	125	9	4339	73	9	7418	52	9	9713	41	9	1557	33
2°,0	$\bar{5}$,8818	— 22	7°,0	9709	+ 124	12°,0	4412	+ 73	17°,0	7470	+ 52	22°,0	9754	+ 40	27°,0	1590	+ 33
1	$\bar{5}$,9242	20	1	9833	121	1	4485	72	1	7522	51	1	9794	41	1	1623	34
2	$\bar{5}$,9646	18	2	9954	121	2	4557	71	2	7573	51	2	9835	40	2	1657	33
3	$\bar{4}$,0032	16	3	*0075	118	3	4628	71	3	7624	51	3	9875	40	3	1690	33
4	$\bar{4}$,0402	15	4	0193	117	4	4699	70	4	7675	51	4	9915	39	4	1723	33
2°,5	$\bar{4}$,0757	— 14	7°,5	0310	+ 115	12°,5	4769	+ 70	17°,5	7726	+ 50	22°,5	9954	+ 40	27°,5	1756	+ 33
6	$\bar{4}$,1097	+ 340	6	0425	114	6	4839	69	6	7776	50	6	9994	39	6	1789	32
7	$\bar{4}$,1425	328	7	0539	113	7	4908	69	7	7826	50	7	*0033	40	7	1821	33
8	$\bar{4}$,1741	316	8	0652	111	8	4977	68	8	7876	49	8	0073	39	8	1854	33
9	$\bar{4}$,2046	305	9	0763	109	9	5045	68	9	7925	49	9	0112	39	9	1887	32
3°,0	$\bar{4}$,2341	+ 285	8°,0	0872	+ 109	13°,0	5113	+ 67	18°,0	7974	+ 49	23°,0	0151	+ 38	28°,0	1919	+ 32
1	$\bar{4}$,2626	276	1	0981	106	1	5180	67	1	8023	49	1	0189	39	1	1951	33
2	$\bar{4}$,2902	267	2	1087	106	2	5247	66	2	8072	48	2	0228	38	2	1984	32
3	$\bar{4}$,3169	259	3	1193	105	3	5313	65	3	8120	49	3	0266	39	3	2016	32
4	$\bar{4}$,3428	252	4	1298	103	4	5378	66	4	8169	47	4	0305	38	4	2048	31
3°,5	$\bar{4}$,3680	+ 245	8°,5	1401	+ 102	13°,5	5444	+ 64	18°,5	8216	+ 48	23°,5	0343	+ 38	28°,5	2079	+ 32
6	$\bar{4}$,3925	238	6	1503	100	6	5508	65	6	8264	48	6	0381	38	6	2111	32
7	$\bar{4}$,4163	232	7	1603	100	7	5573	63	7	8312	47	7	0419	37	7	2143	32
8	$\bar{4}$,4395	226	8	1703	99	8	5636	64	8	8359	47	8	0456	38	8	2175	31
9	$\bar{4}$,4621	220	9	1802	97	9	5700	63	9	8406	46	9	0494	37	9	2206	31
4°,0	$\bar{4}$,4841	+ 215	9°,0	1899	+ 97	14°,0	5763	+ 62	19°,0	8452	+ 47	24°,0	0531	+ 37	29°,0	2237	+ 32
1	$\bar{4}$,5056	209	1	1996	95	1	5825	62	1	8499	46	1	0568	37	1	2269	31
2	$\bar{4}$,5265	205	2	2091	94	2	5887	62	2	8545	46	2	0605	37	2	2300	31
3	$\bar{4}$,5470	200	3	2185	93	3	5949	61	3	8591	46	3	0642	37	3	2331	31
4	$\bar{4}$,5670	195	4	2278	93	4	6010	61	4	8637	45	4	0679	37	4	2362	31
4°,5	$\bar{4}$,5865	+ 191	9°,5	2371	+ 91	14°,5	6071	+ 60	19°,5	8682	+ 46	24°,5	0716	+ 36	29°,5	2393	+ 31
6	$\bar{4}$,6056	187	6	2462	91	6	6131	60	6	8728	45	6	0752	37	6	2424	30
7	$\bar{4}$,6243	183	7	2553	89	7	6191	59	7	8773	45	7	0789	36	7	2454	31
8	$\bar{4}$,6426	180	8	2642	89	8	6250	60	8	8818	44	8	0825	36	8	2485	31
9	$\bar{4}$,6606	175	9	2731	87	9	6310	58	9	8862	45	9	0861	36	9	2516	30
5°,0	$\bar{4}$,6781		10°,0	2818		15°,0	6368		20°,0	8907		25°,0	0897		30°,0	2546	
				$\bar{3}$,			$\bar{3}$,			$\bar{3}$,			$\bar{2}$,			$\bar{2}$,	

В немецком оригинале настоящей книги для натуральных логарифмов употребляется обозначение log q вместо принятого у нас ln q. — *Прим. ред.*

Продолжение табл. 35

α	log q		α	log q		α	log q		α	log q		α	log q		α	log q	
	$\bar{2}$,			$\bar{2}$,			$\bar{2}$,			$\bar{2}$,			$\bar{2}$,			$\bar{2}$,	
30°,0	2546	+ 30	35°,0	3965	+ 26	40°,0	5220	+ 24	45°,0	6356	+ 22	50°,0	7405	+ 20	55°,0	8391	+ 19
1	2576	31	1	3991	27	1	5244	23	1	6378	22	1	7425	21	1	8410	20
2	2607	30	2	4018	26	2	5267	24	2	6400	21	2	7446	20	2	8430	19
3	2637	30	3	4044	26	3	5291	24	3	6421	22	3	7466	20	3	8449	19
4	2667	30	4	4070	27	4	5315	23	4	6443	22	4	7486	20	4	8468	19
30°,5	2697	+ 30	35°,5	4097	+ 26	40°,5	5338	+ 24	45°,5	6465	+ 21	50°,5	7506	+ 20	55°,5	8487	+ 19
6	2727	30	6	4123	26	6	5362	23	6	6486	22	6	7526	21	6	8506	19
7	2757	29	7	4149	26	7	5385	24	7	6508	21	7	7547	20	7	8525	19
8	2786	30	8	4175	26	8	5409	23	8	6529	22	8	7567	20	8	8544	20
9	2816	30	9	4201	26	9	5432	24	9	6551	21	9	7587	20	9	8564	19
31°,0	2846	+ 29	36°,0	4227	+ 26	41°,0	5456	+ 23	46°,0	6572	+ 22	51°,0	7607	+ 20	56°,0	8583	+ 19
1	2875	29	1	4253	26	1	5479	23	1	6594	21	1	7627	20	1	8602	19
2	2904	30	2	4279	26	2	5502	23	2	6615	21	2	7647	20	2	8621	19
3	2934	29	3	4305	25	3	5525	24	3	6636	22	3	7667	20	3	8640	19
4	2963	29	4	4330	26	4	5549	23	4	6658	21	4	7687	20	4	8659	19
31°,5	2992	+ 29	36°,5	4356	+ 26	41°,5	5572	+ 23	46°,5	6679	+ 21	51°,5	7707	+ 20	56°,5	8678	+ 19
6	3021	29	6	4382	25	6	5595	23	6	6700	21	6	7727	19	6	8697	19
7	3050	29	7	4407	26	7	5618	23	7	6721	22	7	7746	20	7	8716	19
8	3079	29	8	4433	25	8	5641	23	8	6743	21	8	7766	20	8	8735	19
9	3108	29	9	4458	25	9	5664	23	9	6764	21	9	7786	20	9	8754	19
32°,0	3137	+ 28	37°,0	4483	+ 26	42°,0	5687	+ 23	47°,0	6785	+ 21	52°,0	7806	+ 20	57°,0	8773	+ 18
1	3165	29	1	4509	25	1	5710	22	1	6806	21	1	7826	20	1	8791	19
2	3194	28	2	4534	25	2	5732	23	2	6827	21	2	7846	19	2	8810	19
3	3222	29	3	4559	25	3	5755	23	3	6848	21	3	7865	20	3	8829	19
4	3251	28	4	4584	26	4	5778	23	4	6869	21	4	7885	20	4	8848	19
32°,5	3279	+ 29	37°,5	4610	+ 25	42°,5	5801	+ 22	47°,5	6890	+ 21	52°,5	7905	+ 19	57°,5	8867	+ 19
6	3308	28	6	4635	25	6	5823	23	6	6911	21	6	7924	20	6	8886	19
7	3336	28	7	4660	24	7	5846	23	7	6932	21	7	7944	20	7	8905	19
8	3364	28	8	4684	25	8	5869	22	8	6953	21	8	7964	19	8	8924	18
9	3392	28	9	4709	25	9	5891	23	9	6974	20	9	7983	20	9	8942	19
33°,0	3420	+ 28	38°,0	4734	+ 25	43°,0	5914	+ 22	48°,0	6994	+ 21	53°,0	8003	+ 20	58°,0	8961	+ 19
1	3448	28	1	4759	25	1	5936	23	1	7015	21	1	8023	19	1	8980	19
2	3476	27	2	4784	24	2	5959	22	2	7036	21	2	8042	20	2	8999	18
3	3503	28	3	4808	25	3	5981	22	3	7057	20	3	8062	19	3	9017	19
4	3531	28	4	4833	25	4	6003	23	4	7077	21	4	8081	20	4	9036	19
33°,5	3559	+ 27	38°,5	4858	+ 24	43°,5	6026	+ 22	48°,5	7098	+ 21	53°,5	8101	+ 19	58°,5	9055	+ 19
6	3586	28	6	4882	24	6	6048	22	6	7119	20	6	8120	20	6	9074	18
7	3614	27	7	4906	25	7	6070	23	7	7139	21	7	8140	19	7	9092	19
8	3641	27	8	4931	24	8	6093	22	8	7160	21	8	8159	20	8	9111	19
9	3668	28	9	4955	25	9	6115	22	9	7181	20	9	8179	19	9	9130	18
34°,0	3696	+ 27	39°,0	4980	+ 24	44°,0	6137	+ 22	49°,0	7201	+ 21	54°,0	8198	+ 19	59°,0	9148	+ 19
1	3723	27	1	5004	24	1	6159	22	1	7222	20	1	8217	20	1	9167	19
2	3750	27	2	5028	24	2	6181	22	2	7242	21	2	8237	19	2	9186	18
3	3777	27	3	5052	24	3	6203	22	3	7263	20	3	8256	19	3	9204	19
4	3804	27	4	5076	24	4	6225	22	4	7283	21	4	8275	20	4	9223	19
34°,5	3831	+ 27	39°,5	5100	+ 24	44°,5	6247	+ 22	49°,5	7304	+ 20	54°,5	8295	+ 19	59°,5	9242	+ 18
6	3858	27	6	5124	24	6	6269	22	6	7324	20	6	8314	19	6	9260	19
7	3885	26	7	5148	24	7	6291	22	7	7344	21	7	8333	20	7	9279	18
8	3911	27	8	5172	24	8	6313	21	8	7365	20	8	8353	19	8	9297	19
9	3938	27	9	5196	24	9	6334	22	9	7385	20	9	8372	19	9	9316	19
35°,0	3965		40°,0	5220		45°,0	6356		50°,0	7405		55°,0	8391		60°,0	9335	
	$\bar{2}$,			$\bar{2}$,			$\bar{2}$,			$\bar{2}$,			$\bar{2}$,			$\bar{2}$,	

Продолжение табл. 35

α	log q		α	log q		α	log q		α	log q		α	log q		α	log q	
	$\bar{2}$,			$\bar{1}$,			$\bar{1}$,			$\bar{1}$,			$\bar{1}$,			$\bar{1}$,	
60°,0	9335	+ 18	65°,0	0255	+ 19	70°,0	1175	+ 18	75°,0	2123	+ 19	80°,0	3152	+ 22	85°,0	4396	+ 30
1	9353	19	1	0274	18	1	1193	19	1	2142	20	1	3174	22	1	4426	29
2	9372	18	2	0292	18	2	1212	18	2	2162	19	2	3196	22	2	4455	30
3	9390	19	3	0310	19	3	1230	19	3	2181	20	3	3218	22	3	4485	31
4	9409	18	4	0329	18	4	1249	19	4	2201	20	4	3240	22	4	4516	31
60°,5	9427	+ 19	65°,5	0347	+ 18	70°,5	1268	+ 18	75°,5	2221	+ 19	80°,5	3262	+ 23	85°,5	4547	+ 31
6	9446	18	6	0365	19	6	1286	19	6	2240	20	6	3285	22	6	4578	31
7	9464	19	7	0384	18	7	1305	19	7	2260	20	7	3307	23	7	4609	32
8	9483	18	8	0402	18	8	1324	18	8	2280	20	8	3330	23	8	4641	32
9	9501	19	9	0420	18	9	1342	19	9	2300	20	9	3353	23	9	4673	32
61°,0	9520	+ 18	66°,0	0438	+ 19	71°,0	1361	+ 19	76°,0	2320	+ 20	81°,0	3376	+ 22	86°,0	4705	+ 33
1	9538	19	1	0457	18	1	1380	18	1	2340	19	1	3398	23	1	4738	34
2	9557	19	2	0475	18	2	1398	19	2	2359	20	2	3421	24	2	4772	34
3	9575	19	3	0493	19	3	1417	19	3	2379	20	3	3445	23	3	4806	34
4	9594	18	4	0512	18	4	1436	18	4	2399	20	4	3468	23	4	4840	35
61°,5	9612	+ 19	66°,5	0530	+ 18	71°,5	1454	+ 19	76°,5	2419	+ 20	81°,5	3491	+ 23	86°,5	4875	+ 35
6	9631	18	6	0548	19	6	1473	19	6	2439	21	6	3514	24	6	4910	36
7	9649	19	7	0567	18	7	1492	19	7	2460	20	7	3538	24	7	4946	36
8	9668	18	8	0585	18	8	1511	19	8	2480	20	8	3562	23	8	4982	37
9	9686	19	9	0603	19	9	1530	18	9	2500	20	9	3585	24	9	5019	38
62°,0	9705	+ 18	67°,0	0622	+ 18	72°,0	1548	+ 19	77°,0	2520	+ 20	82°,0	3609	+ 24	87°,0	5057	+ 38
1	9723	18	1	0640	19	1	1567	19	1	2540	21	1	3633	24	1	5095	39
2	9741	19	2	0659	18	2	1586	19	2	2561	20	2	3657	24	2	5134	40
3	9760	18	3	0677	18	3	1605	19	3	2581	21	3	3681	25	3	5174	41
4	9778	19	4	0695	19	4	1624	19	4	2602	20	4	3706	24	4	5215	41
62°,5	9797	+ 18	67°,5	0714	+ 18	72°,5	1643	+ 19	77°,5	2622	+ 21	82°,5	3730	+ 25	87°,5	5256	+ 43
6	9815	18	6	0732	18	6	1662	19	6	2643	20	6	3755	24	6	5299	43
7	9833	19	7	0750	19	7	1681	19	7	2663	21	7	3779	25	7	5342	45
8	9852	18	8	0769	18	8	1700	19	8	2684	20	8	3804	25	8	5387	46
9	9870	18	9	0787	18	9	1719	19	9	2704	21	9	3829	26	9	5433	47
63°,0	9888	+ 19	68°,0	0805	+ 19	73°,0	1738	+ 19	78°,0	2725	+ 21	83°,0	3855	+ 25	88°,0	5480	+ 48
1	9907	18	1	0824	18	1	1757	19	1	2746	21	1	3880	25	1	5528	50
2	9925	19	2	0842	19	2	1776	19	2	2767	20	2	3905	26	2	5578	52
3	9944	18	3	0861	18	3	1795	19	3	2787	21	3	3931	26	3	5630	53
4	9962	18	4	0879	19	4	1814	19	4	2808	21	4	3957	26	4	5683	55
63°,5	9980	+ 19	68°,5	0898	+ 18	73°,5	1833	+ 19	78°,5	2829	+ 21	83°,5	3983	+ 26	88°,5	5738	+ 58
6	9999	18	6	0916	18	6	1852	19	6	2850	21	6	4009	26	6	5796	60
7	*0017	18	7	0934	19	7	1871	19	7	2871	22	7	4035	27	7	5856	63
8	0035	19	8	0953	18	8	1890	20	8	2893	21	8	4062	26	8	5919	67
9	0054	18	9	0971	19	9	1910	19	9	2914	21	9	4088	27	9	5986	70
64°,0	0072	+ 18	69°,0	0990	+ 18	74°,0	1929	+ 19	79°,0	2935	+ 21	84°,0	4115	+ 27	89°,0	6056	+ 75
1	0090	19	1	1008	19	1	1948	19	1	2956	22	1	4142	28	1	6131	81
2	0109	18	2	1027	18	2	1967	20	2	2978	21	2	4170	27	2	6212	87
3	0127	18	3	1045	19	3	1987	19	3	2999	22	3	4197	28	3	6299	96
4	0145	19	4	1064	18	4	2006	20	4	3021	21	4	4225	28	4	6395	107
64°,5	0164	+ 18	69°,5	1082	+ 19	74°,5	2026	+ 19	79°,5	3042	+ 22	84°,5	4253	+ 28	89°,5	6502	
6	0182	18	6	1101	18	6	2045	19	6	3064	22	6	4281	28	6	6625	
7	0200	19	7	1119	19	7	2064	20	7	3086	22	7	4309	29	7	6772	
8	0219	18	8	1138	18	8	2084	19	8	3108	22	8	4338	29	8	6957	
9	0237	18	9	1156	19	9	2103	20	9	3130	22	9	4367	29	9	7230	
65°,0	0255		70°,0	1175		75°,0	2123		80°,0	3152		85°,0	4396		90°,0	*0000	
	$\bar{1}$,			$\bar{1}$,			$\bar{1}$,			$\bar{1}$,			$\bar{1}$,			0,	

4.3. Эллиптические функции Якоби могут быть выражены через тэта-функции:

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}, \quad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)}, \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)}$$

$$\left(v = \frac{u}{2\mathsf{K}}, \quad q = e^{-\pi\varkappa}, \quad \varkappa = \frac{\mathsf{K}'}{\mathsf{K}}\right).$$

Если положить $u = u_1 + u_2 i$ и для действительных K, K' в первый раз взять

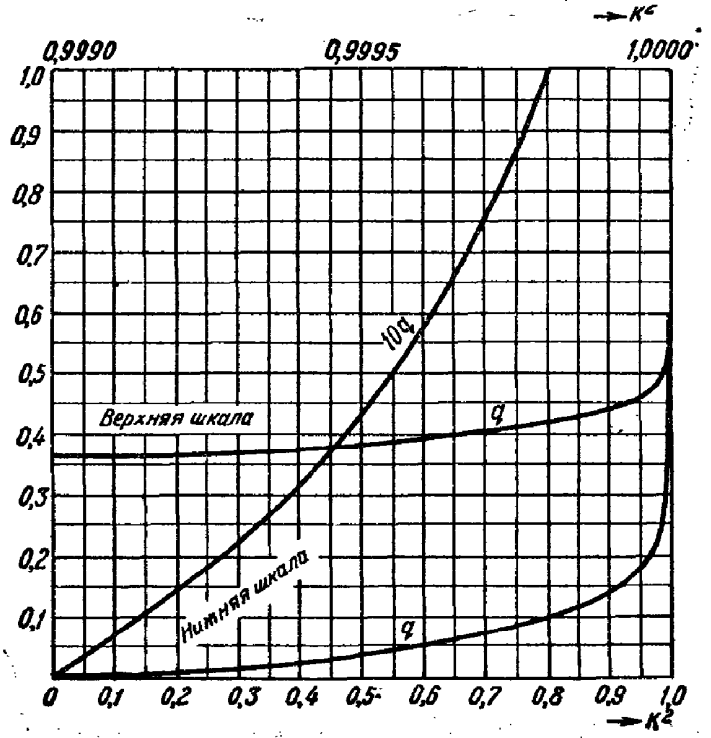


Рис. 79. Величина $q = e^{-\pi\varkappa}$ как функция от $k^2 = \sin^2 \alpha$.

$-2\mathsf{K}' < u_2 < 2\mathsf{K}'$, а во второй раз $u_2 = 0$, то для малых q получим приближенно

$$\operatorname{sn} u \approx \sin y \frac{1 - 4q^2 \cos^2 y}{1 - 4q(1-2q)\cos^2 y} \approx \sin y \cdot (1 + 4q \cos^2 y),$$

$$\operatorname{cn} u \approx \cos y \frac{1 - 4q^2 \sin^2 y}{1 - 4q(1+2q)\sin^2 y} \approx \cos y \cdot (1 - 4q \sin^2 y) \qquad \left(y = \frac{\pi u}{2\mathsf{K}}\right),$$

$$\operatorname{dn} u \approx \frac{1 - 4q(1-2q)\sin^2 y}{1 + 4q(1+2q)\sin^2 y} \approx 1 - 8q \sin^2 y,$$

$$\operatorname{zn} u \approx \frac{1}{\vartheta_3^2} \frac{d \ln \vartheta_4}{dy} \approx \frac{4q \sin 2y}{1 + 2q(2 - \cos 2y) + 4q^2(1 - 2\cos 2y)}.$$

XI. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

А. ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА

Полиномы Чебышева 1-го рода $T_n(z)$ и 2-го рода $U_n(z)$ определяют как*)

$$T_n(z)=\cos(n\arccos z)=\frac{1}{2}\left[(z+i\sqrt{1-z^2})^n+(z-i\sqrt{1-z^2})^n\right],$$

$$U_n(z)=\sin(n\arccos z)=\frac{1}{2i}\left[(z+i\sqrt{1-z^2})^n-(z-i\sqrt{1-z^2})^n\right].$$

Они являются линейно независимыми решениями дифференциального уравнения

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-z\frac{dw}{dz}+n^2z=0.$$

Имеют место представления:

$$T_n(z)=z^n-\binom{n}{2}z^{n-2}(1-z^2)+\binom{n}{4}z^{n-4}(1-z^2)-\ldots=$$

$$=(-1)^n\frac{\sqrt{1-z^2}}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}\frac{d^n}{dz^n}(1-z^2)^{n-\frac{1}{2}},$$

$$U_n(z)=\sqrt{1-z^2}\left[\binom{n}{1}z^{n-1}-\binom{n}{3}z^{n-3}(1-z^2)+\binom{n}{5}z^{n-5}(1-z^2)^2-\ldots\right]=$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{n}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(1-z^2)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Производящие функции:

$$\frac{1-t^2}{1-2tz+t^2}=T_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(z)\,t^n,$$

$$\frac{1}{1-2tz+t^2}=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\sum_{n=0}^{\infty}U_{n+1}(z)\,t^n.$$

Рекуррентные формулы:

$$T_{n+1}(z)-2zT_n(z)+T_{n-1}(z)=0,$$
$$U_{n+1}(z)-2zU_n(z)+U_{n-1}(z)=0.$$

Функция $U_n(z)$ обращается в нуль при $z=-1$ и $z=1$. Кроме того, $T_n(z)$ и $U_n(z)$ имеют только действительные простые нули, которые все лежат в интервале $-1<z<1$.

---

*) Иногда употребляется и иная нормировка этих полиномов.—*Прим. ред.*

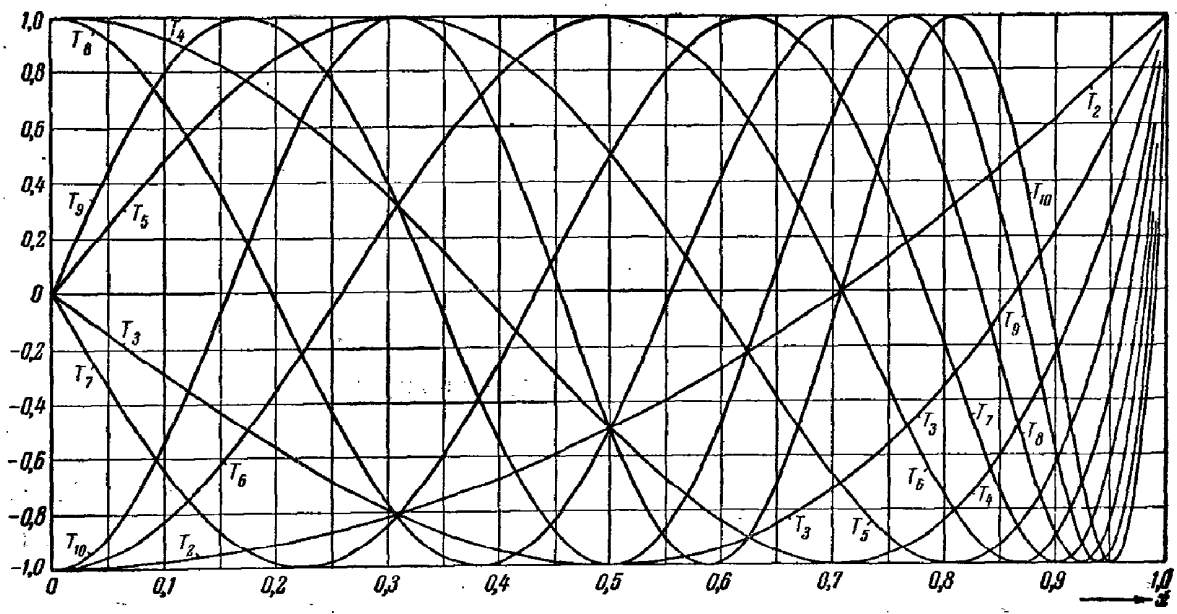


Рис. 80. Полиномы Чебышева $T_n(x)$, $n=2, 3, \ldots, 10$.

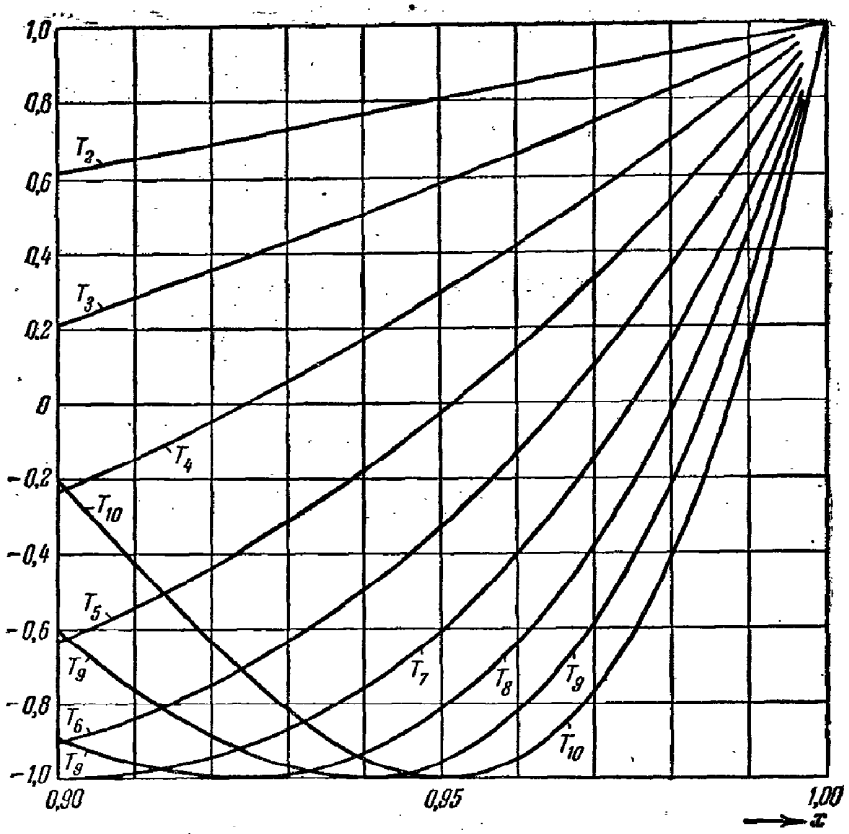


Рис. 81. Полиномы Чебышева $T_n(x)$, $n=2, 3, \ldots, 10$.

Частные значения:

$$T_n(1)=1, \quad T_n(-1)=(-1)^n, \quad T_{2n}(0)=(-1)^n, \quad T_{2n+1}(0)=0,$$
$$U_n(1)=0, \quad U_n(-1)=0, \quad U_{2n}(0)=0, \quad U_{2n+1}(0)=(-1)^n.$$

Функции $T_n(x)$ действительны при всех действительных значениях аргумента $z=x$ (рис. 80—82), а функции $U_n(x)$ — при $-1\leqslant x\leqslant+1$. На этом отрезке выполняются соотношения ортогональности

$$\int_{-1}^{+1}\frac{T_m(x)\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\begin{cases}0,\\ \frac{\pi}{2},\\ \pi,\end{cases} \qquad \int_{-1}^{+1}\frac{U_m(x)\,U_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\begin{cases}0, & \text{если } m\neq n,\\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } m=n\neq 0,\\ 0, & \text{если } m=n=0.\end{cases}$$

Справедливо важное равенство, следующее из определения:

$$T_n(\cos\vartheta)=\cos n\vartheta.$$

Среди всех полиномов n-й степени с единичным старшим коэффициентом полином $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ выделяется тем, что он меньше всего уклоняется от нуля на отрезке $-1\leqslant x\leqslant+1$.

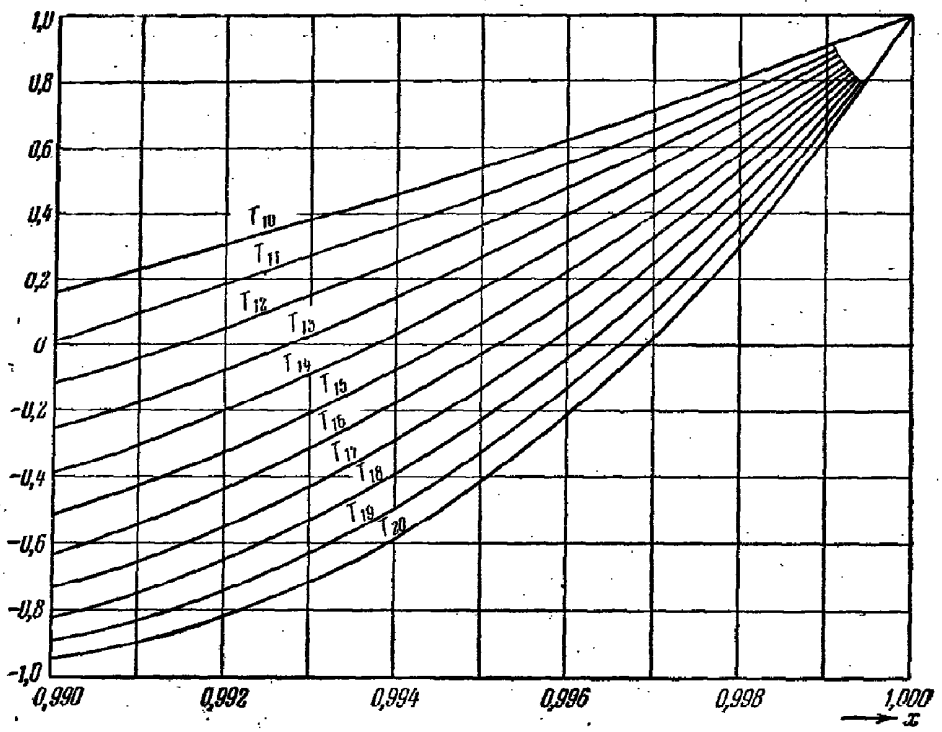


Рис. 82. Полиномы Чебышева $T_n(x)$, $n=10, 11, \ldots, 20$.

Полиномы Чебышева низших степеней:

$$T_0(z)=1, \qquad U_0(z)=0,$$
$$T_1(z)=z, \qquad U_1(z)=\sqrt{1-z^2},$$
$$T_2(z)=2z^2-1 \qquad U_2(z)=\sqrt{1-z^2}\,2z,$$
$$T_3(z)=4z^3-3z, \qquad U_3(z)=\sqrt{1-z^2}\,[4z^2-1],$$
$$T_4(z)=8z^4-8z^2+1, \qquad U_4(z)=\sqrt{1-z^2}\,[8z^3-4z],$$
$$T_5(z)=16z^5-20z^3+5z, \qquad U_5(z)=\sqrt{1-z^2}\,[16z^4-12z^2+1].$$

В. ПОЛИНОМЫ ЛАГЕРРА

Полиномы Лагерра являются решениями дифференциального уравнения

$$z\frac{d^2w}{dz^2}+(\alpha+1-z)\frac{dw}{dz}+nw=0,$$

где $n=0, 1, 2, \ldots$, а α—произвольное комплексное число. Именно *),

$$L_n^{(\alpha)}(z)=\frac{e^z z^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z}z^{n+\alpha}).$$

В частности, $L_n(z)=L_n^{(0)}(z)=1-\binom{n}{1}\frac{z}{1!}+\binom{n}{2}\frac{z^2}{2!}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}\frac{z^n}{n!}$.

Производящие функции:

$$\frac{e^{-\frac{zt}{1-t}}}{(1-t)^{\alpha+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(\alpha)}(z)\,t^n, \qquad e^{-zt}(1+t)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(\alpha-n)}(z)\,t^n \qquad (|t|<1).$$

Рекуррентные формулы:

$$nL_n^{(\alpha)}(z)=(2n+\alpha-1-z)L_{n-1}^{(\alpha)}(z)-(n+\alpha-1)L_{n-2}^{(\alpha)}(z),$$
$$z\frac{dL_n^{(\alpha)}(z)}{dz}=nL_n^{(\alpha)}(z)-(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(z)=-zL_{n-1}^{(\alpha+1)}(z). \qquad (n=2, 3, \ldots)$$

Теоремы сложения:

$$L_n^{(\alpha)}(z_1+z_2)=e^{z_2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}z_2^k L_n^{(\alpha+k)}(z_1),$$

$$L_n^{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m-1)}(z_1+z_2+\ldots+z_m)=\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n}L_{k_1}^{(\alpha_1)}(z_1)L_{k_2}^{(\alpha_2)}(z_2)\ldots L_{k_m}^{(\alpha_m)}(z_m).$$

Если параметр α действителен и >-1, то все нули полинома $L_n^{(\alpha)}(z)$ простые и являются действительными положительными числами.

Если параметр α действителен, то для действительных положительных значений аргумента $z=x$ функции $L_n^{(\alpha)}(x)$ будут действительными. Если, кроме того, $\alpha>-1$, то выполняется соотношение ортогональности:

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\alpha}L_m^{(\alpha)}(x)\,L_n^{(\alpha)}(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{при } m\neq n,\\ \Gamma(1+\alpha)\binom{n+\alpha}{n} & \text{при } m=n.\end{cases}$$

Для функций $l_n(x)=e^{-\frac{x}{2}}L_n(x)$ (рис. 83, 84, табл. 36) получаем, следовательно,

$$\int_0^{+\infty}l_m(x)\,l_n(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{при } m\neq n,\\ 1 & \text{при } m=n.\end{cases}$$

Полиномы Лагерра низших степеней для $\alpha=0$

$$L_0(z)=1, \qquad L_3(z)=1-3z+\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{6}z^3,$$
$$L_1(z)=1-z, \qquad L_4(z)=1-4z+3z^2+\frac{1}{24}z^4,$$
$$L_2(z)=1-2z+\frac{1}{2}z^2, \qquad L_5(z)=1+5z^3+\frac{5}{24}z^4-\frac{1}{120}z^5.$$

*) Иногда применяется и иная нормировка этих полиномов. — *Прим. ред.*

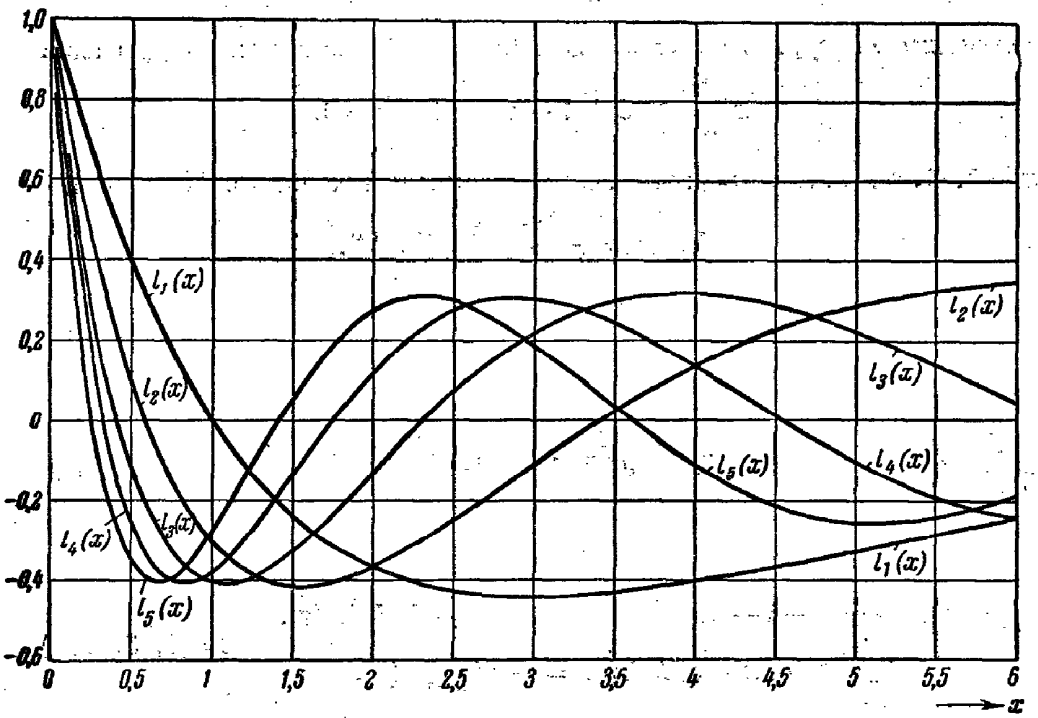


Рис. 83. Функции Лагерра $l_n(x)$, $n=1, 2, \ldots, 5$.

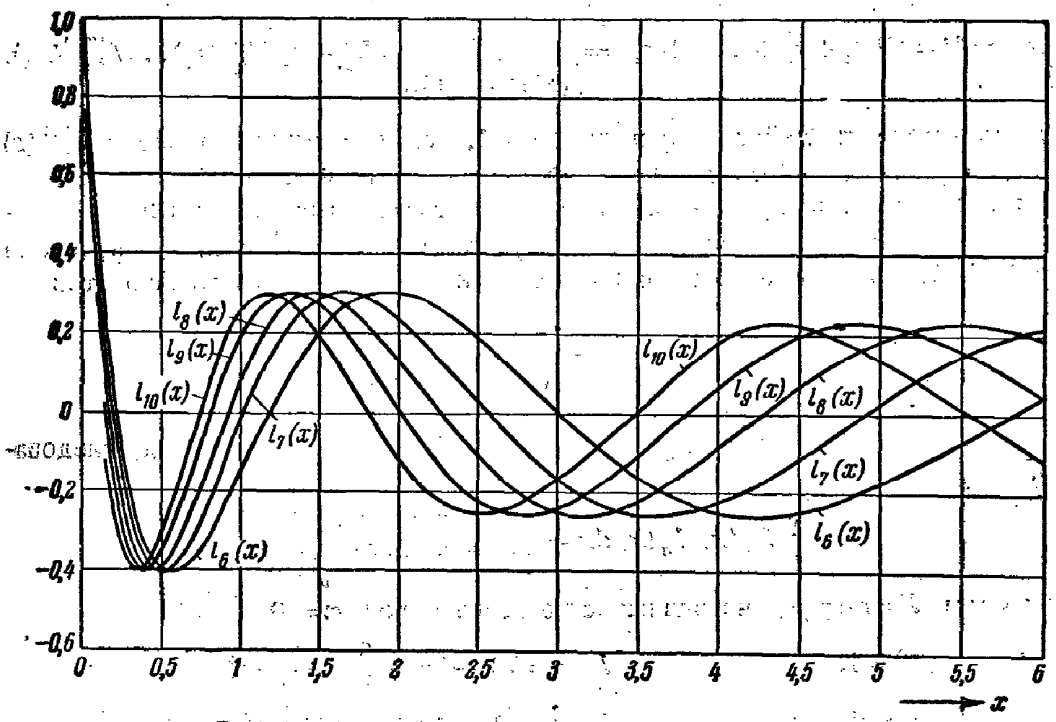


Рис. 84. Функции Лагерра $l_n(x)$, $n=6, 7, \ldots, 10$.

Таблица 36. Функции Лагерра $l_n(x)$

x	$l_0(x)$	$l_1(x)$	$l_2(x)$	$l_3(x)$	$l_4(x)$	$l_5(x)$
0,00	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000
0,10	0,9512	0,8561	0,7657	0,6800	0,5986	0,5216
0,20	0,9048	0,7239	0,5610	0,4150	0,2848	+ 0,1692
0,30	0,8607	0,6025	0,3830	0,1984	+ 0,4505 (— 1)	— 0,8033 (— 1)
0,40	0,8187	0,4912	0,2292	+ 0,2402 (— 1)	— 0,1323	0,2468
0,50	+ 0,7788	+ 0,3894	+ 0,9735 (— 1)	— 0,1136	— 0,2576	— 0,3470
0,60	0,7408	0,2963	— 0,1482 (— 1)	0,2193	0,3397	0,3953
0,70	0,7047	0,2114	0,1092	0,2975	0,3866	0,4038
0,80	0,6703	0,1341	0,1877	0,3521	0,4051	0,3826
0,90	0,6376	+ 0,6376 (— 1)	0,2519	0,3867	0,4009	0,3400
1,00	+ 0,6065	0,0000	— 0,3033	— 0,4044	— 0,3791	— 0,2830
1,25	0,5353	— 0,1338	0,3847	0,3917	0,2745	— 0,1121
1,50	0,4724	0,2362	0,4133	0,3248	0,1365	+ 0,5499 (— 1)
1,75	0,4169	0,3126	0,4038	0,2291	— 0,2239 (— 2)	0,1865
2,00	+ 0,3679	— 0,3679	— 0,3679	— 0,1226	+ 0,1226	+ 0,2698
2,25	0,3247	0,4058	0,3145	— 0,1775 (— 1)	0,2148	0,3042
2,50	0,2865	0,4298	0,2507	+ 0,7760 (— 1)	0,2753	0,2958
2,75	0,2528	0,4425	0,1817	0,1587	0,3049	0,2542
3,00	+ 0,2231	— 0,4463	— 0,1116	+ 0,2231	+ 0,3068	+ 0,1897
3,25	0,1969	0,4431	— 0,4307 (— 1)	0,2702	0,2857	0,1123
3,50	0,1738	0,4344	+ 0,2172 (— 1)	0,3005	0,2466	+ 0,3091 (— 1)
3,75	0,1534	0,4217	+ 0,8147 (— 1)	0,3151	0,1949	— 0,4742 (— 1)
4,00	+ 0,1353	— 0,4060	+ 0,1353	+ 0,3158	+ 0,1353	— 0,1173
4,25	0,1194	0,3882	0,1829	0,3045	0,7218 (— 1)	0,1750
4,50	0,1054	0,3689	0,2240	0,2833	+ 0,9058 (— 2)	0,2185
4,75	0,9301 (— 1)	0,3488	0,2587	0,2541	— 0,5109 (— 1)	0,2467
5,00	+ 0,8208 (— 1)	— 0,3283	+ 0,2873	+ 0,2189	— 0,1060	— 0,2599
5,25	0,7244 (— 1)	0,3079	0,3101	0,1794	0,1541	0,2591
5,50	0,6393 (— 1)	0,2877	0,3276	0,1372	0,1943	0,2457
5,75	0,5642 (— 1)	0,2680	0,3403	0,9359 (— 1)	0,2259	0,2217
6	+ 0,4979 (— 1)	— 0,2489	+ 0,3485	+ 0,4979 (— 1)	— 0,2489	— 0,1892
7	0,3020 (— 1)	0,1812	0,3473	— 0,1107	0,2605	— 0,1560 (— 1)
8	0,1832 (— 1)	0,1282	0,3114	0,2259	0,1771	+ 0,1453
9	0,1111 (— 1)	0,8887 (— 1)	0,2611	0,2888	— 0,5138 (— 1)	0,2311
10	+ 0,6738 (— 2)	— 0,6064 (— 1)	+ 0,2089	— 0,3077	+ 0,7412 (— 1)	+ 0,2313
11	0,4087 (— 2)	0,4087 (— 1)	0,1614	0,2956	0,1745	0,1667
12	0,2479 (— 2)	0,2727 (— 1)	0,1215	0,2652	0,2404	+ 0,6792 (— 1)
13	0,1503 (— 2)	0,1804 (— 1)	0,8945 (— 1)	0,2265	0,2727	— 0,3693 (— 1)
14	0,9119 (— 3)	0,1185 (— 1)	0,6474 (— 1)	0,1863	0,2775	0,1285
16	+ 0,3355 (— 3)	— 0,5032 (— 2)	+ 0,3254 (— 1)	— 0,1160	+ 0,2365	— 0,2383
18	0,1234 (— 3)	0,2098 (— 2)	0,1567 (— 1)	0,6652 (— 1)	0,1712	0,2549
20	0,4540 (— 4)	0,8626 (— 3)	0,7309 (— 2)	0,3597 (— 1)	0,1114	0,2164
22	0,1670 (— 4)	0,3507 (— 3)	0,3324 (— 2)	0,1860 (— 1)	0,6726 (— 1)	0,1600
24	0,6144 (— 5)	0,1413 (— 3)	0,1481 (— 2)	0,9284 (— 2)	0,3835 (— 1)	0,1076
26	+ 0,2260 (— 5)	— 0,5651 (— 4)	+ 0,6487 (— 3)	— 0,4503 (— 2)	+ 0,2090 (— 1)	— 0,6747 (— 1)
28	0,8315 (— 6)	0,2245 (— 4)	0,2802 (— 3)	0,2133 (— 2)	0,1099 (— 1)	0,4006 (— 1)
30	0,3059 (— 6)	0,8871 (— 5)	0,1196 (— 3)	0,9908 (— 3)	0,5607 (— 2)	0,2276 (— 1)
32	0,1125 (— 6)	0,3489 (— 5)	0,5053 (— 4)	0,4524 (— 3)	0,2790 (— 2)	0,1247 (— 1)
34	0,4140 (— 7)	0,1366 (— 5)	0,2116 (— 4)	0,2036 (— 3)	0,1358 (— 2)	0,6629 (— 2)

Продолжение табл. 36

x	$l_6(x)$	$l_7(x)$	$l_8(x)$	$l_9(x)$	$l_{10}(x)$
0,00	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000
0,10	+ 0,4487	+ 0,3798	+ 0,3148	+ 0,2535	+ 0,1958
0,20	+ 0,6725 (— 1)	— 0,2207 (— 1)	— 0,9967 (— 1)	— 0,1664	— 0,2232
0,30	— 0,1808	0,2592	0,3180	0,3597	0,3865
0,40	0,3257	0,3748	0,3990	0,4027	0,3900
0,50	— 0,3926	— 0,4037	— 0,3881	— 0,3527	— 0,3032
0,60	0,4021	0,3735	0,3204	0,2519	0,1751
0,70	0,3710	0,3058	0,2220	0,1302	— 0,3851 (— 1)
0,80	0,3128	0,2173	0,1120	— 0,8407 (— 2)	+ 0,8548 (— 1)
0,90	0,2383	0,1205	— 0,3837 (— 2)	+ 0,1002	0,1849
1,00	— 0,1558	— 0,2455 (— 1)	+ 0,9340 (— 1)	+ 0,1879	+ 0,2541
1,25	+ 0,4653 (— 1)	+ 0,1742	0,2587	0,2979	0,2959
1,50	0,2008	0,2828	0,3015	0,2679	0,1975
1,75	0,2856	0,2992	0,2456	0,1503	+ 0,3811 (— 1)
2,00	+ 0,3025	+ 0,2441	+ 0,1320	+ 0,2985 (— 2)	— 0,1137
2,25	0,2646	0,1456	+ 0,5606 (— 3)	— 0,1285	0,2158
2,50	0,1897	+ 0,3093 (— 1)	— 0,1176	0,2170	0,2522
2,75	+ 0,9541 (— 1)	— 0,7816 (— 1)	0,2032	0,2522	0,2270
3,00	— 0,2789 (— 2)	— 0,1666	— 0,2474	— 0,2368	— 0,1562
3,25	0,9298 (— 1)	0,2258	0,2502	0,1816	— 0,6085 (— 1)
3,50	0,1669	0,2530	0,2176	0,1016	+ 0,3842 (— 1)
3,75	0,2197	0,2497	0,1589	— 0,1196 (— 1)	0,1248
4,00	— 0,2496	— 0,2204	— 0,8464 (— 1)	+ 0,7366 (— 1)	+ 0,1867
4,25	0,2571	0,1713	— 0,5254 (— 2)	0,1448	0,2183
4,50	0,2442	0,1093	+ 0,7024 (— 1)	0,1947	0,2199
4,75	0,2144	— 0,4123 (— 1)	0,1343	0,2201	0,1923
5,00	— 0,1716	+ 0,2671 (— 1)	+ 0,1835	+ 0,2210	+ 0,1442
5,25	0,1199	0,8936 (— 1)	0,2138	0,1997	0,8217 (— 1)
5,50	0,6336 (— 1)	0,1427	0,2250	0,1606	+ 0,1429 (— 1)
5,75	— 0,5728 (— 2)	0,1841	0,2179	0,1087	— 0,5207 (— 1)
6	+ 0,4979 (— 1)	+ 0,2120	+ 0,1949	+ 0,4979 (— 1)	— 0,1107
7	0,2066	0,1905	+ 0,9683 (— 2)	— 0,1586	0,1990
8	0,2202	+ 0,3274 (— 1)	— 0,1640	0,1931	— 0,6481 (— 1)
9	+ 0,1198	— 0,1296	0,2020	— 0,6441 (— 1)	+ 0,1174
10	— 0,2321 (— 1)	— 0,2082	— 0,1098	+ 0,9967 (— 1)	+ 0,1886
11	0,1454	0,1844	+ 0,3506 (— 1)	0,1873	+ 0,1183
12	0,2117	— 0,8846 (— 1)	0,1521	0,1631	— 0,2268 (— 1)
13	0,2149	+ 0,3166 (— 1)	0,1786	+ 0,5896 (— 1)	0,1410
14	— 0,1670	0,1340	+ 0,1629	— 0,6478 (— 1)	0,1790
16	+ 0,1528 (— 2)	+ 0,2036	— 0,2679 (— 1)	— 0,1840	— 0,3108 (— 1)
18	0,1547	+ 0,1080	0,1759	— 0,7642 (— 1)	+ 0,1506
20	0,2317	— 0,4623 (— 1)	0,1738	+ 0,9904 (— 1)	+ 0,1465
22	0,2373	0,1679	— 0,6068 (— 1)	0,1830	— 0,2839 (— 3)
24	0,2012	0,2239	+ 0,7588 (— 1)	0,1400	0,1383
26	+ 0,1513	— 0,2231	+ 0,1744	+ 0,2391	— 0,1767
28	0,1043	0,1892	0,2162	— 0,9606 (— 1)	— 0,1081
30	0,6740 (— 1)	0,1442	0,2113	0,1771	+ 0,4628 (— 2)
32	0,4132 (— 1)	0,1015	0,1795	0,2089	0,1101
34	0,2428 (— 1)	0,6715 (— 1)	0,1382	0,2014	0,1777

С. ПОЛИНОМЫ ЭРМИТА (ФУНКЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА)

Полиномы Эрмита являются решениями дифференциального уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + 2nw = 0,$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ Именно,

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n}(e^{-z^2}),$$

или

$$H_n(z) = 2^n z^n - 2^{n-1}\binom{n}{2} z^{n-2} + 2^{n-2}\cdot 1\cdot 3\cdot \binom{n}{4} z^{n-4} - 2^{n-3}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot \binom{n}{6} z^{n-6} + \ldots$$

Вместо $H_n(z)$ часто рассматривают полиномы $2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$, называя их также полиномами Эрмита *).

Полиномы Эрмита связаны с полиномами Лагерра соотношениями

$$H_{2m}(z) = (-1)^m 2^{2m}\, m!\, L_m^{(-1/2)}(z^2),$$
$$H_{2m+1}(z) = (-1)^m 2^{2m+1} m!\, z L_m^{(1/2)}(z^2).$$

Производящая функция:

$$e^{2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z)\frac{t^n}{n!}.$$

Рекуррентные формулы:

$$H_{n+1}(z) = 2zH_n(z) - 2nH_{n-1}(z),$$
$$\frac{dH_n(z)}{dz} = 2nH_{n-1}(z).$$

Теорема сложения:

$$2^{\frac{n}{2}} H_n(z_1 + z_2) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} H_k(z_1\sqrt{2})\, H_{n-k}(z_2\sqrt{2}),$$

$$\frac{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2)^{\frac{n}{2}}}{n!} H_n\left(\frac{a_1z_1 + a_2z_2 + \ldots + a_mz_m}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2}}\right) =$$

$$= \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} \frac{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!} H_{k_1}(z_1)\ldots H_{k_m}(z_m).$$

Все нули полиномов Эрмита действительные и простые. Для действительных значений аргумента $z = x$ полиномы Эрмита действительны и на действительной оси выполняется соотношение ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x)\, H_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 2^n \sqrt{\pi}\cdot n! & \text{при } m = n. \end{cases}$$

*) Иногда употребляются и другие нормировки этих полиномов. — *Прим. ред.*

Отсюда следует, что функции

$$\varphi_n(z)=\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}H_n(z)}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}}$$

(рис. 85, 86, табл. 37) ортогональны и нормированы на всей прямой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{для } m\neq n,\\ 1 & \text{для } m=n.\end{cases}$$

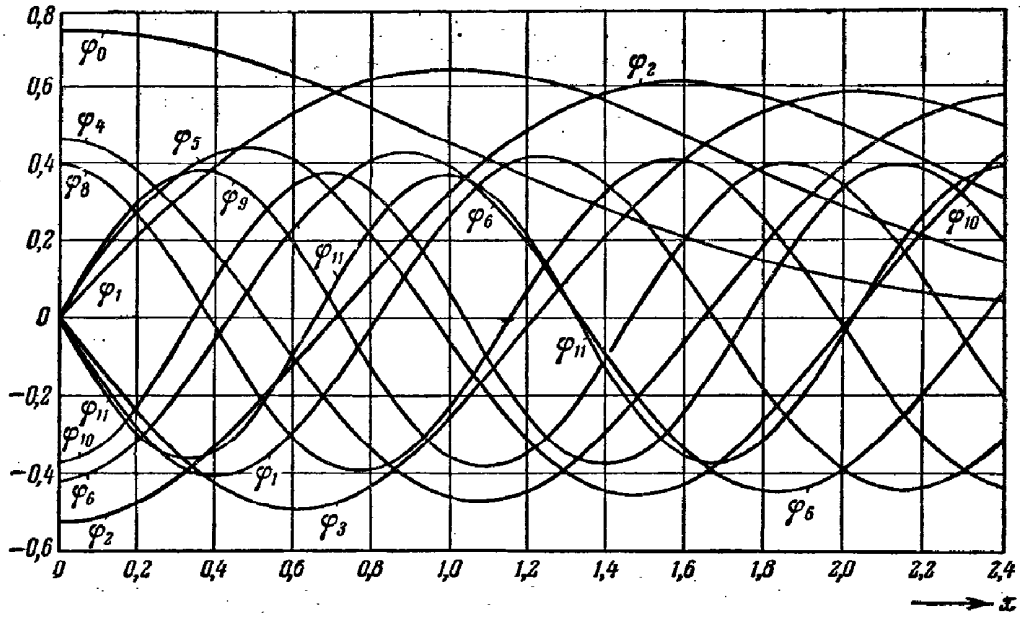


Рис. 85. Функции параболического цилиндра $\varphi_n(x)$.

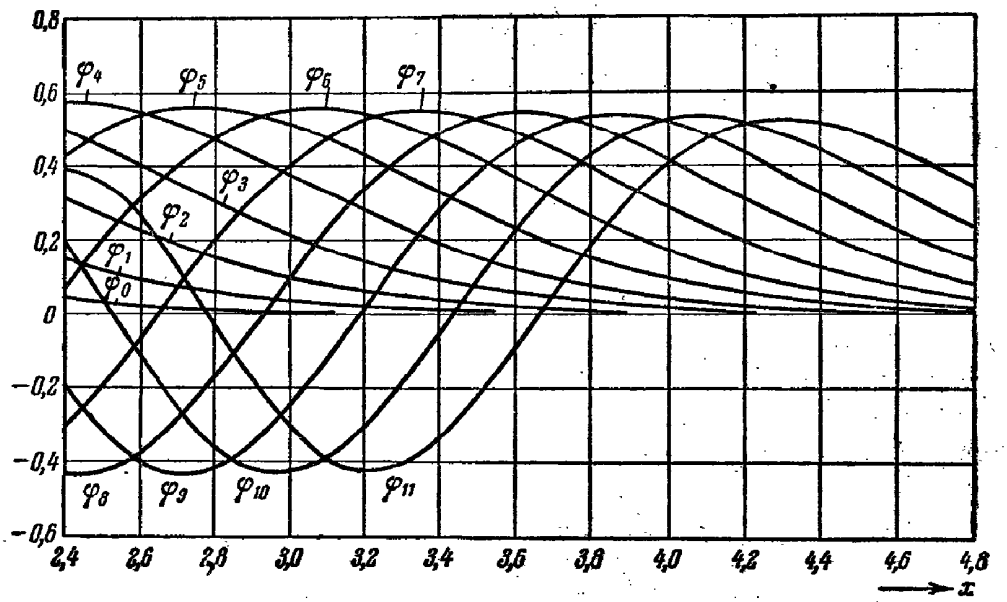


Рис. 86. Функции параболического цилиндра $\varphi_n(x)$.

Полиномы Эрмита низших степеней:

$$H_0(z)=1, \qquad H_3(z)=8z^3-12z,$$
$$H_1(z)=2z, \qquad H_4(z)=16z^4-48z^2+12,$$
$$H_2(z)=4z^2-2, \qquad H_5(z)=32z^5-160z^3+120z.$$

Полиномы Эрмита тесно связаны с *функциями параболического цилиндра* $D_\nu(z)$. Функции $D_\nu(z)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left(\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z^2\right)w=0,$$

где ν — параметр. Для целых значений параметра $\nu=n=0, 1, 2, \ldots$ имеем:

$$D_n(z)=2^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{z^2}{4}}H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{n!\sqrt{\pi}}\,\varphi_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right),$$

т. е. введенная выше функция

$$\varphi_n(x)=\frac{D_n(x\sqrt{2})}{\sqrt{n!\sqrt{\pi}}}.$$

Если определить

$$D_n(z)=\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}\,\Psi_n(z),$$

$$\Psi_n(z)=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\varphi_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)=\frac{D_n(z)}{\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}}=\frac{e^{-\frac{z^2}{4}}H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{n!\,2^n\sqrt{2\pi}}},$$

то функции $\Psi_n(x)$ (рис. 87) будут ортогональными и нормированными на всей прямой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_m(x)\Psi_n(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{для } m\neq n,\\ 1 & \text{для } m=n.\end{cases}$$

Функции $D_n(z)$ допускают интегральное представление (которое также имеет место и для произвольного параметра $\nu\neq -1, -2, \ldots$)

$$D_n(z)=\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i}\,e^{-\frac{1}{4}z^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{zt-\frac{1}{2}t^2}t^{-n-1}\,dt.$$

При $|z|\to\infty$ получаем в секторе $-\frac{3\pi}{4}+\delta\leqslant\arg z\leqslant\frac{3\pi}{4}-\delta$ $(\delta>0)$ асимптотическое представление

$$D_n(z)\approx e^{-\frac{1}{4}z^2}\,z^n\left(1-\frac{n(n-1)}{2z^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!\,(2z^2)^2}-\ldots\right).$$

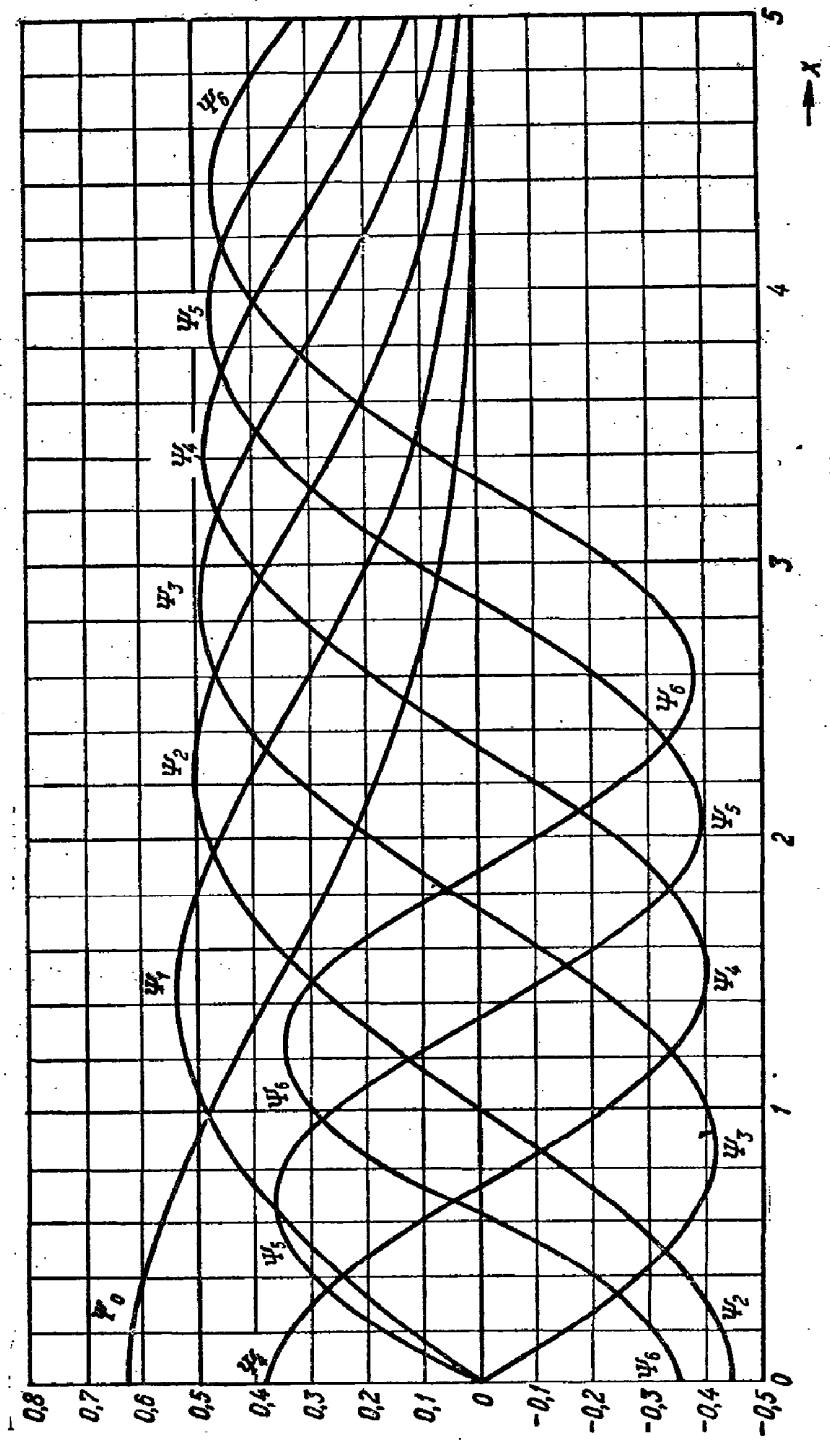


Рис. 87. Функции параболического цилиндра $\Psi_n(x)$.

Таблица 37. Функции параболического цилиндра $\varphi_n(x)$

x	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$	$\varphi_5(x)$
	+ 0,	+ 0,	— 0,	— 0,		
0,00	75113	00000	53113	00000	+ 0,45997	+ 0,00000
04	75052	42456 (— 1)	52900	51942 (— 1)	0,45667	0,58011 (— 1)
08	74873	84709 (— 1)	52265	10330	0,44678	0,11500
12	74574	12656	51214	15351	0,43049	0,16998
16	74157	16780	49753	20200	0,40803	0,22198
0,20	73625	20824	47897	24824	+ 0,37970	+ 0,27007
24	72980	24770	45661	29172	0,34592	0,31343
28	72225	28600	43064	33197	0,30721	0,35132
32	71364	32296	40127	36854	0,26412	0,38308
36	70400	35841	36876	40104	0,21728	0,40817
0,40	69338	39223	33339	42914	+ 0,16735	+ 0,42617
44	68183	42427	29544	45255	0,11506	0,43680
48	66940	45440	25522	47104	0,61153 (— 1)	0,43988
52	65614	48252	21305	48443	+ 0,63840 (— 2)	0,43539
56	64212	50853	16927	49261	— 0,48473 (— 1)	0,42343
0,60	62739	53235	12422	49552	— 0,10266	+ 0,40426
64	61202	55394	78245 (— 1)	49318	0,15543	0,37821
68	59608	57324	31698 (— 1)	48564	0,20606	0,34575
72	57962	59019	*15083 (— 1)	47302	0,25388	0,30747
76	56271	60479	61754 (— 1)	45550	0,29827	0,26404
0,80	54543	61706	10799	43330	— 0,33864	+ 0,21622
84	52783	62705	15347	40671	0,37448	0,16482
88	50998	63470	19790	37602	0,40536	0,11071
92	49195	64006	24100	34158	0,43091	+ 0,54782 (— 1)
96	47379	64325	28251	30378	0,45085	— 0,20325 (— 2)
1,00	45558	64431	32215	26303	— 0,46499	— 0,58816 (— 1)
10	41017	63809	41186	15109	0,47419	0,19476
20	36561	62046	48603	30396 (— 1)	0,44671	0,31184
30	32265	59321	54300	*92024 (— 1)	0,38565	0,39939
40	28190	55816	58206	20963	0,29656	0,45009
1,50	24385	51730	60352	31678	— 0,18666	— 0,46042
60	20884	47255	60840	40899	— 0,64185 (— 1)	0,43076
70	17708	42572	59850	48316	+ 0,62475 (— 1)	0,36498
80	14865	37840	57601	53758	0,18541	0,26976
90	12355	33196	54337	57189	0,29778	0,15369
2,00	10166	28752	50316	58690	+ 0,39425	— 0,26247 (— 1)
10	82812 (— 1)	24594	45791	58436	0,47115	+ 0,10310
20	66792 (— 1)	20781	40995	56671	0,52657	0,22579
30	53334 (— 1)	17348	36130	53683	0,56019	0,33472
40	42164 (— 1)	14311	31366	49778	0,57313	0,42472
2,50	33002 (— 1)	11668	26836	45253	+ 0,56755	+ 0,49263
60	25574 (— 1)	94036 (— 1)	22641	40386	0,54641	0,53728
70	19620 (— 1)	74921 (— 1)	18841	35418	0,51303	0,55927
80	14903 (— 1)	59013 (— 1)	15470	30549	0,47086	0,56060
90	11208 (— 1)	45964 (— 1)	12537	25933	0,42321	0,54426
3,00	83443 (— 2)	35402 (— 1)	10031	21679	+ 0,37301	+ 0,51384
10	61507 (— 2)	26965 (— 1)	79244 (— 1)	17856	0,32278	0,47314
20	44887 (— 2)	20314 (— 1)	61831 (— 1)	14496	0,27447	0,42580
30	32432 (— 2)	15136 (— 1)	47655 (— 1)	11605	0,22951	0,37522
40	23200 (— 2)	11155 (— 1)	36289 (— 1)	91630 (— 1)	0,18887	0,32417
3,50	16431 (— 2)	81326 (— 2)	27303 (— 1)	71384 (— 1)	+ 0,15302	+ 0,27489
	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,		

Продолжение табл. 37

x	$\varphi_6(x)$	$\varphi_7(x)$	$\varphi_8(x)$	$\varphi_9(x)$	$\varphi_{10}(x)$	$\varphi_{11}(x)$
0,00	− 0,41989	− 0,00000	+ 0,39277	+ 0,00000	− 0,37262	− 0,00000
04	0,41552	0,62592 (− 1)	0,38744	0,66320 (− 1)	0,36637	0,69480 (− 1)
08	0,40254	0,12367	0,37159	0,13063	0,34786	0,13641
12	0,38119	0,18182	0,34566	0,19097	0,31769	0,19834
16	0,35195	0,23563	0,31038	0,24554	0,27689	0,25308
0,20	− 0,31542	− 0,28378	+ 0,26666	+ 0,29268	− 0,22681	− 0,29839
24	0,27235	0,32513	0,21574	0,33094	0,16916	0,33285
28	0,22365	0,35873	0,15898	0,35920	0,10584	0,35513
32	0,17033	0,38380	0,97924 (− 1)	0,37662	− 0,39002 (− 1)	0,36443
36	0,11351	0,39974	+ 0,34225 (− 1)	0,38268	+ 0,29143 (− 1)	0,36041
0,40	− 0,54348 (− 1)	− 0,40618	− 0,30398 (− 1)	+ 0,37722	+ 0,96317 (− 1)	− 0,34323
44	+ 0,59254 (− 2)	0,40300	0,94202 (− 1)	0,36041	0,16028	0,31356
48	0,66077 (− 1)	0,39029	0,15548	0,33279	0,21894	0,27249
52	0,12489	0,36838	0,21260	0,29520	0,27034	0,22152
56	0,18116	0,33780	0,26404	0,24878	0,31279	0,16251
0,60	+ 0,23375	− 0,29930	− 0,30844	+ 0,19494	+ 0,34493	− 0,97624 (− 1)
64	0,28163	0,25381	0,34466	0,13531	0,36569	− 0,29210 (− 1)
68	0,32385	0,20239	0,37175	0,71650 (− 1)	0,37445	+ 0,40260 (− 1)
72	0,35959	0,14628	0,38901	+ 0,58762 (− 2)	0,37094	0,10828
76	0,38816	0,86783 (− 1)	0,39606	− 0,60071 (− 1)	0,35530	0,17242
0,80	+ 0,40901	− 0,25288 (− 1)	− 0,39270	− 0,12426	+ 0,32810	+ 0,23039
84	0,42179	+ 0,36788 (− 1)	0,37910	0,18480	0,29022	0,28015
88	0,42630	0,98025 (− 1)	0,35562	0,23995	0,24295	0,31995
92	0,42248	0,15704	0,32294	0,28813	0,18782	0,34840
96	0,41044	0,21250	0,28193	0,32794	0,12668	0,36453
1,00	+ 0,39050	+ 0,26319	− 0,23369	− 0,35830	+ 0,61463 (− 1)	+ 0,36784
10	0,30919	0,36211	− 0,90060 (− 1)	0,38810	− 0,10548	0,32056
20	0,19174	0,41169	+ 0,67662 (− 1)	0,34987	0,25195	0,20467
30	+ 0,52287 (− 1)	0,40609	0,21505	0,25108	0,34998	+ 0,45390 (− 1)
40	− 0,93080 (− 1)	0,34704	0,33000	− 0,10941	0,38156	− 0,12346
1,50	− 0,22833	+ 0,24319	+ 0,39598	+ 0,50714 (− 1)	− 0,34164	− 0,26686
60	0,33933	+ 0,10860	0,40429	0,20255	0,23862	0,35588
70	0,41527	− 0,39433 (− 1)	0,35493	0,32161	− 0,92202 (− 1)	0,37347
80	0,44960	0,18283	0,25602	0,38966	+ 0,70747 (− 1)	0,31726
90	0,44043	0,30501	+ 0,12222	0,39704	0,22141	0,19930
2,00	− 0,39021	− 0,39285	− 0,27844 (− 1)	+ 0,34413	+ 0,33421	− 0,43146 (− 1)
10	0,30509	0,43792	0,17443	0,24020	0,39106	+ 0,12115
20	0,19390	0,43705	0,29938	+ 0,10157	0,38395	0,26334
30	− 0,66902 (− 1)	0,39214	0,38838	− 0,51381 (− 1)	0,31560	0,35851
40	+ 0,65318 (− 1)	0,30942	0,43240	0,19749	0,19825	0,39118
2,50	+ 0,19294	− 0,19825	− 0,42830	− 0,31784	+ 0,50964 (− 1)	+ 0,35738
60	0,30772	− 0,69767 (− 1)	0,37855	0,39819	− 0,10388	0,26450
70	0,40350	+ 0,64541 (− 1)	0,29030	0,43035	0,24423	+ 0,12916
80	0,47642	0,19403	0,17402	0,41262	0,35159	− 0,26351 (− 1)
90	0,52493	0,30982	− 0,41793 (− 1)	0,34923	0,41328	0,17807
3,00	+ 0,54949	+ 0,40541	+ 0,94123 (− 1)	− 0,24911	− 0,42352	− 0,30424
10	0,55216	0,47695	0,22277	− 0,12416	0,38340	0,38840
20	0,53613	0,52280	0,33497	+ 0,12502 (− 1)	0,29995	0,42121
30	0,50537	0,54403	0,42491	0,14819	0,18447	0,40089
40	0,40393	0,54303	0,48916	0,27206	− 0,50381 (− 1)	0,33246
3,50	+ 0,41576	+ 0,52334	+ 0,52694	+ 0,37599	+ 0,88619 (− 1)	− 0,22623

Продолжение табл. 37

x	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$	$\varphi_5(x)$
	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,
3,50	16431 (— 2)	81326 (— 2)	27303 (— 1)	71384 (— 1)	15302	27489
60	11521 (— 2)	58652 (— 2)	20301 (— 1)	54883 (— 1)	12213	22898
70	79980 (— 3)	41849 (— 2)	14919 (— 1)	41653 (— 1)	96057 (— 1)	18753
80	54967 (— 3)	29540 (— 2)	10836 (— 1)	31210 (— 1)	74477 (— 1)	15108
90	37403 (— 3)	20629 (— 2)	77810 (— 2)	23093 (— 1)	56944 (— 1)	11979
4,00	25197 (— 3)	14254 (— 2)	55234 (— 2)	16876 (— 1)	42950 (— 1)	93556 (— 1)
20	11098 (— 3)	65918 (— 3)	26901 (— 2)	86867 (— 2)	23469 (— 1)	54570 (— 1)
40	46962 (— 4)	29222 (— 3)	12526 (— 2)	42613 (— 2)	12173 (— 1)	30065 (— 1)
60	19093 (— 4)	12421 (— 3)	55787 (— 3)	19939 (— 2)	60022 (— 2)	15679 (— 1)
80	74583 (— 5)	50629 (— 4)	23774 (— 3)	89043 (— 3)	28163 (— 2)	77533 (— 2)
5,00	27992 (— 5)	19793 (— 4)	96986 (— 4)	37979 (— 3)	12588 (— 2)	36408 (— 2)
20	10094 (— 5)	74230 (— 5)	37885 (— 4)	15478 (— 3)	53636 (— 3)	16241 (— 2)
40	34970 (— 6)	26706 (— 5)	14174 (— 4)	60314 (— 4)	21764 (— 3)	68935 (— 3)
60	11641 (— 6)	92188 (— 6)	50802 (— 5)	22477 (— 4)	84600 (— 4)	27953 (— 3)
80	37229 (— 7)	30537 (— 6)	17448 (— 5)	80135 (— 5)	31354 (— 4)	10785 (— 3)
6,00	11440 (— 7)	97069 (— 7)	57433 (— 6)	27343 (— 5)	11104 (— 4)	39689 (— 4)
20	33774 (— 8)	29613 (— 7)	18121 (— 6)	89316 (— 6)	37587 (— 5)	13941 (— 4)
40	95799 (— 9)	86706 (— 8)	54815 (— 7)	27937 (— 6)	12168 (— 5)	46753 (— 5)
60	26108 (— 9)	24369 (— 8)	15899 (— 7)	83688 (— 7)	37679 (— 6)	14980 (— 5)
80	68364 (— 10)	65743 (— 9)	44222 (— 8)	24016 (— 7)	11165 (— 6)	45873 (— 6)
7,00	17199 (— 10)	17026 (— 9)	11797 (— 8)	66034 (— 8)	31664 (— 7)	13428 (— 6)
50	45833 (— 12)	48613 (— 11)	36135 (— 10)	21732 (— 9)	11212 (— 8)	50501 (— 8)
8,00	95123 (— 14)	10762 (— 12)	85424 (— 12)	54920 (— 11)	30331 (— 10)	14853 (— 9)
	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,

x	$\varphi_6(x)$	$\varphi_7(x)$	$\varphi_8(x)$	$\varphi_9(x)$	$\varphi_{10}(x)$	$\varphi_{11}(x)$
	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,
3,50	41576	52334	52694	37599	88619 (— 1)	22623
60	36443	48928	53981	45479	22009	95779 (— 1)
70	31290	44525	53101	50533	33410	*44335 (— 1)
80	26346	39528	50458	53120	42404	18060
90	21777	34288	46491	53211	48668	30198
4,00	17685	29151	41759	51258	52076	39949
20	11090	19845	31301	43263	51566	51099
40	65262 (— 1)	12565	21539	32830	44166	51561
60	36160 (— 1)	74396 (— 1)	13729	22756	33789	44578
80	18916 (— 1)	41354 (— 1)	81555 (— 1)	14555	23507	34235
5,00	93611 (— 2)	21648 (— 1)	45363 (— 1)	86512 (— 1)	15041	23819
20	43865 (— 2)	10689 (— 1)	23688 (— 1)	47988 (— 1)	89124 (— 1)	15186
40	19505 (— 2)	49918 (— 2)	11653 (— 1)	24958 (— 1)	49216 (— 1)	89530 (— 1)
60	82652 (— 3)	22152 (— 2)	54296 (— 2)	12245 (— 1)	25523 (— 1)	49252 (— 1)
80	33252 (— 3)	93103 (— 3)	23889 (— 2)	56538 (— 2)	12400 (— 1)	25274 (— 1)
6,00	12735 (— 3)	37168 (— 3)	99360 (— 3)	24665 (— 2)	56734 (— 2)	12163 (— 1)
20	46468 (— 4)	14109 (— 3)	39392 (— 3)	10183 (— 2)	24497 (— 2)	55058 (— 2)
40	16165 (— 4)	50970 (— 4)	14797 (— 3)	39841 (— 3)	99993 (— 3)	23489 (— 2)
60	53640 (— 5)	17537 (— 4)	52853 (— 4)	14791 (— 3)	38642 (— 3)	94647 (— 3)
80	16991 (— 5)	57511 (— 5)	17964 (— 4)	52164 (— 4)	14159 (— 3)	36080 (— 3)
7,00	51377 (— 6)	17980 (— 5)	58123 (— 5)	17485 (— 4)	49223 (— 4)	13025 (— 3)
50	20844 (— 7)	79255 (— 7)	27770 (— 6)	90715 (— 6)	27791 (— 5)	80228 (— 5)
8,00	65836 (— 9)	26778 (— 8)	10095 (— 7)	35547 (— 7)	11760 (— 6)	36726 (— 6)
	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,

XII. ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА (СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ)

1. Определения и обозначения

Функциями Лежандра (или *сферическими функциями*) называют решения дифференциального уравнения

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz}+\left[\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right]w=0.$$

Здесь z — комплексная переменная, постоянные ν, μ, называемые *индексами*, также могут быть произвольными комплексными числами. Однако в дальнейшем

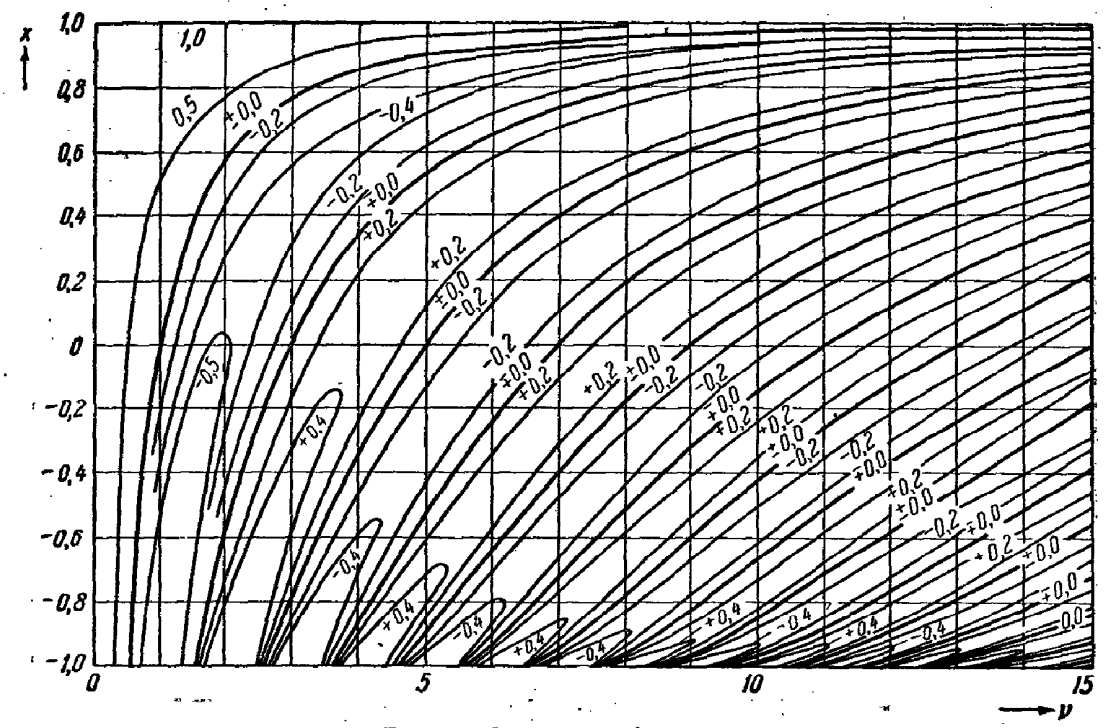


Рис. 88. Кривые $P_\nu(x)=\text{const}$ в плоскости ν, x.

часто будет предполагаться, что индексы являются действительными целыми неотрицательными числами: $\nu=n$, $\mu=m$.

В частном случае $m=0$ получается дифференциальное уравнение Лежандра

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz}+\nu(\nu+1)w=0.$$

Это уравнение при $\nu=n\geqslant 0$ имеет своим решением полином $P_n(z)$, который называется *полиномом Лежандра первого рода n-й степени* (*функцией Лежандра первого рода* или *зональной гармонической сферической функцией* 1-*го рода*).

Второе решение, линейно независимое от первого, называется *функцией Лежандра 2-го рода* (или *зональной гармонической сферической функцией 2-го рода*). Она является бесконечнозначной аналитической функцией z, точками ветвления которой будут ± 1. На интервале $-1<x<1$ действительной оси эта функция будет действительной однозначной функцией, которую дальше будем обозначать через $Q_n(x)$. Далее, в комплексной плоскости, разрезанной вдоль действительной оси от -1 до $+1$, она определяет однозначную функцию, которая действительна вдоль полупрямой $x>1$; эта ветвь функции в дальнейшем обозначается через $\mathfrak{Q}_n(z)$.

Для произвольного комплексного индекса ν дифференциальное уравнение Лежандра имеет два решения $P_\nu(z)$, $Q_\nu(z)$, которые являются аналитическими функциями от ν и обращаются в $P_n(z)$, $Q_n(z)$ при $\nu=n$. Очевидно, $P_{-\nu-1}(z)=P_\nu(z)$. Функции $P_\nu(z)$, $Q_\nu(z)$ — бесконечнозначные, точками ветвления для $P_\nu(z)$ будут -1 и ∞, для $Q_\nu(z)$ — ± 1 и ∞. Рис. 88 показывает $P_\nu(x)$ для действительных ν и x.

Решение при $m\neq 0$ может быть выражено через решение при $m=0$. В общем случае $\nu=n$, $\mu=m\neq 0$ в качестве решений дифференциального уравнения получаем *присоединенные функции Лежандра 1-го рода* $P_n^m(z)$ и *2-го рода* $Q_n^m(z)$. Здесь n называется *степенью*, а m — *порядком* функции. На действительной оси между точками -1 и 1 обе функции будут действительными и обозначаются через $P_n^m(x)$ и $Q_n^m(x)$. Подобным образом можно определить в разрезанной от -1 до $+1$ комплексной плоскости однозначные ветви функций, действительные вдоль прямой $x>1$ действительной оси; они обозначаются через $\mathfrak{P}_n^m(z)$ и $\mathfrak{Q}_n^m(z)$.

2. Функции Лежандра 1-го и 2-го рода

2.1. Полином (функция) Лежандра $P_n(z)$ n-й степени может быть определен как

$$P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n.$$

С помощью производящей функции $[1-2zr+r^2]^{-\frac{1}{2}}$ можно получить полиномы Лежандра из разложения (выполняющегося для $|r|<\min|z\pm\sqrt{z^2-1}|$)

$$[1-2zr+r^2]^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)r^n$$

или из разложения (выполняющегося для $|r|>\max|z\pm\sqrt{z^2-1}|$)

$$[1-2zr+r^2]^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)\frac{1}{r^{n+1}}.$$

Разложение $P_n(z)$ по степеням z имеет вид

$$P_n(z)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{n!}\left[z^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}z^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}z^{n-4}-\ldots\right].$$

Для действительного аргумента $x=\cos\vartheta$ имеем тригонометрическое представление

$$P_n(\cos\vartheta)=2\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\left[\cos n\vartheta+\frac{1}{1}\cdot\frac{n}{2n-1}\cos(n-2)\vartheta+\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\vartheta+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\cos(n-6)\vartheta+\ldots\right].$$

Если n — нечетное целое число, то сумма кончается на члене с $\cos\vartheta$; если n четное — на члене, не зависящем от $\cos\vartheta$, причем этот член умножается дополнительно на $\frac{1}{2}$.

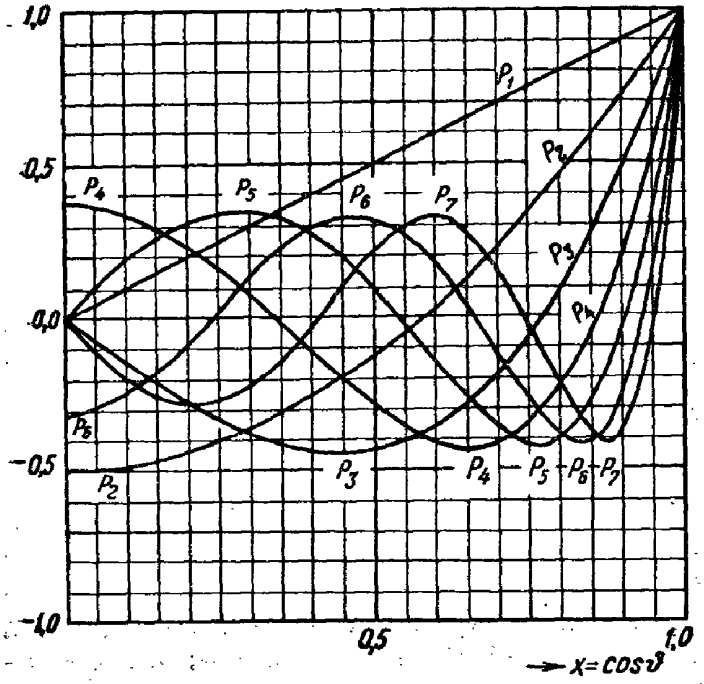


Рис. 89. Функции Лежандра 1-го рода $P_n(x)$.

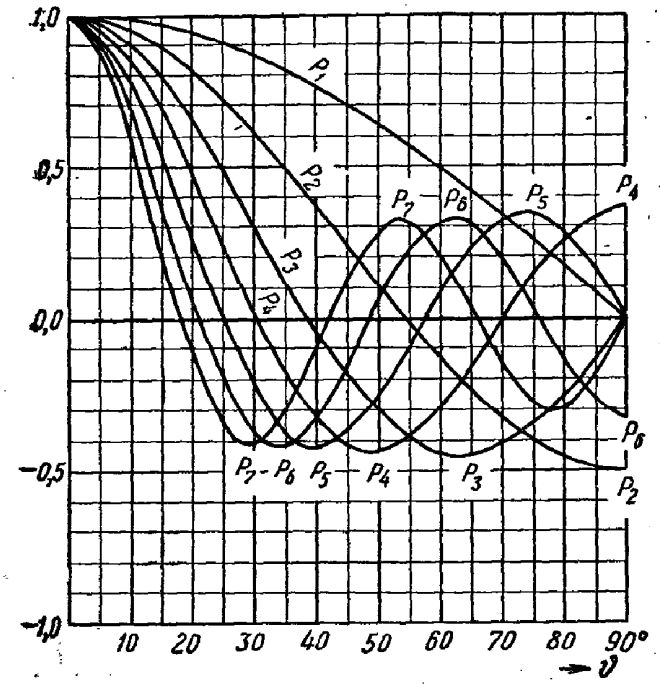


Рис. 90. Функции Лежандра 1-го рода $P_n(\cos\vartheta)$.

Функции Лежандра низших степеней (рис. 89, 90; таблицы 38—40):

$$P_0(x)=1,$$

$$P_1(x)=x=\cos\vartheta,$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)=$$

$$=\frac{1}{4}(3\cos 2\vartheta+1),$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)=$$

$$=\frac{1}{8}(5\cos 3\vartheta+3\cos\vartheta),$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)=$$

$$=\frac{1}{64}(35\cos 4\vartheta+20\cos 2\vartheta+9),$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15)=$$

$$=\frac{1}{128}(63\cos 5\vartheta+35\cos 3\vartheta+$$

$$+30\cos\vartheta),$$

$$P_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+$$

$$+105x^2-5)=$$

$$=\frac{1}{512}(231\cos 6\vartheta+126\cos 4\vartheta+$$

$$+105\cos 2\vartheta+50).$$

2.2. Функции Лежандра 2-го рода при предположениях, сделанных выше относительно их определения, могут быть при $-1<x<1$ представлены в виде

$$Q_n(x)=$$

$$=P_n(x)\operatorname{Arth}x-W_{n-1}(x)=$$

$$=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{1+x}{1-x}-W_{n-1}(x),$$

а для комплексного аргумента z вне отрезка $-1\leqslant x\leqslant 1$ действительной оси — в виде

$$\mathfrak{Q}_n(z)=P_n(z)\operatorname{Arcth}z-W_{n-1}(z)=\frac{1}{2}P_n(z)\ln\frac{z+1}{z-1}-W_{n-1}(z).$$

где $W_{n-1}(z)$ означает полином:

$$W_{n-1}(z)=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}P_{m-1}(z)P_{n-m}(z)=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\ldots n}\left\{z^{n-1}+z^{n-3}\left(\frac{1}{3}-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\right)+\right.$$
$$\left.+z^{n-5}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}\right)+\ldots\right\}.$$

Если n четное, то $W_{n-1}(z)$ оканчивается на члене с z^1, если n нечетное — на члене с z^0.

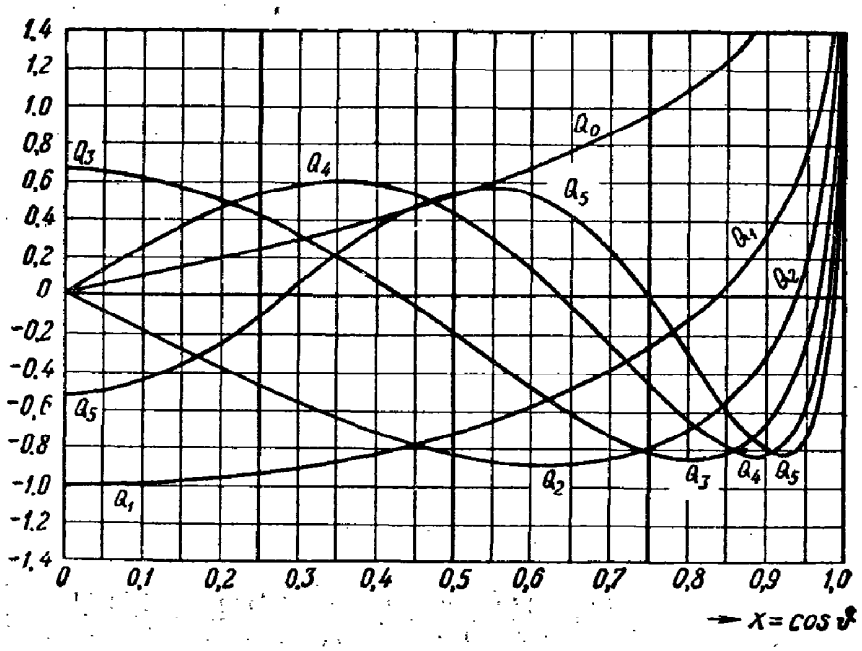


Рис. 91. Функции Лежандра 2-го рода $Q_n(x)$.

Если обозначить значения $\Omega_n(z)$ на верхнем и нижнем краях разреза $-1<x<1$ через $\Omega_n(x+0\cdot i)$ и $\Omega_n(x-0\cdot i)$, то

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}\{\Omega_n(x+0\cdot i)+\Omega_n(x-0\cdot i)\},$$
$$\Omega_n(x\pm0\cdot i)=Q_n(x)\mp\frac{1}{2}\pi iP_n(x).$$

Для $|z|>1$ справедливо разложение

$$\Omega_n(z)=\frac{n!}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)}\left\{\frac{1}{z^{n+1}}+\frac{(n+1)(n+2)}{2\cdot(2n+3)}\cdot\frac{1}{z^{n+3}}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot4\cdot(2n+3)(2n+5)}\cdot\frac{1}{z^{n+5}}+\ldots\right\}.$$

Для действительного аргумента $x=\cos\vartheta$, $0<\vartheta<\pi$, можно получить тригонометрическое представление

$$Q_n(\cos\vartheta)=2\cdot\frac{2\cdot4\ldots2n}{3\cdot5\ldots(2n+1)}\left\{\cos(n+1)\vartheta+\frac{1\cdot(n+1)}{1\cdot(2n+3)}\cos(n+3)\vartheta+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot3\cdot(n+1)(n+2)}{1\cdot2\cdot(2n+3)(2n+5)}\cos(n+5)\vartheta+\ldots\right\}.$$

Функции Лежандра 2-го рода низших индексов (рис. 91, таблица 41):

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=\operatorname{Arth}x, \qquad Q_3(x)=P_3(x)\,Q_0(x)-\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3},$$

$$Q_1(x)=xQ_0(x)-1, \qquad Q_4(x)=P_4(x)\,Q_0(x)-\frac{35}{8}x^3+\frac{55}{24}x,$$

$$Q_2(x)=P_2(x)\,Q_0(x)-\frac{3}{2}x, \qquad Q_5(x)=P_5(x)\,Q_0(x)-\frac{63}{8}x^4+\frac{49}{8}x^2-\frac{8}{15}.$$

Соответствующие выражения для $\Omega_n(z)$ получаются при замене $\operatorname{Arth}x$ на $\operatorname{Arcth}z$.

3. Присоединенные функции Лежандра 1-го и 2-го рода

3.1. Присоединенные функции Лежандра 1-го рода на основании предположений, сделанных выше, определяются при $-1<x<1$ или при $x=\cos\vartheta$, $0<\vartheta<\pi$, как

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n=\sin^m\vartheta\,\frac{d^mP_n(\cos\vartheta)}{(d\cos\vartheta)^m}.$$

Более подробно

$$P_n^m(x)=\frac{(2n)!}{2^n n!\,(n-m)!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left\{x^{n-m}-\frac{(n-m)(n-m-1)}{2\cdot(2n-1)}x^{n-m-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-m-4}-\dots\right\}$$

или

$$P_n^m(x)=\frac{(n+m)!}{2^m m!\,(n-m)!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left\{1-\frac{(n-m)(n+m+1)}{1\cdot(m+1)}\frac{1-x}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-m)(n-m-1)(n+m+1)(n+m+2)}{1\cdot2\cdot(m+1)(m+2)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^2-\dots\right\}.$$

В частности, $P_n^n(x)=\frac{(2n)!}{2^n n!}(1-x^2)^{\frac{n}{2}}=1\cdot3\dots(2n-1)(1-x^2)^{\frac{n}{2}}$.

Присоединенные функции Лежандра 1-го рода низших индексов:

$$P_1^1(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=\sin\vartheta, \qquad P_2^1(x)=3(1-x^2)^{\frac{1}{2}}x=\frac{3}{2}\sin2\vartheta,$$

$$P_2^2(x)=3(1-x^2)=\frac{3}{2}(1-\cos2\vartheta),$$

$$P_3^1(x)=\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(5x^2-1)=\frac{3}{8}(\sin\vartheta+5\sin3\vartheta),$$

$$P_3^2(x)=15(1-x^2)x=\frac{15}{4}(\cos\vartheta-\cos3\vartheta),$$

$$P_3^3(x)=15(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{15}{4}(3\sin\vartheta-\sin3\vartheta),$$

$$P_4^1(x)=\frac{5}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(7x^3-3x)=\frac{5}{16}(2\sin2\vartheta+7\sin4\vartheta),$$

$$P_4^2(x)=\frac{15}{2}(1-x^2)(7x^2-1)=\frac{15}{16}(3+4\cos2\vartheta-7\cos4\vartheta),$$

$$P_4^3(x)=105(1-x^2)^{\frac{3}{2}}x=\frac{105}{8}(2\sin2\vartheta-\sin4\vartheta),$$

$$P_4^4(x)=105(1-x^2)^2=\frac{105}{8}(3-4\cos2\vartheta+\cos4\vartheta).$$

В комплексной плоскости, разрезанной между точками -1 и $+1$, присоединенные функции Лежандра 1-го рода определяются как

$$\mathfrak{P}_n^m(z)=(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_n(z)}{dz^m}.$$

Представления для $\mathfrak{P}_n^m(z)$, соответствующие приведенным выше формулам для $P_n^m(x)$, получаются, если заменить в этих формулах повсюду $(1-x^2)^{m/2}$ через $(z^2-1)^{m/2}$ и x через z. Значения $\mathfrak{P}_n^m(z)$ на верхнем и нижнем краях разреза связаны соотношением

$$\mathfrak{P}_n^m(x\pm 0\cdot i)=e^{\pm i\frac{\pi}{2}m}P_n^m(x).$$

3.2. Присоединенные функции Лежандра 2-го рода определяются при $-1<x<1$ или при $x=\cos\vartheta$, $0<\vartheta<\pi$, как

$$Q_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mQ_n(x)}{dx^m}=\sin^m\vartheta\frac{d^mQ_n(\cos\vartheta)}{(d\cos\vartheta)^m},$$

а в комплексной плоскости, разрезанной между точками -1 и $+1$:

$$\mathfrak{Q}_n^m(z)=(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m\mathfrak{Q}_n(z)}{dz^m}.$$

Для $|z|>1$ справедливо разложение

$$\mathfrak{Q}_n^m(z)=(-1)^m\frac{2^nn!\,(n+m)!}{(2n+1)!}(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\left\{\frac{1}{z^{n+m+1}}+\frac{(n+m+1)(n+m+2)}{2(2n+3)}\frac{1}{z^{n+m+3}}+\ldots\right\}.$$

Далее, для значений $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ на краях разреза выполнены равенства

$$Q_n^m(x)=\frac{1}{2}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}m}\mathfrak{Q}_n^m(x+0\cdot i)+e^{i\frac{\pi}{2}m}\mathfrak{Q}_n^m(x-0\cdot i)\right\},$$

$$\mathfrak{Q}_n^m(x\pm 0\cdot i)=e^{\pm i\frac{\pi}{2}m}\left\{Q_n^m(x)\mp i\frac{\pi}{2}P_n^m(x)\right\}.$$

Часто в литературе функции $(-1)^mP_n^m(x)$, $(-1)^mQ_n^m(x)$ обозначают через $P_n^m(x)$, $Q_n^m(x)$ и называют *присоединенными функциями Лежандра*.

4. Интегральные представления

$$P_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\varphi}{(z\pm\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(z\pm\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^n\,d\varphi, \qquad \text{(Лаплас)}$$

$$P_n(\cos\vartheta)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\vartheta\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\vartheta}}d\varphi=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_\vartheta^\pi\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos\varphi}}d\varphi, \qquad (0<\vartheta<\pi),$$

(Мелер)

$$\mathfrak{P}_n^m(z)=\frac{(n+m)!}{\pi n!}\int_0^\pi(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^n\cos m\varphi\,d\varphi \qquad [\arg(z^2-1)=0 \text{ для } |z|>1],$$

$$\mathfrak{Q}_n(z)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(t)}{z-t}\,dt, \qquad \text{(Нейман)}$$

$$\mathfrak{Q}_n(z)=\int_0^{\infty}\frac{d\psi}{(z+\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch}\psi)^{n+1}}=\int_0^{\psi_0}(z-\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch}\psi)^n\,d\psi \qquad \text{(Гейне)}$$

$$\left(\psi_0=\frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1},\quad \operatorname{cth}\psi_0=z;\quad \arg(z^2-1)=0 \text{ для } |z|>1\right),$$

$$\mathfrak{Q}_n^m(z)=(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch} m\psi}{(z+\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch}\psi)^{n+1}}d\psi \qquad [\arg(z^2-1)=0 \text{ для } |z|>1].$$

5. Частные значения. Асимптотика

5.1. Имеют место следующие равенства:

$$P_n(1)=1,\quad P_n(-1)=(-1)^n,\quad P_{2n+1}(0)=0,\quad P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{1\cdot3\ \dots\ (2n-1)}{2\cdot4\ \dots\ 2n},$$

$$Q_{2n}(0)=0,\quad Q_{2n+1}(0)=(-1)^{n+1}\frac{2\cdot4\ \dots\ 2n}{1\cdot3\ \dots\ (2n+1)},$$

$$\lim_{x\to\pm1}|Q_n(x)|=\infty,\qquad \lim_{z\to\pm1}|\mathfrak{Q}_n(z)|=\infty.$$

5.2. Все нули полинома $P_n(x)$ действительны, различны и лежат в интервале $-1<x<1$. Нули полиномов $P_n(x)$ и $P_{n+1}(x)$ разделяют друг друга. Присоединенная функция $P_n^m(z)$ имеет точно $n-m$ простых действительных нулей в интервале $-1<x<1$. Функция $Q_n(x)$ имеет точно $n+1$ нулей в интервале $-1<x<1$.

5.3. Для $|z|\gg1$ получаем в первом приближении

$$\frac{(n-m)!}{\Gamma(n+1/2)}\mathfrak{P}_n^m(z)\approx\frac{(2z)^n}{\sqrt{\pi}},\qquad \frac{\Gamma(n+3/2)}{(n+m)!}\mathfrak{Q}_n^m(z)\approx(-1)^m\frac{\sqrt{\pi}}{(2z)^{n+1}}.$$

5.4. При $\varepsilon\leqslant\vartheta\leqslant\pi-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ имеем для $n\gg1$, $n\gg\frac{1}{\varepsilon}$ асимптотическое представление

$$P_n(\cos\vartheta)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi n\sin\vartheta}}\left[\left(1-\frac{1}{4n}\right)\sin\varphi-\frac{1}{8n}\operatorname{ctg}\vartheta\cos\varphi\right],$$

$$Q_n(\cos\vartheta)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2n\sin\vartheta}}\left[\left(1-\frac{1}{4n}\right)\cos\varphi+\frac{1}{8n}\operatorname{ctg}\vartheta\sin\varphi\right],$$

где $\varphi=\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta+\frac{\pi}{4}$, и для $n\gg1$, $n\gg m$, $n\gg\frac{1}{\varepsilon}$

$$P_n^m(\cos\vartheta)\approx(-n)^m\sqrt{\frac{2}{\pi n\sin\vartheta}}\sin\left(\varphi+\frac{m\pi}{2}\right),$$

$$Q_n^m(\cos\vartheta)\approx(-n)^m\sqrt{\frac{\pi}{2n\sin\vartheta}}\cos\left(\varphi+\frac{m\pi}{2}\right),$$

где $\varphi=\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta+\frac{\pi}{4}$.

6. Функциональные уравнения. Нормированные функции Лежандра

6.1. Имеем правила изменения знака аргумента:

$$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x),\qquad Q_n(-x)=(-1)^{n+1}Q_n(x),$$

$$P_n^m(-x)=(-1)^{n-m}P_n^m(x),\qquad Q_n^m(-x)=(-1)^{n+m+1}Q_n^m(x).$$

Эти уравнения остаются верными, если заменить P через $\mathfrak{P}$ и Q через $\mathfrak{Q}$.

6.2. Теорема сложения. Пусть α означает расстояние между двумя точками на единичной сфере с координатами (ϑ, φ) и (ϑ', φ'):

$$\cos\alpha = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi');$$

тогда

$$P_n(\cos\alpha) = P_n(\cos\vartheta)\,P_n(\cos\vartheta') + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n-m)!}\,P_n^m(\cos\vartheta)\,P_n^m(\cos\vartheta')\cos m(\varphi-\varphi')$$

или

$$\frac{2n+1}{2}P_n(\cos\alpha) = \sum_{m=-n}^{+n}\overline{P_n^m}(\cos\vartheta)\,\overline{P_n^m}(\cos\vartheta')\,e^{im(\varphi-\varphi')},$$

где $\overline{P_n^m}$ —нормированные функции (см. 6.6).

6.3. Соотношения между P и Q ($\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$):

$$P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n = \frac{1}{n}, \qquad P_nQ_{n-2} - P_{n-2}Q_n = \frac{(2n-1)x}{n(n-1)},$$

$$\frac{Q_n}{P_n} = Q_0 - \left\{\frac{1}{nP_nP_{n-1}} + \frac{1}{(n-1)P_{n-1}P_{n-2}} + \ldots + \frac{1}{P_1P_0}\right\},$$

$$(1-x^2)[P_nQ_n' - Q_nP_n'] = 1,$$

$$P_{n-1}^mQ_n^m - Q_{n-1}^mP_n^m = P_{n-2}^mQ_{n-1}^m - Q_{n-2}^mP_{n-1}^m.$$

Здесь у всех функций аргумент x.

Все равенства останутся верными, если заменим x через z и P через $\mathfrak{P}$, Q через $\mathfrak{Q}$.

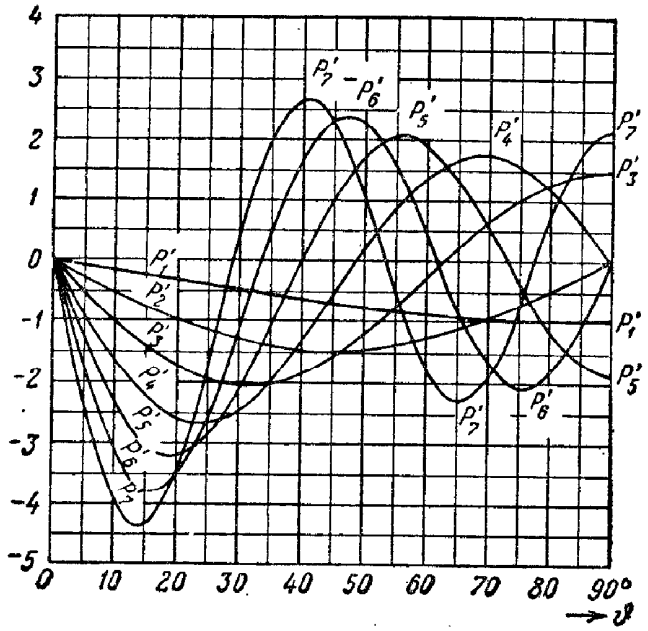


Рис. 92. Производные по ϑ от функций Лежандра 1-го рода $P_n(\cos\vartheta)$.

6.4. Пусть, далее, K означает любую функцию Лежандра, а именно, $K_n(x)$ означает $P_n(x)$ или $Q_n(x)$, $K_n(z)$ означает $\mathfrak{P}_n(z)$ или $\mathfrak{Q}_n(z)$ и K_n означает $K_n(x)$ или $K_n(z)$. Аналогичные значения имеют $K_n^m(x)$, $K_n^m(z)$ и K_n^m. В следующих формулах вместо ξ можно положить x или z.

Справедливы рекуррентные формулы:

$$nK_n+(n-1)K_{n-2}-(2n-1)\xi K_{n-1}=0,$$

$$K_n^{m+2}(z)+2(m+1)\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}K_n^{m+1}(z)-(n-m)(n+m+1)K_n^m(z)=0,$$

$$K_n^{m+2}(x)-2(m+1)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}K_n^{m+1}(x)+(n-m)(n+m+1)K_n^m(x)=0,$$

$$(2n+1)\xi K_n^m-(n-m+1)K_{n+1}^m-(n+m)K_{n-1}^m=0.$$

6.5. Дифференциальные уравнения:

$$(\xi^2-1)K_n'=n(\xi K_n-K_{n-1})=-(n+1)(\xi K_n-K_{n+1}),$$

$$nK_n=\xi K_n'-K_{n-1}'\quad(n+1)K_n=-\xi K_n'+K_{n+1}',$$

$$(2n+1)K_n=K_{n+1}'-K_{n-1}',$$

$$(\xi^2-1)(K_n^m)'-(n-m+1)K_{n+1}^m+(n+1)\xi K_n^m=0.$$

Положив $x=\cos\vartheta$, получим производные по ϑ от полиномов Лежандра $P_n(\cos\vartheta)$ (рис. 92, таблица 40):

$$\frac{dP_{n+1}(\cos\vartheta)}{d\vartheta}=\frac{dP_{n-1}(\cos\vartheta)}{d\vartheta}-(2n+1)P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta$$

и, в частности, для низших индексов:

$$\frac{dP_0(\cos\vartheta)}{d\vartheta}=0,\quad \frac{dP_1(\cos\vartheta)}{d\vartheta}=-\sin\vartheta,\quad \frac{dP_2(\cos\vartheta)}{d\vartheta}=-\frac{3}{2}\sin 2\vartheta,$$

$$\frac{dP_3(\cos\vartheta)}{d\vartheta}=-6\sin\vartheta+\frac{15}{2}\sin^3\vartheta,\quad \frac{dP_4(\cos\vartheta)}{d\vartheta}=-5\sin 2\vartheta+\frac{35}{4}\sin^2\vartheta\sin 2\vartheta,$$

$$\frac{dP_5(\cos\vartheta)}{d\vartheta}=-15\sin\vartheta+\frac{105}{2}\sin^3\vartheta-\frac{315}{8}\sin^5\vartheta,$$

$$\frac{dP_6(\cos\vartheta)}{d\vartheta}=-\frac{21}{2}\sin 2\vartheta+\frac{189}{4}\sin^2\vartheta\sin 2\vartheta-\frac{693}{16}\sin^4\vartheta\sin 2\vartheta,$$

$$\frac{dP_7(\cos\vartheta)}{d\vartheta}=-28\sin\vartheta+189\sin^3\vartheta-\frac{693}{2}\sin^5\vartheta+\frac{3003}{16}\sin^7\vartheta.$$

6.6. Соотношения ортогональности:

$$\int_{-1}^{+1}P_n(x)P_l(x)\,dx=0,\ \text{если } l\neq n,\quad \int_{-1}^{+1}[P_n(x)]^2\,dx=\frac{2}{2n+1},$$

$$\int_{-1}^{+1}P_n^m(x)P_l^m(x)\,dx=0,\ \text{если } l\neq n,\quad \int_{-1}^{+1}[P_n^m(x)]^2\,dx=\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

Отсюда получим *нормированные функции Лежандра* (рис. 93—96):

$$\overline{P_n}(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x),\qquad \overline{P_n^m}(x)=\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}}P_n^m(x).$$

Далее,

$$\int_{-1}^{+1}P_n^m(x)P_n^l(x)\frac{dx}{1-x^2}=0\ \text{для } l\neq m,\quad \int_{-1}^{+1}[P_n'(x)]^2\,dx=n(n+1),$$

$$(2n+1)\int_1^{\infty}[\Omega_n(z)]^2\,dz=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots,$$

$$(2n+1)\int_0^1[Q_n(x)]^2\,dx=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}-\ldots$$

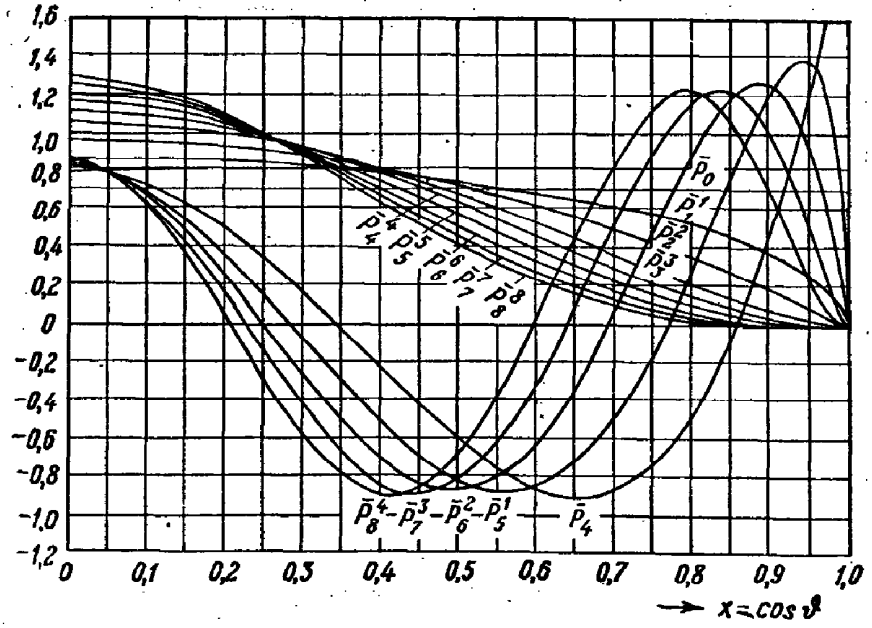


Рис. 93. Нормированные присоединенные функции Лежандра $\overline{P_n^n}(x)$ и $\overline{P_{n+4}^n}(x)$.

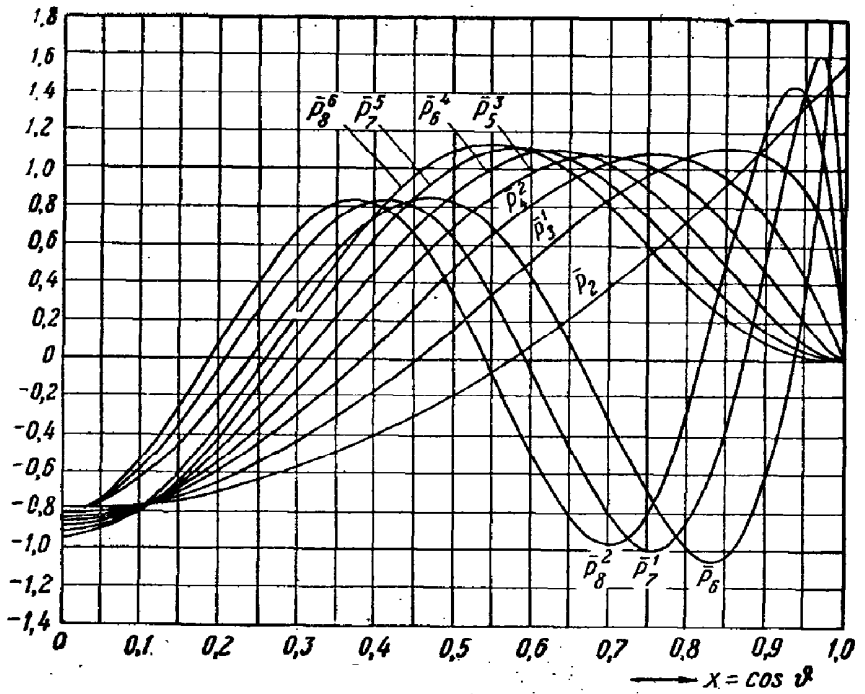


Рис. 94. Нормированные присоединенные функции Лежандра $\overline{P_{n+2}^n}(x)$ и $\overline{P_{n+6}^n}(x)$.

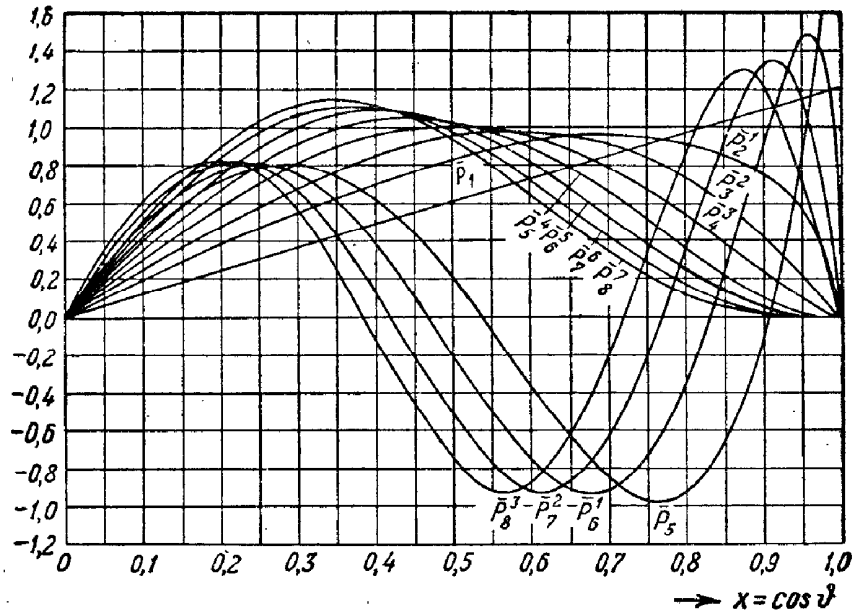


Рис. 95. Нормированные присоединенные функции Лежандра $\overline{P^n_{n+1}}(x)$ и $\overline{P^n_{n+5}}(x)$.

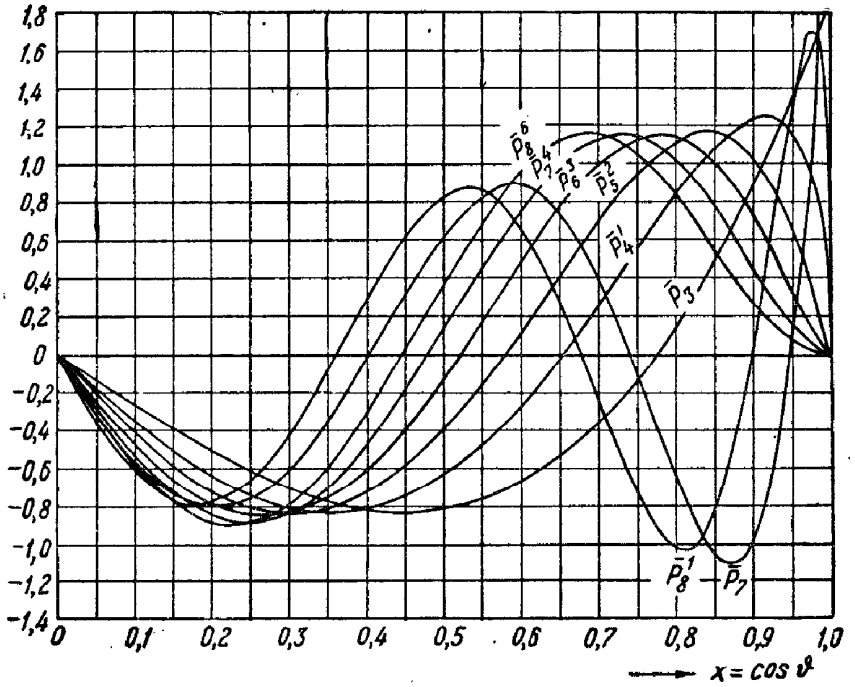


Рис. 96. Нормированные присоединенные функции Лежандра $\overline{P^n_{n+3}}(x)$ и $\overline{P^n_{n+7}}(x)$.

Таблица 38. Полиномы Лежандра $P_n(x)$

$x = P_1(x)$	$P_2(x)$		$P_3(x)$		$P_4(x)$		$P_5(x)$		$P_6(x)$		$P_7(x)$	
	$-0,$		$-0,$		$+0,$		$+0,$		$-0,$		$-0,$	
0,00	5000	+ 2	0000	− 150	3750	− 4	0000	+ 187	3125	+ 7	0000	− 219
01	4998	4	0150	150	3746	11	0187	187	3118	19	0219	217
02	4994	8	0300	149	3735	19	0374	186	3099	33	0436	215
03	4986	10	0449	149	3716	26	0560	184	3066	45	0651	211
04	4976	14	0598	149	3690	33	0744	183	3021	59	0862	207
0,05	4962	+ 16	0747	− 148	3657	− 41	0927	+ 179	2962	+ 71	1069	− 201
06	4946	20	0895	146	3616	49	1106	177	2891	83	1270	194
07	4926	22	1041	146	3567	55	1283	172	2808	95	1464	187
08	4904	26	1187	145	3512	63	1455	169	2713	107	1651	177
09	4878	28	1332	143	3449	70	1624	164	2606	118	1828	167
0,10	4850	+ 32	1475	− 142	3379	− 76	1788	+ 159	2488	+ 128	1995	− 156
11	4818	34	1617	140	3303	84	1947	154	2360	140	2151	144
12	4784	38	1757	138	3219	90	2101	147	2220	149	2295	132
13	4746	40	1895	136	3129	97	2248	141	2071	158	2427	118
14	4706	44	2031	135	3032	104	2389	134	1913	167	2545	104
0,15	4662	+ 46	2166	− 132	2928	− 109	2523	+ 127	1746	+ 174	2649	− 89
16	4616	50	2298	129	2819	116	2650	119	1572	183	2738	74
17	4566	52	2427	127	2703	122	2769	111	1389	188	2812	58!
18	4514	56	2554	125	2581	128	2880	102	1201	195	2870	41!
19	4458	58	2679	121	2453	133	2982	93	1006	200	2911	24!
0,20	4400	+ 62	2800	− 118	2320	− 139	3075	+ 84	0806	+ 205	2935	− 8!
21	4338	64	2918	116	2181	144	3159	75	0601	207	2943	+ 10!
22	4274	68	3034	112	2037	148	3234	65	0394	211	2933	27!
23	4206	70	3146	108	1889	154	3299	54	0183	212	2906	45!
24	4136	74	3254	105	1735	158	3353	44	*0029	214	2861	62!
0,25	4062	+ 76	3359	− 102	1577	− 162	3397	+ 34	0243	+ 213	2799	+ 79!
26	3986	80	3461	97	1415	166	3431	22	0456	213	2720	95!
27	3906	82	3558	93	1249	170	3453	+ 12	0669	210	2625	113
28	3824	86	3651	89	1079	173	3465	0	0879	208	2512	128
29	3738	88	3740	85	0906	177	3465	− 11	1087	205	2384	143
0,30	3650	+ 92	3825	− 80	0729	− 179	3454	− 23	1292	+ 200	2241	+ 159
31	3558	94	3905	76	0550	181	3431	34	1492	196	2082	172
32	3464	98	3981	71	0369	184	3397	46	1686	187	1910	186
33	3366	100	4052	65	0185	185	3351	57	1873	180	1724	197
34	3266	104	4117	61	*0000	187	3294	69	2053	172	1527	209
0,35	3162	+ 106	4178	− 56	0187	− 188	3225	− 81	2225	+ 163	1318	+ 220
36	3056	110	4234	50	0375	189	3144	93	2388	152	1098	228
37	2946	112	4284	44	0564	189	3051	103	2540	141	0870	235
38	2834	116	4328	39	0753	189	2948	115	2681	129	0635	242
39	2718	118	4367	33	0942	188	2833	127	2810	116	0393	247
0,40	2600	+ 122	4400	− 27	1130	− 187	2706	− 137	2926	− 14	0146	+ 250
41	2478	124	4427	21	1317	187	2569	148	3029	14	*0104	252
42	2354	128	4448	14	1504	184	2421	158	3118	15	0356	252
43	2226	130	4462	8	1688	182	2263	168	3191	16	0608	251
44	2096	134	4470	− 2	1870	180	2095	178	3249	16	0859	247
0,45	1962	+ 136	4472	+ 5	2050	− 176	1917	− 187	3290	− 17	1106	+ 242
46	1826	140	4467	13	2226	173	1730	196	3314	17	1348	236
47	1686	142	4454	19	2399	169	1534	204	3321	18	1584	227
48	1544	146	4435	26	2568	164	1330	212	3310	18	1811	216
49	1398	148	4409	34	2732	159	1118	220	3280	19	2027	204
0,50	1250		4375		2891		0898		3232	− 19	2231	
	$-0,$		$-0,$		$-0,$		$+0,$		$+0,$		$+0,$	

Продолжение табл. 38

$x = P_1(x)$	$P_2(x)$		$P_3(x)$		$P_4(x)$		$P_5(x)$		$P_6(x)$		$P_7(x)$	
0,50	−0,1250	+152	−0,4375	+41	−0,2891	−153	+0,0898	−225	+0,3232	−19	+0,2231	−14
51	0,1098	154	0,4334	49	0,3044	147	0,0673	232	0,3166	19	0,2422	16
52	0,0944	158	0,4285	57	0,3191	141	0,0441	237	0,3080	19	0,2596	18
53	0,0786	160	0,4228	65	0,3332	133	+0,0204	241	0,2975	19	0,2753	19
54	0,0626	164	0,4163	72	0,3465	125	−0,0037	245	0,2851	19	0,2891	21
0,55	−0,0462	+166	−0,4091	+81	−0,3590	−117	−0,0282	−247	+0,2708	−19	+0,3007	−22
56	0,0296	170	0,4010	90	0,3707	108	0,0529	250	0,2546	18	0,3102	24
57	−0,0126	172	0,3920	98	0,3815	99	0,0779	249	0,2366	18	0,3172	25
58	+0,0046	175	0,3822	106	0,3914	88	0,1028	250	0,2168	17	0,3217	27
59	0,0221	179	0,3716	116	0,4002	78	0,1278	248	0,1953	17	0,3235	28
0,60	+0,0400	+181	−0,3600	+125	−0,4080	−66	−0,1526	−246	+0,1721	−16	+0,3226	−29
61	0,0581	185	0,3475	133	0,4146	54	0,1772	242	0,1473	15	0,3188	29
62	0,0766	187	0,3342	143	0,4200	42	0,2014	237	0,1211	14	0,3121	30
63	0,0953	191	0,3199	153	0,4242	28	0,2251	231	0,0935	12	0,3023	30
64	0,1144	193	0,3046	162	0,4270	14	0,2482	223	0,0646	11	0,2895	31
0,65	+0,1337	+197	−0,2884	+171	−0,4284	+15	−0,2705	−214	+0,0347	−9	+0,2737	−30
66	0,1534	199	0,2713	182	0,4284	15	0,2919	203	+0,0038	8	0,2548	30
67	0,1733	203	0,2531	192	0,4268	16	0,3122	191	−0,0279	6	0,2329	29
68	0,1936	205	0,2339	202	0,4236	17	0,3313	177	0,0601	4	0,2081	28
69	0,2141	209	0,2137	212	0,4187	17	0,3490	162	0,0926	−1	0,1805	27
0,70	+0,2350	+211	−0,1925	+223	−0,4121	+18	−0,3652	+17	−0,1253	+1	+0,1502	−25
71	0,2561	215	0,1702	233	0,4036	19	0,3796	19	0,1578	4	0,1173	23
72	0,2776	217	0,1469	244	0,3933	20	0,3922	21	0,1899	7	0,0822	20
73	0,2993	221	0,1225	256	0,3810	20	0,4026	23	0,2214	10	0,0450	17
74	0,3214	228	0,0969	266	0,3666	21	0,4107	25	0,2518	14	+0,0061	14
0,75	+0,3437	+227	−0,0703	+277	−0,3501	+22	−0,4164	+27	−0,2808	+17	−0,0342	−10
76	0,3664	229	0,0426	289	0,3314	23	0,4193	29	0,3081	21	0,0754	−5
77	0,3893	233	−0,0137	301	0,3104	24	0,4193	31	0,3333	25	0,1171	0
78	0,4126	235	+0,0164	312	0,2871	24	0,4162	34	0,3559	30	0,1588	+6
79	0,4361	239	0,0476	324	0,2613	25	0,4097	36	0,3756	36	0,1999	13
0,80	+0,4600	+241	+0,0800	+336	−0,2330	+26	−0,3995	+39	−0,3918	+39	−0,2397	+20
81	0,4841	245	0,1136	348	0,2021	27	0,3855	41	0,4041	45	0,2774	28
82	0,5086	247	0,1484	361	0,1685	28	0,3674	44	0,4119	50	0,3124	37
83	0,5333	251	0,1845	373	0,1321	29	0,3449	46	0,4147	56	0,3437	46
84	0,5584	253	0,2218	385	0,0928	30	0,3177	49	0,4120	62	0,3703	57
0,85	+0,5837	+257	+0,2603	+398	−0,0506	+30	−0,2857	+52	−0,4030	+68	−0,3913	+68
86	0,6094	259	0,3001	412	−0,0053	31	0,2484	55	0,3872	75	0,4055	80
87	0,6353	263	0,3413	424	+0,0431	32	0,2056	58	0,3638	82	0,4116	94
88	0,6616	265	0,3837	437	0,0947	33	0,1570	61	0,3322	90	0,4083	108
89	0,6881	269	0,4274	451	0,1496	34	0,1023	64	0,2916	98	0,3942	123
0,90	+0,7150	+271	+0,4725	+466	+0,2079	+35	−0,0411	+68	−0,2412	+106	−0,3678	+140
91	0,7421	275	0,5189	478	0,2698	36	+0,0268	71	0,1802	114	0,3274	157
92	0,7696	277	0,5667	492	0,3352	37	0,1017	74	0,1077	123	0,2713	176
93	0,7973	281	0,6159	506	0,4044	38	0,1842	78	−0,0229	133	0,1975	196
94	0,8254	283	0,6665	519	0,4773	39	0,2744	81	+0,0751	142	−0,1040	218
0,95	+0,8537	+287	+0,7184	+536	+0,5541	+40	+0,3727	+85	+0,1875	+153	+0,0112	+241
96	0,8824	289	0,7718	549	0,6349	41	0,4796	89	0,3151	163	0,1506	265
97	0,9113	293	0,8267	563	0,7198	42	0,5954	93	0,4590	174	0,3165	291
98	0,9406	295	0,8830	577	0,8089	43	0,7204	97	0,6204	186	0,5115	318
99	0,9701	299	0,9407	593	0,9022	44	0,8552	101	0,8003	198	0,7384	347
1,00	+1,0000		+1,0000		+1,0000	+45	+1,0000	+105	+1,0000	+210	+1,0000	+378

Таблица 39. Полиномы Лежандра $P_n(\cos\vartheta)$

ϑ	$P_1(\cos\vartheta)$	$P_2(\cos\vartheta)$	$P_3(\cos\vartheta)$	$P_4(\cos\vartheta)$	$P_5(\cos\vartheta)$	$P_6(\cos\vartheta)$	$P_7(\cos\vartheta)$
	+ 1.	+ 1.					
0°	0000 — 2	0000 — 5	+ 1,0000 — 9!	+ 1,0000 — 30	+ 1,0000 — 46	+ 1,0000 — 64	+ 1,0000 — 85
1°	*9998 4	*9995 13	0,9991 28!	0,9985 30	0,9977 46	0,9968 64	0,9957 85
2°	9994 8	9982 23	0,9963 45!	0,9939 30	0,9909 45	0,9872 63	0,9830 83
3°	9986 10	9959 32	0,9918 64!	0,9863 30	0,9795 44	0,9714 61	0,9620 81
4°	9976 14	9927 41	0,9854 81!	0,9758 29	0,9638 43	0,9495 59	0,9329 77
5°	9962 — 17	9886 — 50	+ 0,9773 — 99!	+ 0,9623 — 29	+ 0,9437 — 42	+ 0,9216 — 57	+ 0,8962 — 72
6°	9945 20	9836 59	0,9674 117!	0,9459 28	0,9194 40	0,8881 53	0,8522 67
7°	9925 22	9777 68	0,9557 134!	0,9267 27	0,8911 38	0,8492 50	0,8016 60
8°	9903 26	9709 76	0,9423 150!	0,9048 26	0,8589 36	0,8054 46	0,7449 53
9°	9877 29	9633 85	0,9273 167!	0,8803 25	0,8232 34	0,7570 41	0,6830 46
10°	9848 — 32	9548 — 94	+ 0,9106 — 183	+ 0,8532 — 24	+ 0,7840 — 31	+ 0,7045 — 36	+ 0,6164 — 37
11°	9816 35	9454 102	0,8923 199	0,8238 23	0,7417 29	0,6483 31	0,5462 29
12°	9781 37	9352 111	0,8724 213	0,7920 21	0,6966 26	0,5891 26	0,4731 20
13°	9744 41	9241 119	0,8511 228	0,7582 20	0,6489 22	0,5273 20	0,3980 11
14°	9703 44	9122 127	0,8283 241	0,7224 18	0,5990 19	0,4635 14	0,3218 — 1
15°	9659 — 46	8995 — 135	+ 0,8042 — 255	+ 0,6847 — 17	+ 0,5471 — 16	+ 0,3983 — 8	+ 0,2455 + 8
16°	9613 50	8860 142	0,7787 268	0,6454 15	0,4937 12	0,3323 — 2	0,1700 17
17°	9563 52	8718 150	0,7519 279	0,6046 13	0,4391 9	0,2661 + 4	0,0961 25
18°	9511 56	8568 158	0,7240 290	0,5624 11	0,3836 5	0,2002 10	+ 0,0248 33
19°	9455 58	8410 165	0,6950 301	0,5192 9	0,3276 — 1	0,1353 15	— 0,0433 41
20°	9397 — 61	8245 — 171	+ 0,6649 — 311	+ 0,4750 — 8	+ 0,2715 + 2	+ 0,0719 + 21	— 0,1072 + 48
21°	9336 64	8074 179	0,6338 319	0,4300 6	0,2156 6	+ 0,0106 26	0,1664 54
22°	9272 67	7895 185	0,6019 327	0,3845 4	0,1602 9	— 0,0481 31	0,2202 60
23°	9205 70	7710 192	0,5692 335	0,3386 — 2	0,1057 13	0,1038 35	0,2680 64
24°	9135 72	7518 197	0,5357 341	0,2926 0	0,0525 16	0,1558 40	0,3094 68
25°	9063 — 75	7321 — 204	+ 0,5016 — 346	+ 0,2465 + 2	+ 0,0009 + 19	— 0,2040 + 43	— 0,3441 + 70
26°	8988 78	7117 209	0,4670 351	0,2007 4	— 0,0489 22	0,2478 47	0,3717 72
27°	8910 81	6908 214	0,4319 355	0,1553 6	0,0964 25	0,2869 49	0,3922 73
28°	8829 83	6694 220	0,3964 357	0,1105 8	0,1415 27	0,3212 52	0,4053 72
29°	8746 86	6474 224	0,3607 359	0,0665 10	0,1839 30	0,3502 53	0,4113 71
30°	8660 — 88	6250 — 229	+ 0,3248 — 361	+ 0,0234 + 11	— 0,2233 + 32	— 0,3740 + 54	— 0,4102 + 69
31°	8572 92	6021 233	0,2887 360	— 0,0185 13	0,2595 34	0,3924 55	0,4022 65
32°	8480 93	5788 237	0,2527 360	0,0591 15	0,2923 35	0,4053 55	0,3877 61
33°	8387 97	5551 241	0,2167 358	0,0982 16	0,3216 37	0,4127 54	0,3671 56
34°	8290 98	5310 245	0,1809 355	0,1357 18	0,3473 38	0,4147 53	0,3409 51
35°	8192 — 102	5065 — 247	+ 0,1454 — 352	— 0,1714 + 19	— 0,3691 + 39	— 0,4114 + 51	— 0,3096 + 44
36°	8090 104	4818 251	0,1102 347	0,2052 20	0,3871 39	0,4031 49	0,2738 38
37°	7986 106	4567 253	0,0755 342	0,2370 22	0,4011 39	0,3898 46	0,2343 30
38°	7880 109	4314 255	0,0413 336	0,2666 23	0,4112 39	0,3719 43	0,1918 23
39°	7771 111	4059 257	+ 0,0077 329	0,2940 24	0,4174 39	0,3497 40	0,1470 15
40°	7660 — 113	3802 — 258	— 0,0252 — 322	— 0,3190 + 24	— 0,4197 + 38	— 0,3236 + 36	— 0,1006 + 7
41°	7547 116	3544 260	0,0574 313	0,3416 25	0,4181 38	0,2939 31	0,0535 0
42°	7431 117	3284 261	0,0887 304	0,3616 26	0,4128 36	0,2610 27	— 0,0064 — 8
43°	7314 121	3023 261	0,1191 294	0,3791 26	0,4038 35	0,2255 22	+ 0,0398 15
44°	7193 122	2762 262	0,1485 283	0,3940 26	0,3914 33	0,1878 17	0,0846 22
45°	7071	2500	— 0,1768	— 0,4062 + 27	— 0,3757 + 31	— 0,1484 + 12	+ 0,1271 — 29
	+ 0,	+ 0,					

Продолжение табл. 39

ϑ	$P_1(\cos\vartheta)$	$P_2(\cos\vartheta)$	$P_3(\cos\vartheta)$	$P_4(\cos\vartheta)$	$P_5(\cos\vartheta)$	$P_6(\cos\vartheta)$	$P_7(\cos\vartheta)$
	+ 0,	+ 0,	− 0,	− 0,	− 0,		+ 0,
45°	7071 − 124	2500 − 262	1768 − 272	4062 + 27	3757 + 31	− 0,1484 + 12	1271 − 29
46°	6947 127	2238 261	2040 260	4158 27	3568 29	0,1078 7	1667 35
47°	6820 129	1977 261	2300 247	4227 27	3350 27	0,0665 + 2	2028 40
48°	6691 130	1716 260	2547 234	4270 26	3105 24	− 0,0251 − 3	2350 45
49°	6561 133	1456 258	2781 221	4286 26	2836 22	+ 0,0161 8	2626 49
50°	6428 − 135	1198 − 257	3002 − 207	4275 + 26	2545 + 19	+ 0,0564 − 13	2854 − 52
51°	6293 136	0941 255	3209 192	4239 25	2235 16	0,0954 18	3031 54
52°	6157 139	0686 253	3401 177	4178 24	1910 13	0,1326 22	3154 55
53°	6018 140	0433 251	3578 162	4093 24	1571 10	0,1677 26	3221 56
54°	5878 142	0182 247	3740 146	3984 23	1223 7	0,2002 30	3234 55
55°	5736 − 144	*0065 − 245	3886 − 130!	3852 + 22	0865 + 4	+ 0,2297 − 33	3191 − 54
56°	5592 146	0310 241	4016 115!	3698 21	0509 0	0,2560 36	3095 51
57°	5446 147	0551 237	4131 98!	3524 19	0150 − 3	0,2787 38	2947 48
58°	5299 149	0788 233	4229 81!	3331 18	*0206 6	0,2976 40	2752 45
59°	5150 150	1021 229	4310 65!	3119 17	0557 9	0,3125 41	2512 40
60°	5000 − 152	1250 − 224	4375 − 48!	2891 + 15	0898 − 12	+ 0,3232 − 42	2231 − 35
61°	4848 153	1474 220	4423 32!	2647 14	1229 14	0,3298 43	1916 30
62°	4695 155	1694 214	4455 − 16!	2390 12	1545 17	0,3321 43	1572 24
63°	4540 156	1908 209	4471 + 1!	2121 10	1844 19	0,3302 42	1203 17
64°	4384 158	2117 204	4470 18!	1841 9	2123 22	0,3240 41	0818 11
65°	4226 − 159	2321 − 197	4452 + 33	1552 + 7	2381 − 24	+ 0,3138 − 39	0422 − 4
66°	4067 160	2518 192	4419 49	1256 5	2615 26	0,2997 37	0022 + 3
67°	3907 161	2710 185	4370 65	0955 4	2824 27	0,2819 35	*0375 9
68°	3746 162	2895 179	4305 80	0651 + 2	3005 29	0,2606 32	0763 16
69°	3584 164	3074 171	4225 95	0344 0	3158 30	0,2362 29	1135 22
70°	3420 − 166	3245 − 165	4130 + 109	0038 − 2	3281 − 31	+ 0,2089 − 25	1485 + 28
71°	3256 166	3410 158	4021 123	*0267 3	3373 31	0,1791 21	1808 33
72°	3090 166	3568 150	3898 137	0568 5	3434 32	0,1472 17	2099 37
73°	2924 168	3718 142	3761 150	0864 7	3463 32	0,1136 13	2352 41
74°	2756 168	3860 135	3611 162	1153 8	3461 32	0,0788 8	2563 45
75°	2588 − 169	3995 − 127	3449 + 174	1434 − 10	3427 − 31	+ 0,0431 − 4	2730 + 47
76°	2419 169	4122 119	3275 185	1705 12	3362 30	+ 0,0070 + 1	2850 49
77°	2250 171	4241 111	3090 196	1964 13	3267 29	− 0,0290 5	2921 50
78°	2079 171	4352 102	2894 206	2211 14	3143 28	0,0644 10	2942 50
79°	1908 172	4454 94	2688 214	2443 16	2990 27	0,0990 14	2913 50
80°	1736 − 172	4548 − 85	2474 + 223	2659 − 17	2810 − 25	− 0,1321 + 18	2835 + 48
81°	1564 172	4633 76	2251 231	2859 18	2606 23	0,1635 22	2708 46
82°	1392 173	4709 68	2020 237	3040 19	2378 21	0,1927 25	2536 43
83°	1219 174	4777 59	1783 244	3203 20	2129 19	0,2193 29	2321 39
84°	1045 173	4836 50	1539 248	3345 21	1861 17	0,2431 32	2067 35
85°	0872 − 174	4886 − 41	1291 + 253	3468 − 21	1577 − 14	− 0,2638 + 34	1778 + 30
86°	0698 175	4927 32	1038 257	3569 22	1278 11	0,2810 36	1460 25
87°	0523 174	4959 23	0781 259	3648 22	0969 9	0,2947 38	1117 19
88°	0349 174	4982 13	0522 260	3704 23	0651 6	0,3045 39	0755 13
89°	0175 175	4995 5	0262 262	3739 23	0327 3	0,3105 40	0381 6
90°	0000	5000	0000	3750 − 23	0000 0	− 0,3125 + 40	0000 0
	+ 0,	− 0,	− 0,	+ 0,	+ 0,		− 0,

Таблица 40. Производные полиномов Лежандра $\frac{d}{d\vartheta} P_n(\cos\vartheta)$

ϑ	$dP_1(\cos\vartheta)/d\vartheta$		$dP_2(\cos\vartheta)/d\vartheta$		$dP_3(\cos\vartheta)/d\vartheta$		$dP_4(\cos\vartheta)/d\vartheta$		$dP_5(\cos\vartheta)/d\vartheta$		$dP_6(\cos\vartheta)/d\vartheta$		$dP_7(\cos\vartheta)/d\vartheta$	
	$-0,$		$-0,$											
0°	0000	−175	0000	−523	0,0000	0	0,0000	0	0,0000	0	0,0000	0	0,0000	0
1°	0175	174	0523	523	−0,1047	+3	−0,1744	+8	−0,2615	+18	−0,3659	+35	−0,4877	+62
2°	0349	174	1046	522	0,2091	5	0,3480	15	0,5213	35	0,7284	69	0,9692	123
3°	0523	175	1568	520	0,3129	8	0,5201	23	0,7775	52	1,0841	102	1,4384	182
4°	0698	174	2088	517	0,4160	11	0,6899	30	1,0286	69	1,4295	135	1,8896	238
5°	0872	−173	2605	−514	−0,5180	+13	−0,8567	+38	−1,2728	+85	−1,7614	+166	−2,3170	+292
6°	1045	174	3119	510	0,6186	16	1,0197	45	1,5085	101	2,0768	195	2,7152	369
7°	1219	173	3629	506	0,7176	19	1,1782	52	1,7341	116	2,3727	223	3,0795	386
8°	1392	172	4135	500	0,8148	21	1,3315	59	1,9481	130	2,6464	248	3,4053	425
9°	1564	172	4635	495	0,9099	24	1,4789	65	2,1492	143	2,8954	270	3,6887	458
10°	1736	−172	5130	−489	−1,0026	+26	−1,6199	+71	−2,3360	+155	−3,1174	+290	−3,9263	+485
11°	1908	171	5619	482	1,0928	28	1,7537	77	2,5074	166	3,3104	307	4,1156	506
12°	2079	171	6101	475	1,1801	30	1,8798	82	2,6621	176	3,4729	320	4,2544	519
13°	2250	169	6576	466	1,2643	33	1,9978	87	2,7993	184	3,6034	331	4,3413	526
14°	2419	169	7042	458	1,3453	35	2,1069	92	2,9181	191	3,7008	338	4,3758	523
15°	2588	−168	7500	−449	−1,4229	+37	−2,2069	+96	−3,0178	+197	−3,7646	+341	−4,3580	+517
16°	2756	168	7949	439	1,4968	39	2,2973	100	3,0978	202	3,7943	341	4,2885	503
17°	2924	166	8388	429	1,5668	40	2,3777	103	3,1576	205	3,7899	338	4,1688	481
18°	3090	166	8817	418	1,6328	42	2,4478	106	3,1970	206	3,7518	331	4,0012	453
19°	3256	164	9235	407	1,6946	43	2,5073	108	3,2158	206	3,6806	321	3,7884	419
20°	3420	−164	9642	−395	−1,7521	+45	−2,5560	+110	−3,2141	+204	−3,5774	+308	−3,5338	+380
21°	3584	162	*0037	383	1,8050	46	2,5937	111	3,1920	201	3,4435	292	3,2413	336
22°	3746	161	0420	370	1,8534	47	2,6203	112	3,1497	197	3,2804	272	2,9153	287
23°	3907	160	0790	357	1,8970	48	2,6358	112	3,0878	191	3,0902	250	2,5607	235
24°	4067	159	1147	344	1,9358	49	2,6400	112	3,0067	184	2,8749	226	2,1827	180
25°	4226	−158	1491	−329	−1,9696	+50	−2,6330	+111	−2,9073	+176	−2,6371	+200	−1,7866	+136
26°	4384	156	1820	315	1,9984	51	2,6150	110	2,7903	166	2,3794	171	1,3782	66
27°	4540	155	2135	301	2,0222	51	2,5861	108	2,6568	155	2,1045	142	0,9633	+7
28°	4695	153	2436	285	2,0408	52	2,5464	105	2,5077	143	1,8156	110	0,5476	−50
29°	4848	152	2721	269	2,0542	52	2,4961	102	2,3444	130	1,5155	78	−0,1369	107
30°	5000	−150	2990	+16	−2,0625	+52	−2,4357	+99	−2,1680	+117	−1,2077	+46	+0,2632	−161
31°	5150	149	3244	16	2,0656	52	2,3654	95	1,9799	102	0,8953	+13	0,6472	212
32°	5299	147	3482	16	2,0634	52	2,2855	91	1,7817	87	0,5815	−19	1,0102	260
33°	5446	146	3703	17	2,0562	51	2,1966	86	1,5748	71	−0,2697	52	1,3472	303
34°	5592	144	3908	17	2,0437	51	2,0991	81	1,3608	55	+0,0370	83	1,6540	342
35°	5736	−142	4095	+17	−2,0262	+50	−1,9934	+76	−1,1413	+38	+0,3354	−113	+1,9267	−375
36°	5878	140	4266	17	2,0037	50	1,8802	70	0,9179	22	0,6225	142	2,1620	602
37°	6018	139	4419	18	1,9761	49	1,7600	64	0,6924	+5	0,8955	169	2,3573	423
38°	6157	136	4554	18	1,9438	48	1,6334	57	0,4664	−12	1,1516	193	2,5103	438
39°	6293	135	4672	18	1,9066	47	1,5011	51	0,2415	28	1,3885	216	2,6196	446
40°	6428	−133	4772	+18	−1,8648	+45	−1,3637	+44	−0,0194	−44	+1,6038	−236	+2,6845	−448
41°	6561	130	4854	18	1,8185	44	1,2219	37	+0,1983	60	1,7955	253	2,7047	442
42°	6691	129	4918	18	1,7678	42	1,0764	30	0,4100	75	1,9620	268	2,6807	431
43°	6820	127	4963	18	1,7129	41	0,9279	22	0,6142	90	2,1017	279	2,6138	413
44°	6947	124	4991	18	1,6539	39	0,7772	15	0,8094	103	2,2136	287	2,5057	389
45°	7071		5000	+18	−1,5910	+37	−0,6250	+8	+0,9944	−116	+2,2969	−292	+2,3589	−360
	$-0,$		$-1,$											

Продолжение табл. 40

ϑ	$dP_1(\cos\vartheta)/d\vartheta$	$dP_2(\cos\vartheta)/d\vartheta$	$dP_3(\cos\vartheta)/d\vartheta$	$dP_4(\cos\vartheta)/d\vartheta$	$dP_5(\cos\vartheta)/d\vartheta$	$dP_6(\cos\vartheta)/d\vartheta$	$dP_7(\cos\vartheta)/d\vartheta$
	$-0,$	$-1,$					
45°	7071 — 122	5000 + 18	−1,5910 + 37	−0,6250 + 8	+ 0,9944 − 116	+ 2,2969 − 292	+ 2,3589 − 360
46°	7193 121	4991 18	1,5244 35	0,4720 0	1,1677 128	2,3510 294	2,1761 325
47°	7314 117	4963 18	1,4542 33	0,3190 − 7	1,3282 139	2,3757 292	1,9609 286
48°	7431 116	4918 18	1,3808 31	0,1668 15	1,4749 149	2,3713 288	1,7172 243
49°	7547 113	4854 18	1,3042 29	−0,0160 22	1,6067 157	2,3382 280	1,4491 197
50°	7660 — 111	4772 + 18	−1,2248 + 27	+ 0,1327 − 29	+ 1,7228 − 164	+ 2,2771 − 269	+ 1,1614 − 149
51°	7771 109	4672 18	1,1427 24	0,2784 36	1,8225 170	2,1892 255	0,8588 99
52°	7880 106	4554 18	1,0581 22	0,4205 43	1,9052 175	2,0759 239	0,5463 − 47
53°	7986 104	4419 18	0,9714 19	0,5584 49	1,9704 178	1,9387 219	+ 0,2291 + 4
54°	8090 102	4266 17	0,8828 17	0,6914 55	2,0178 180	1,7797 198	−0,0877 55
55°	8192 — 98	4095 + 17	−0,7925 + 14	+ 0,8188 − 61	+ 2,0473 − 180	+ 1,6008 − 175	− 0,3990 + 104
56°	8290 97	3908 17	0,7007 12	0,9401 67	2,0587 179	1,4046 150	0,7001 151
57°	8387 93	3703 17	0,6078 9	1,0547 72	2,0522 177	1,1934 123	0,9860 196
58°	8480 92	3482 16	0,5140 6	1,1620 77	2,0280 173	0,9699 95	1,2524 237
59°	8572 88	3244 16	0,4196 4	1,2617 82	1,9865 168	0,7369 66	1,4953 273
60°	8660 — 86	2990 + 16	−0,3248 + 1	+ 1,3532 − 86	+ 1,9283 − 162	+ 0,4973 − 37	− 1,7109 + 306
61°	8746 83	2721 + 269	0,2299 − 2	1,4361 89	1,8538 154	0,2540 − 8	1,8960 333
62°	8829 81	2436 285	0,1351 4	1,5101 93	1,7640 145	+ 0,0098 + 21	2,0480 354
63°	8910 78	2135 301	−0,0408 7	1,5748 95	1,6596 136	− 0,2321 50	2,1646 370
64°	8988 75	1820 315	+ 0,0528 10	1,6300 97	1,5418 125	0,4691 78	2,2443 380
65°	9063 — 72	1491 + 344	+ 0,1454 − 12	+ 1,6755 − 99	+ 1,4114 − 113	− 0,6983 + 105	− 2,2861 + 384
66°	9135 70	1147 357	0,2368 15	1,7111 100	1,2698 100	0,9170 131	2,2896 382
67°	9205 67	0790 370	0,3268 17	1,7366 101	1,1183 87	1,1226 154	2,2550 373
68°	9272 64	0420 383	0,4149 20	1,7520 101	0,9580 73	1,3129 176	2,1833 359
69°	9336 61	0037 395	0,5011 22	1,7573 101	0,7905 58	1,4855 196	2,0757 339
70°	9397 — 58	*9642 + 407	+ 0,5851 − 25	+ 1,7525 − 100	+ 0,6173 − 43	− 1,6386 + 213	− 1,9344 + 314
71°	9455 56	9235 418	0,6666 27	1,7377 99	0,4397 28	1,7704 228	1,7617 284
72°	9511 52	8817 429	0,7455 29	1,7131 97	0,2593 − 13	1,8794 240	1,5608 249
73°	9563 50	8388 439	0,8214 31	1,6787 95	+ 0,0776 + 3	1,9645 249	1,3350 211
74°	9613 46	7949 449	0,8941 33	1,6349 92	− 0,1037 18	2,0248 255	1,0882 169
75°	9659 — 44	7500 + 458	+ 0,9636 − 35	+ 1,5819 − 89	− 0,2833 + 33	− 2,0596 + 258	− 0,8245 + 125
76°	9703 41	7042 466	1,0295 37	1,5201 85	0,4595 48	2,0687 258	0,5483 80
77°	9744 37	6576 475	1,0918 39	1,4498 81	0,6309 62	2,0520 255	− 0,2641 + 33
78°	9781 35	6101 482	1,1501 40	1,3714 76	0,7961 76	2,0098 249	+ 0,0234 − 15
79°	9816 32	5619 489	1,2044 42	1,2854 71	0,9536 89	1,9428 240	0,3094 62
80°	9848 — 29	5130 + 495	+ 1,2545 − 43	+ 1,1923 − 66	− 1,1023 + 102	− 1,8519 + 228	+ 0,5892 − 107
81°	9877 26	4635 500	1,3003 45	1,0926 60	1,2407 113	1,7382 214	0,8584 151
82°	9903 22	4135 506	1,3415 46	0,9869 54	1,3679 124	1,6031 197	1,1125 193
83°	9925 20	3629 510	1,3783 47	0,8758 48	1,4827 133	1,4484 178	1,3473 231
84°	9945 17	3119 514	1,4103 48	0,7598 42	1,5842 142	1,2760 156	1,5592 265
85°	9962 — 14	2605 + 517	+ 1,4375 − 49	+ 0,6396 − 35	− 1,6715 + 149	− 1,0881 + 133	+ 1,7446 − 295
86°	9976 10	2088 520	1,4599 49	0,5160 28	1,7439 155	0,8868 108	1,9006 321
87°	9986 8	1568 522	1,4774 50	0,3895 21	1,8009 160	0,6747 82	2,0246 341
88°	9994 4	1046 523	1,4900 50	0,2608 14	1,8420 163	0,4544 55	2,1146 355
89°	9998 2	0523 523	1,4975 50	0,1308 7	1,8667 165	0,2286 28	2,1692 364
90°	*0000	0000	+ 1,5000 − 50	0,0000 0	− 1,8750 + 166	0,0000 0	+ 2,1875 − 367
	-1_n	$-0,$					

Таблица 41. Функции Лежандра 2-го рода $Q_n(x)$

x	$Q_0(x)$		$Q_1(x)$		$Q_2(x)$		$Q_3(x)$		$Q_4(x)$		$Q_5(x)$	
	+ 0,		− 1,		−0,		+ 0,		+ 0,		− 0,	
0,00	00000	+1000	00000	+ 20	00000	− 2000	66667	− 80	00000	0	53333	+ 160
01	01000	1000	*99990	20	02000	1999	66627	80	02666	− 5	53253	160
02	02000	1001	99960	20	03999	1997	66507	80	05327	10	53014	159
03	03001	1001	99910	20	05996	1995	66307	80	07978	14	52615	158
04	04002	1002	99840	20	07991	1992	66027	80	10615	19	52057	157
0,05	05004	+ 1003	99750	+ 20	09983	− 1988	65668	− 79	13233	− 24	51343	+ 155
06	06007	1004	99640	20	11971	1983	65229	79	15827	29	50474	153
07	07011	1006	99509	20	13954	1978	64711	79	18393	33	49452	151
08	08017	1007	99359	20	15932	1971	64115	78	20925	38	48279	148
09	09024	1010	99188	20	17903	1963	63440	78	23419	43	46958	145
0,10	10034	+ 1011	98997	+ 20	19866	− 1956	62687	− 78	25870	− 47	45493	+ 141
11	11045	1013	98785	20	21822	1947	61856	77	28274	52	43887	137
12	12058	1016	98553	21	23769	1937	60948	77	30626	56	42144	133
13	13074	1019	98300	21	25706	1926	59964	76	32921	61	40268	128
14	14093	1021	98027	21	27632	1915	58904	75	35155	65	38264	123
0,15	15114	+ 1025	97733	+ 21	29547	− 1903	57769	− 75	37324	− 70	36137	+ 118
16	16139	1028	97418	21	31450	1889	56559	74	39424	74	33893	112
17	17167	1031	97082	21	33339	1876	55275	73	41449	78	31537	106
18	18198	1036	96724	21	35215	1860	53918	72	43395	83	29075	100
19	19234	1039	96346	22	37075	1845	52490	71	45259	87	26513	93
0,20	20273	+ 1044	95945	+ 22	38920	+ 17	50990	− 70	47037	− 91	23859	+ 86
21	21317	1049	95523	22	40748	18	49420	69	48723	95	21119	79
22	22366	1053	95080	22	42559	18	47781	68	50315	99	18300	71
23	23419	1058	94614	22	44351	19	46074	67	51808	102	15411	63
24	24477	1064	94125	23	46124	20	44301	66	53199	106	12459	55
0,25	25541	+ 1070	93615	+ 23	47876	+ 21	42461	− 64	54484	− 110	09451	+ 46
26	26611	1075	93081	23	49607	22	40558	63	55659	113	06398	38
27	27686	1082	92525	23	51316	23	38591	62	56721	117	03306	29
28	28768	1089	91945	24	53001	24	36563	60	57667	120	00186	20
29	29857	1095	91342	24	54662	25	34474	59	58492	123	*02953	10
0,30	30952	+ 1103	90714	+ 24	56297	+ 26	32328	− 57	59195	− 126	06103	+ 1
31	32055	1110	90063	24	57907	27	30124	55	59772	129	09254	− 9
32	33165	1118	89387	25	59488	29	27864	54	60220	131	12395	19
33	34283	1126	88687	25	61041	30	25552	52	60537	134	15518	29
34	35409	1135	87961	26	62565	31	23187	50	60720	136	18611	39
0,35	36544	+ 1145	87209	+ 26	64057	+ 32	20773	− 48	60766	− 139	21664	− 50
36	37689	1153	86432	26	65518	33	18311	46	60674	141	24668	60
37	38842	1164	85628	27	66945	34	15803	44	60441	143	27611	71
38	40006	1174	84798	27	68338	36	13251	41	60065	144	30484	82
39	41180	1185	83940	28	69695	37	10658	39	59545	146	33274	92
0,40	42365	+ 1196	83054	+ 28	71015	+ 38	08026	− 37	58879	− 147	35972	− 103
41	43561	1208	82140	29	72297	40	05357	34	58066	148	38567	114
42	44769	1221	81197	29	73539	41	02654	32	57105	149	41048	125
43	45990	1233	80224	30	74740	43	*00080	29	55994	150	43404	136
44	47223	1247	79222	31	75898	44	02844	26	54734	150	45624	146
0,45	48470	+ 14	78188	+ 31	77012	+ 46	05634	− 23	53323	− 150	47698	− 157
46	49731	15	77124	32	78081	47	08446	20	51761	150	49615	167
47	51007	15	76027	33	79102	49	11279	17	50050	150	51365	178
48	52298	16	74897	34	80075	51	14129	14	48188	149	52937	188
49	53606	17	73733	35	80997	52	16992	10	46177	148	54322	198
0,50	54931	+ 18	72535	+ 36	81866	+ 54	19865	− 7	44017	− 147	55508	− 208
	+ 0,		− 0,		−0,		− 0,		+ 0,		+ 0,	

Продолжение табл. 41

x	$Q_0(x)$		$Q_1(x)$		$Q_2(x)$		$Q_3(x)$		$Q_4(x)$		$Q_5(x)$	
0,50	+ 0,54931	+ 18	− 0,72535	+ 36	− 0,81866	+ 54	− 0,19865	− 7	+ 0,44017	− 147	+ 0,55508	− 208
51	0,56273	19	0,71301	37	0,82682	56	0,22745	− 3	0,41711	146	0,56487	217
52	0,57634	20	0,70030	38	0,83441	58	0,25628	+ 1	0,39259	144	0,57249	226
53	0,59015	20	0,68722	39	0,84141	60	0,28510	5	0,36663	141	0,57785	235
54	0,60416	22	0,67376	40	0,84782	63	0,31387	9	0,33926	139	0,58086	243
0,55	+ 0,61838	+ 23	− 0,65989	+ 41	− 0,85360	+ 65	− 0,34254	+ 14	+ 0,31051	− 135	+ 0,58143	− 251
56	0,63283	24	0,64561	42	0,85873	67	0,37107	18	0,28040	132	0,57950	259
57	0,64752	25	0,63091	44	0,86319	70	0,39942	23	0,24897	128	0,57498	265
58	0,66246	26	0,61577	45	0,86695	72	0,42754	28	0,21626	124	0,56781	272
59	0,67767	28	0,60018	47	0,86999	75	0,45537	34	0,18232	118	0,55792	277
0,60	+ 0,69315	+ 29	− 0,58411	+ 49	− 0,87227	+ 78	− 0,48287	+ 39	+ 0,14720	− 113	+ 0,54526	− 282
61	0,70892	31	0,56756	51	0,87378	81	0,50997	45	0,11094	107	0,52979	286
62	0,72501	33	0,55050	53	0,87446	85	0,53662	51	0,07362	100	0,51145	289
63	0,74142	35	0,53291	55	0,87431	88	0,56275	58	+ 0,03530	93	0,49023	291
64	0,75817	37	0,51477	57	0,87326	92	0,58830	65	− 0,00395	85	0,46609	292
0,65	+ 0,77530	+ 39	− 0,49606	+ 60	− 0,87130	+ 96	− 0,61321	+ 72	− 0,04405	− 76	+ 0,43903	− 292
66	0,79281	41	0,47674	63	0,86838	100	0,63739	80	0,08490	66	0,40905	291
67	0,81074	44	0,45680	66	0,86446	105	0,66078	88	0,12642	56	0,37616	288
68	0,82911	47	0,43620	69	0,85948	110	0,68328	97	0,16849	45	0,34039	284
69	0,84796	50	0,41491	73	0,85341	115	0,70481	106	0,21101	32	0,30178	278
0,70	+ 0,86730	+ 54	− 0,39289	+ 77	− 0,84618	+ 121	− 0,72529	+ 116	− 0,25384	− 19	+ 0,26039	− 271
71	0,88718	58	0,37010	81	0,83775	127	0,74460	127	0,29686	− 4	0,21630	261
72	0,90764	62	0,34650	86	0,82804	134	0,76265	138	0,33991	+ 12	0,16960	249
73	0,92873	67	0,32203	92	0,81699	142	0,77931	150	0,38283	30	0,12041	235
74	0,95048	72	0,29665	98	0,80452	150	0,79447	164	0,42546	49	0,06887	218
0,75	+ 0,97296	+ 78	− 0,27028	+ 104	− 0,79055	+ 159	− 0,80799	+ 178	− 0,46758	+ 70	+ 0,01516	− 198
76	0,99622	85	0,24288	112	0,77499	169	0,81973	194	0,50900	93	− 0,04053	175
77	1,02033	93	0,21435	121	0,75774	180	0,82953	211	0,54949	119	0,09797	148
78	1,04537	102	0,18461	130	0,73868	193	0,83721	230	0,58878	147	0,15688	118
79	1,07143	112	0,15357	141	0,71770	207	0,84259	251	0,62660	178	0,21696	82
0,80	+ 1,09861	+ 123	− 0,12111	+ 154	− 0,69464	+ 223	− 0,84544	+ 275	− 0,66264	+ 212	− 0,27785	− 41
81	1,12703	137	0,08711	169	0,66935	241	0,84555	301	0,69656	250	0,33914	+ 6
82	1,15682	153	0,05141	186	0,64164	262	0,84264	331	0,72795	294	0,40035	60
83	1,18814	171	− 0,01385	206	0,61131	287	0,83641	365	0,75641	342	0,46094	123
84	1,22117	193	+ 0,02579	230	0,57810	316	0,82653	404	0,78142	398	0,52029	195
0,85	+ 1,25615	+ 220	+ 0,06773	+ 259	− 0,54172	+ 350	− 0,81259	+ 449	− 0,80244	+ 462	− 0,57766	+ 279
86	1,29334	253	0,11228	294	0,50184	391	0,79415	503	0,81882	536	0,63221	378
87	1,33308	293	0,15978	337	0,45803	441	0,77066	567	0,82981	624	0,68295	494
88	1,37577	344	0,21068	391	0,40979	502	0,74148	644	0,83453	728	0,72872	632
89	1,42193	410	0,26551	460	0,35650	580	0,70582	740	0,83194	856	0,76811	799
0,90	+ 1,47222	+ 495	+ 0,32500	+ 551	− 0,29736	+ 681	− 0,66271	+ 862	− 0,82075	+ 1011	− 0,79944	+ 1006
91	1,52752		0,39005		0,23135		0,61091		0,79936		0,82063	
92	1,58903		0,46190		0,15708		0,54880		0,76575		0,82905	
93	1,65839		0,54230		− 0,07268		0,47419		0,71724		0,82130	
94	1,73805		0,63377		+ 0,02459		0,38399		0,65011		0,79279	
0,95	+ 1,83178		+ 0,74019		+ 0,13888		− 0,27356		− 0,55896		− 0,73697	
96	1,94591		0,86807		0,27707		− 0,13540		0,43528		0,64384	
97	2,09230		1,02953		0,45181		+ 0,04408		0,26403		0,49627	
98	2,29756		1,25161		0,69108		0,29437		− 0,01348		− 0,25926	
99	2,64665		1,62019		1,08265		0,70625		+ 0,41159		+ 0,16845	
1,00	+ ∞		+ ∞		+ ∞		+ ∞		+ ∞		+ ∞	

Продолжение табл. 41

x	$Q_6(x)$		$Q_7(x)$		x	$Q_6(x)$		$Q_7(x)$	
	$-\,0,$		$+\,0,$						
0,00	00000	0	45714	−256	0,50	+0,14201	−28	−0,34392	+296
01	03198	+13	45586	255	51	0,18056	50	0,31316	282
02	06383	26	45203	254	52	0,21862	72	0,27958	265
03	09542	38	44567	250	53	0,25595	95	0,24337	245
04	12664	51	43680	246	54	0,29233	119	0,20471	223
0,05	15734	+63	42548	−240	0,55	+0,32752	−143	−0,16383	+198
06	18742	75	41175	233	56	0,36129	167	0,12097	170
07	21674	87	39570	225	57	0,39338	192	0,07642	140
08	24518	99	37739	216	58	0,42355	217	−0,03047	107
09	27264	111	35693	206	59	0,45155	242	+0,01655	72
0,10	29899	+122	33441	−196	0,60	+0,47713	−268	+0,06429	+36
11	32412	132	30996	181	61	0,50003	293	0,11236	−7
12	34793	143	28369	168	62	0,52000	318	0,16036	49
13	37031	153	25575	153	63	0,53680	342	0,20786	94
14	39117	162	22627	138	64	0,55017	366	0,25441	142
0,15	41041	+171	19542	−122	0,65	+0,55989	−390	+0,29955	−191
16	42795	179	16335	105	66	0,56570	412	0,34277	241
17	44370	187	13023	87	67	0,56740	434	0,38358	294
18	45757	194	09625	69	68	0,56476	454	0,42145	347
19	46952	200	06158	50	69	0,55759	472	0,45585	402
0,20	47946	+206	02642	−30	0,70	+0,54570	−489	+0,48622	−457
21	48734	211	*00904	−10	71	0,52893	503	0,51203	511
22	49310	216	04461	+10	72	0,50713	515	0,53273	566
23	49672	219	08008	30	73	0,48017	524	0,54777	619
24	49814	222	11524	51	74	0,44798	530	0,55662	671
0,25	49735	+224	14990	+71	0,75	+0,41050	−532	+0,55877	−720
26	49432	225	18385	92	76	0,36770	530	0,55372	766
27	48904	225	21688	112	77	0,31961	522	0,54101	808
28	48151	225	24879	132	78	0,26631	509	0,52026	844
29	47173	223	27938	152	79	0,20794	489	0,49104	873
0,30	45972	+221	30845	+171	0,80	+0,14469	−461	+0,45312	−894
31	44551	218	33580	190	81	0,07684	425	0,40628	905
32	42912	213	36126	208	82	+0,00477	378	0,35042	903
33	41059	208	38464	225	83	−0,07106	319	0,28556	886
34	38999	202	40577	242	84	0,15006	246	0,21187	850
0,35	36737	+195	42449	+257	0,85	−0,23149	−156	+0,12972	−793
36	34281	187	44063	271	86	0,31444	−46	+0,03969	708
37	31638	177	45407	284	87	0,39780	+89	−0,05735	589
38	28818	167	46466	296	88	0,48022	255	0,16020	429
39	25830	156	47229	306	89	0,56002	460	0,26725	−216
0,40	22687	+144	47686	+315	0,90	−0,63512	+715	−0,37633	+65
41	19399	131	47828	322	91	0,70295		0,48458	
42	15981	117	47649	328	92	0,76020		0,58824	
43	12445	102	47142	331	93	0,80262		0,68227	
44	08808	86	46304	333	94	0,82448		0,75978	
0,45	05085	+69	45133	+332	0,95	−0,81776		−0,81107	
46	01292	52	43631	330	96	0,77043		0,82170	
47	*02552	33	41800	325	97	0,66250		0,76807	
48	06428	+13	39645	318	98	0,45458		0,60511	
49	10318	−7	37172	308	99	−0,03725		−0,21288	
0,50	14201	−28	34392	+296	1,00	+∞		+∞	
	$+\,0,$		$-\,0,$						

XIII. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ (ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ)

А. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ 1-го, 2-го И 3-го РОДА

1. Определения и обозначения

Бесселевыми функциями (*цилиндрическими функциями* или *цилиндрическими гармониками*) называют решения $Z_\nu(z)$ дифференциального уравнения Бесселя *)

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}+(z^2-\nu^2)w=0.$$

Здесь z — комплексное переменное; число ν, которое называется *порядком* (*параметром* или *индексом*) может также быть произвольным комплексным; если же оно действительное целое число, то пишут $\nu=n$.

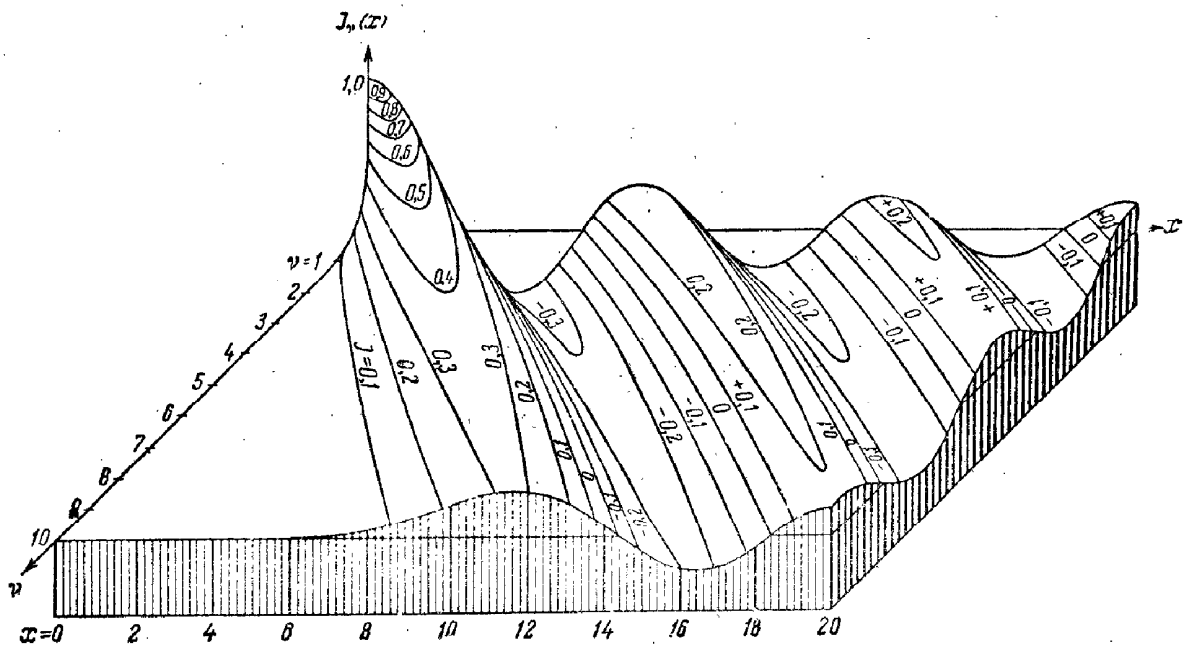
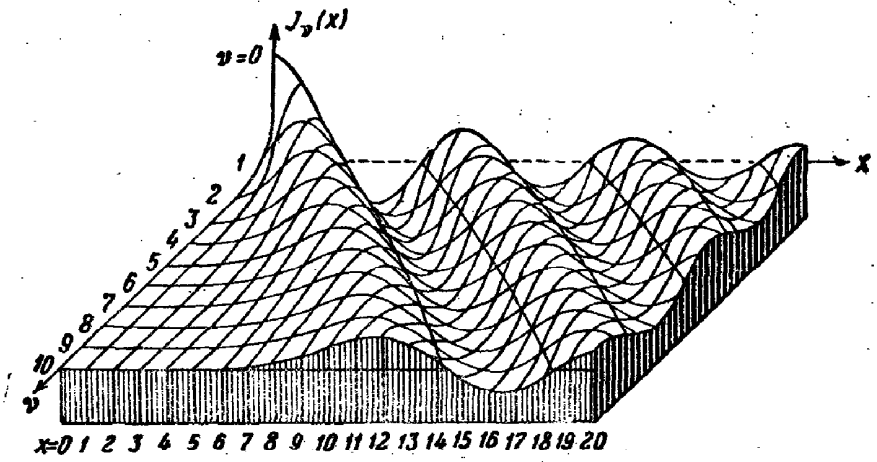


Рис. 97. Поверхность функции Бесселя $J_\nu(x)$ над плоскостью действительных переменных ν, x.

Под бесселевыми функциями понимают следующие (определенные в 2 своими аналитическими представлениями) функции: функции Бесселя $J_\nu(z)$; функции Неймана $N_\nu(z)$ (которые часто называют функциями Вебера и обозначают $Y_\nu(z)$) и функции Ганкеля $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$. Их называют также бесселевыми функциями соответственно 1-го, 2-го и 3-го рода.

*) Определение цилиндрических функций по Нильсену см. в 6.1.

Для фиксированного порядка ν все эти функции являются аналитическими функциями от z; за исключением функций $J_n(z)$ целого порядка, все эти функции многозначны и имеют $z=0$ точкой ветвления. Если аргумент z фиксирован, то



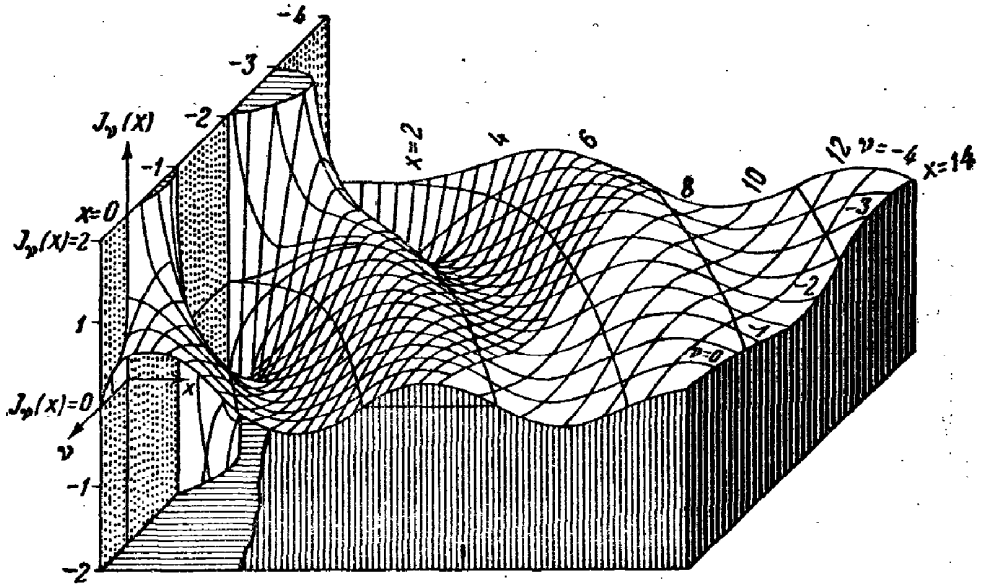


Рис. 98 и 99. Функции Бесселя $J_\nu(x)$ от двух действительных переменных ν и x; $-4\leqslant\nu\leqslant10$.

все эти функции, рассматриваемые как функции порядка ν, являются однозначными целыми функциями (рис. 97—101).

При произвольном ν каждая пара функций

$$J_\nu(z),\ N_\nu(z) \text{ и } H_\nu^{(1)}(z),\ H_\nu^{(2)}(z),$$

а также, если ν не является целым числом,

$$J_\nu(z),\quad J_{-\nu}(z)$$

представляет собой фундаментальную систему решений дифференциального уравнения Бесселя.

Определение модифицированных функций Бесселя дано в В. 1; определения некоторых функций, связанных с бесселевыми функциями, см. в С. 1 и С. 2.

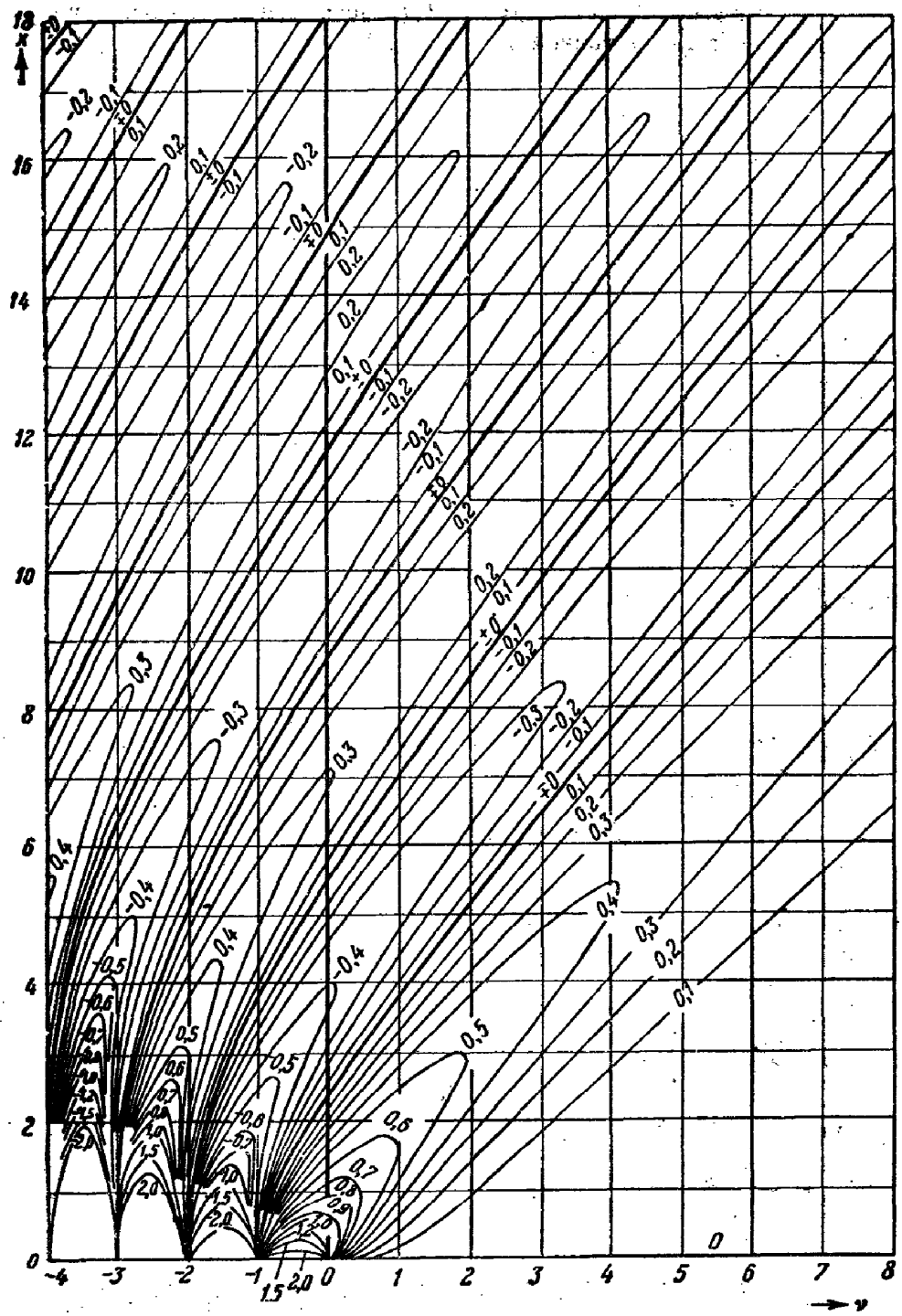


Рис. 100. Кривые $J_\nu(x)=\text{const}$ в плоскости действительных переменных ν, x.

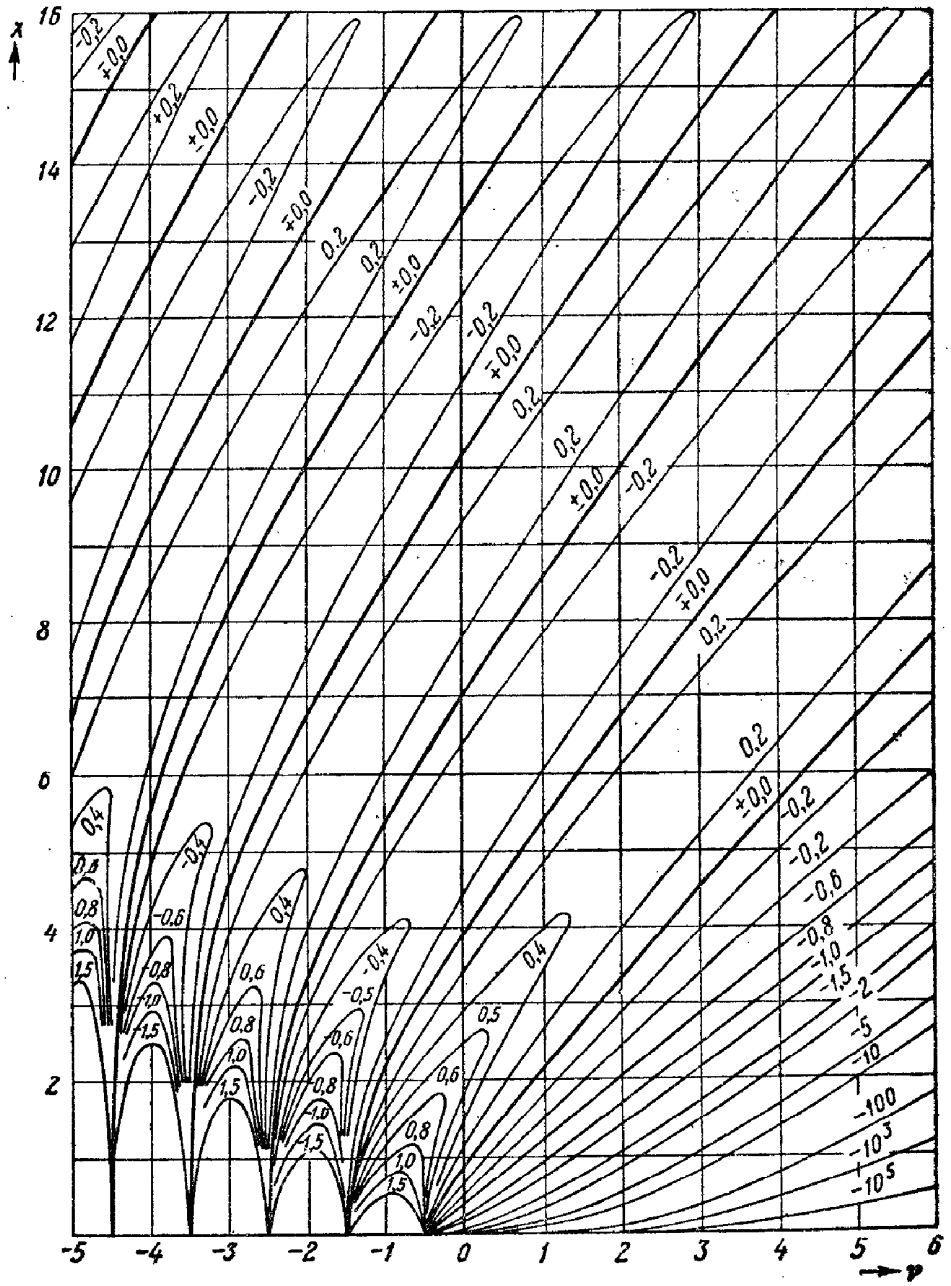


Рис. 101. Кривые $N_\nu(x) = \text{const}$ в плоскости действительных переменных ν, x.

2. Представления с помощью рядов

2.1. Если порядок ν есть целое число $\nu = n = 0, 1, 2, \ldots$, то *функции Бесселя* $J_n(z)$ могут быть получены с помощью производящей функций из разложения

$$e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [t^n + (-t)^{-n}] J_n(z).$$

Для целого отрицательного порядка $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$. Для произвольного

порядка ν имеем представление

$$J_\nu(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{0!\,\Gamma(\nu+1)}-\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2}}{1!\,\Gamma(\nu+2)}+\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+4}}{2!\,\Gamma(\nu+3)}-\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+6}}{3!\,\Gamma(\nu+4)}+\ldots,$$

причем $J_{\overline{\nu}}(\overline{z})=\overline{J_\nu(z)}$. Можно записать:

$$J_\nu(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\Lambda_\nu(z),\quad\text{где}\quad\Lambda_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{iz}{2}\right)^{2k}$$

— целая функция от z (рис. 102—105, таблица 42).

Функция $J_\nu(z)$ многозначна, если ν не есть целое число; после m обходов вокруг точки ветвления $z=0$ получим: $J_\nu(e^{m\pi i}z)=e^{m\nu\pi i}J_\nu(z)$ (m — целое).

Функции $J_\nu(z)$ любого положительного и целых отрицательных порядков отличаются от всех остальных бесселевых функций тем, что они остаются

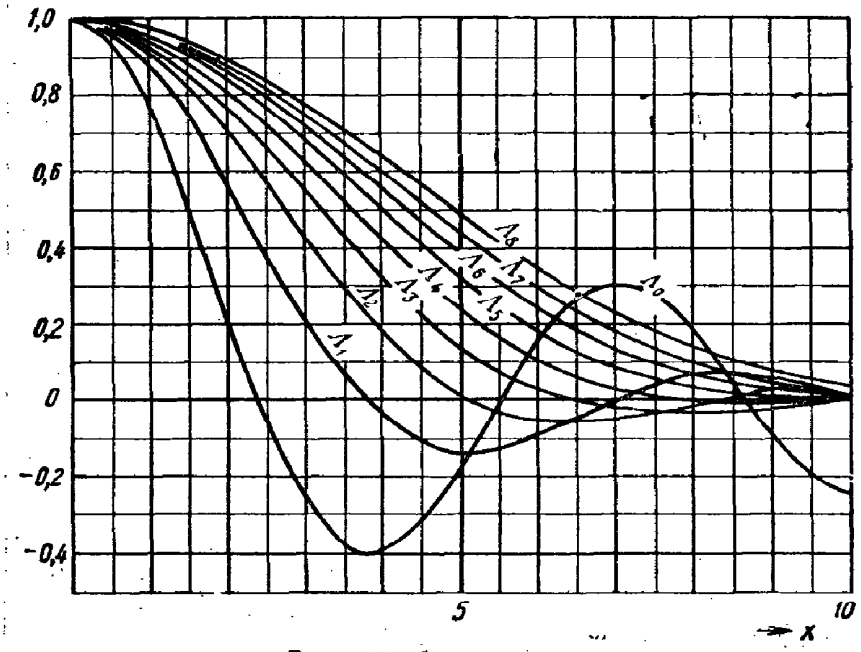


Рис. 102. Функции $\Lambda_\nu(x)$.

конечными при $z\to 0$. При $|z|\ll 1$ для фиксированного порядка $\nu\geqslant 0$ имеем приближенно:

$$J_\nu(z)\approx\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu,\qquad\Lambda_\nu(z)\approx 1-\frac{z^2}{4(\nu+1)}.$$

Если $\nu=n+\eta$, где $n\geqslant 1$, $0<\eta<1$, то

$$(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^\eta J_{-\nu}(z)=\frac{2}{z}E_{n-1}(z)\frac{\sin\pi\eta}{\pi}+\left(\frac{z}{2}\right)^n F_n(z),$$

где

$$E_m(z)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\Gamma(m+\eta-k+1)}{\Gamma(k+1)}\left(\frac{2}{z}\right)^{m-2k},\qquad F_m(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{iz}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k-\eta+1)\,\Gamma(m+k+1)}.$$

Отсюда получается поведение $J_{-\nu}(z)$, $\nu=n+\eta>0$ при $|z|\ll 1$:

$$J_{-\nu}(z)\approx(-1)^n\Gamma(\nu)\frac{\sin\pi\eta}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^\nu.$$

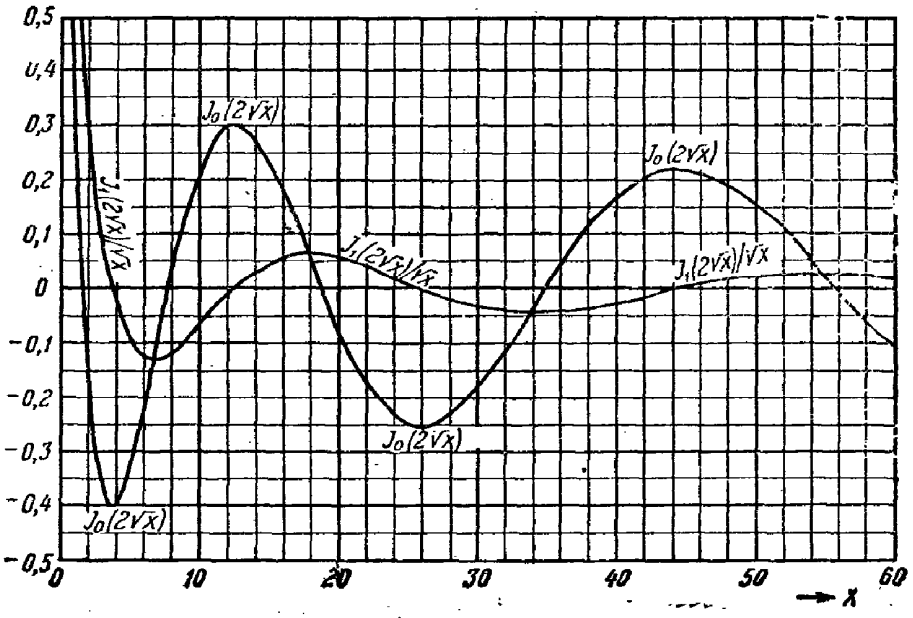


Рис. 103. Величина Λ_ν как функция квадрата половины аргумента.

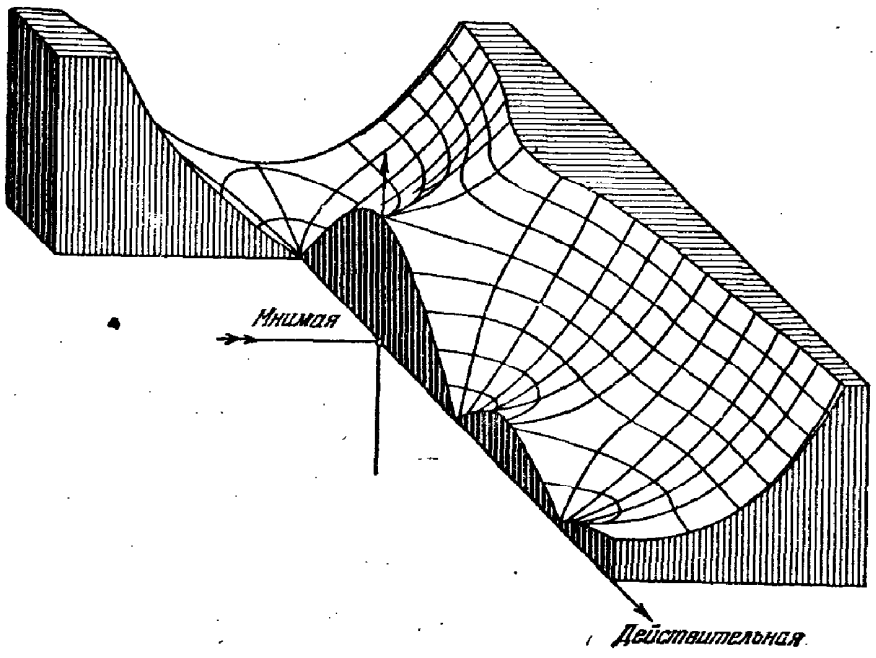


Рис. 104. Рельеф функции Бесселя $J_0(x+iy)$.

При $|z| \ll 1$, $\nu > 0$ справедливы также приближенные формулы:

$$J_0'(z)/J_0(z) \approx -\frac{z}{2}, \qquad J_\nu'(z)/J_\nu(z) \approx \frac{\nu}{2} \qquad (\nu \neq 0).$$

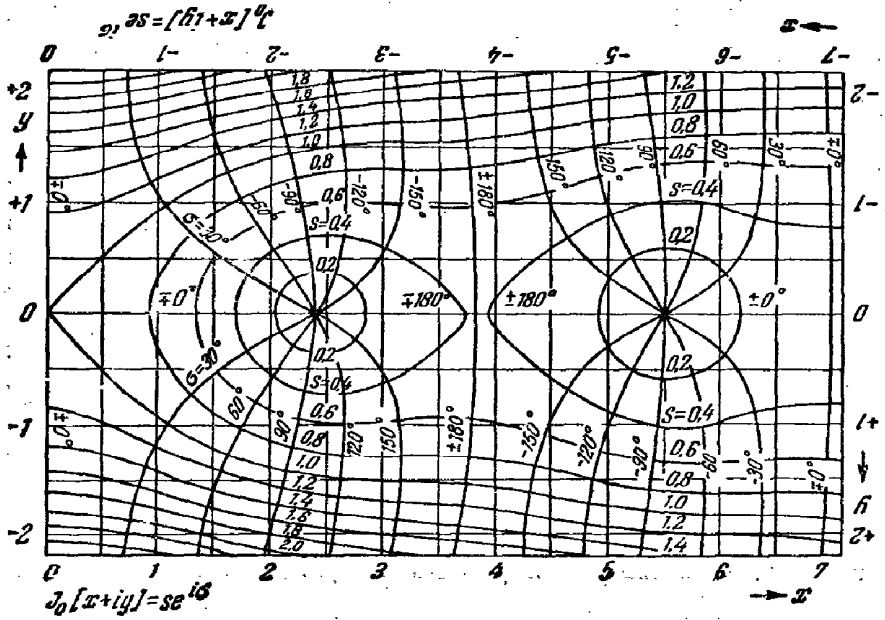


Рис. 105. Карта горизонталей рельефа функции Бесселя $J_0(x+iy)$.

Для действительного порядка ν функции Бесселя от действительного аргумента $x > 0$ будут действительными функциями $J_\nu(x)$; $J_\nu(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ (рис. 106—111, таблицы 43—46).

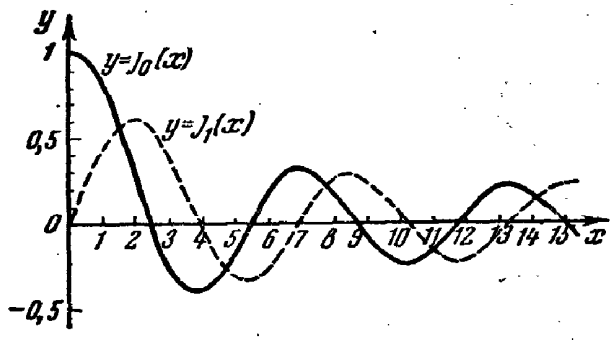


Рис. 106. Функции Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$.

2.2. Если порядок ν не есть целое число, то *функции Неймана* $N_\nu(z)$ (бесселевы функции 2-го рода) определяются как

$$N_\nu(z) = \frac{1}{\sin \nu\pi}\left[J_\nu(z)\cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)\right],$$

а если порядок есть целое число $\nu = n$, то

$$N_n(z) = \lim_{\nu \to n} N_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z)\right]_{\nu=n}$$

(рис. 112). При целом индексе справедливо представление

$$N_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{\gamma z}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{k+n}\frac{1}{l}\right) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

(γ — константа Эйлера) и $N_{-n}(z) = (-1)^n N_n(z)$. Для произвольного ν имеем $N_{\bar{\nu}}(\bar{z}) = \overline{N_\nu(z)}$.

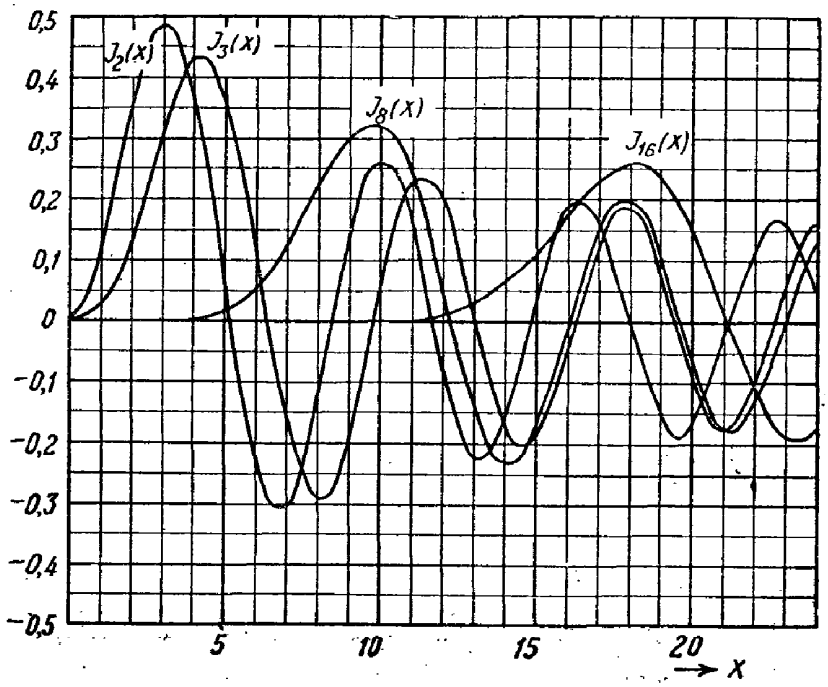


Рис. 107. Функции Бесселя $J_2(x)$, $J_3(x)$, $J_8(x)$, $J_{16}(x)$.

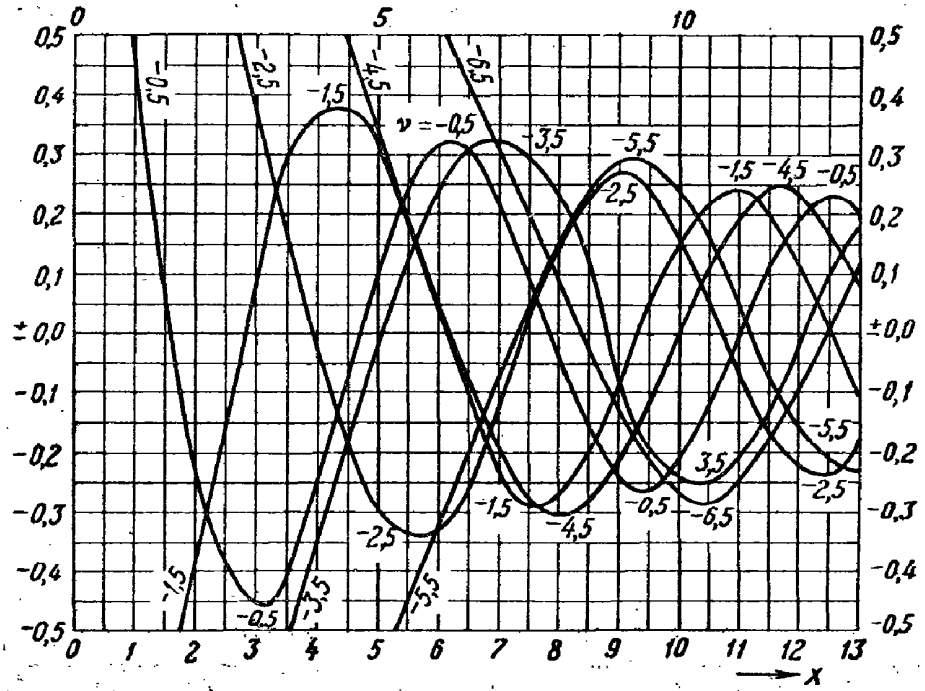


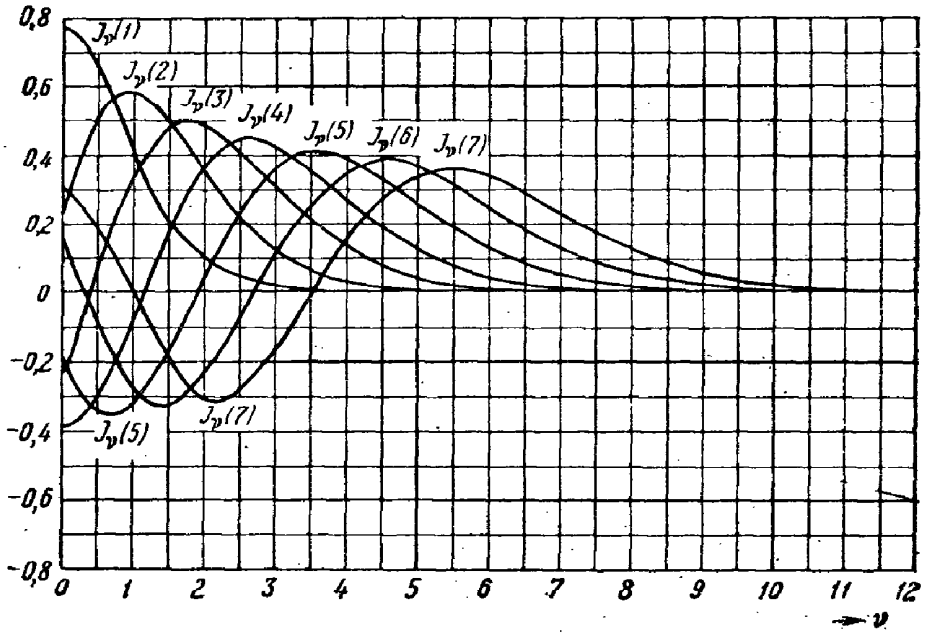
Рис. 108. Функции Бесселя $J_\nu(x)$ при $\nu = -n - \frac{1}{2}$.

Функция $N_\nu(z)$ многозначна; после m обходов вокруг точки ветвления $z=0$ получим:

$$N_\nu(e^{m\pi i}z) = e^{-m\nu\pi i}N_\nu(z) + 2i\frac{\sin m\nu\pi}{\sin \nu\pi}\cos \nu\pi\, J_\nu(z) \qquad (m\text{—целое});$$

в частности, для целого порядка $\nu = n$

$$N_n(e^{m\pi i}z) = (-1)^{mn}[N_n(z) + 2imJ_n(z)].$$



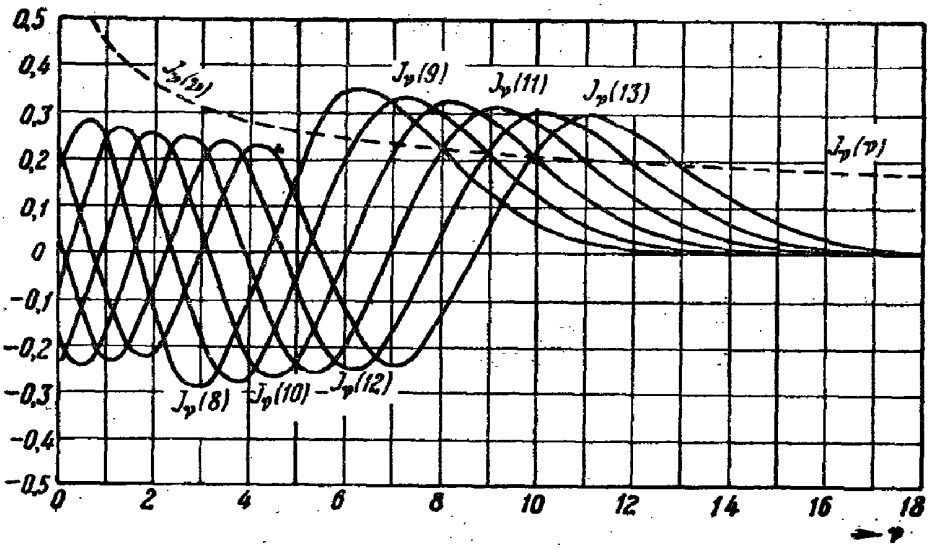


Рис. 109 и 110. Функции Бесселя при постоянном аргументе и переменном порядке.

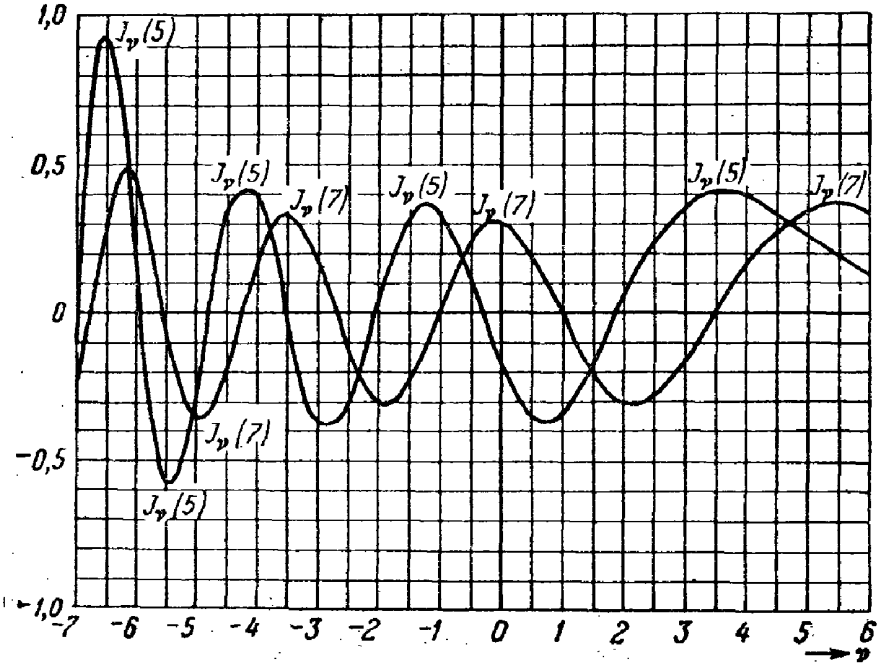


Рис. 111. Значения $J_\nu(5)$ и $J_\nu(7)$.

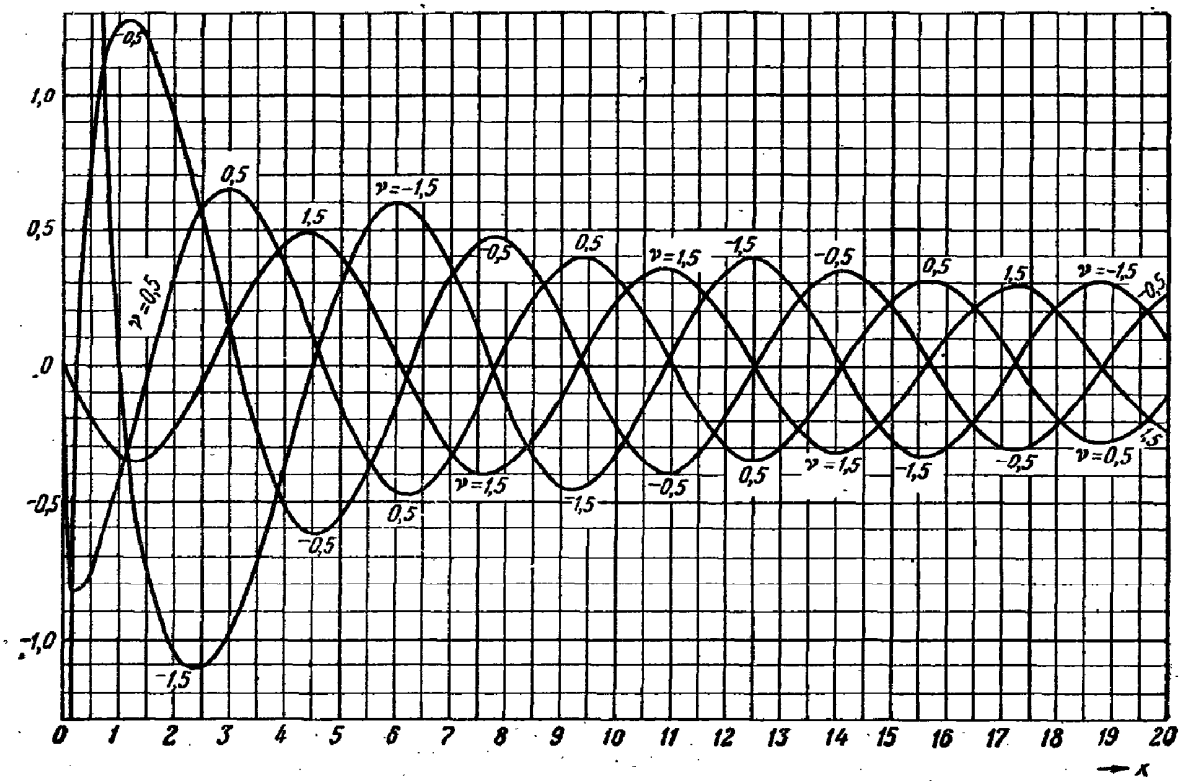


Рис. 112. Производная $\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu}$ как функция x.

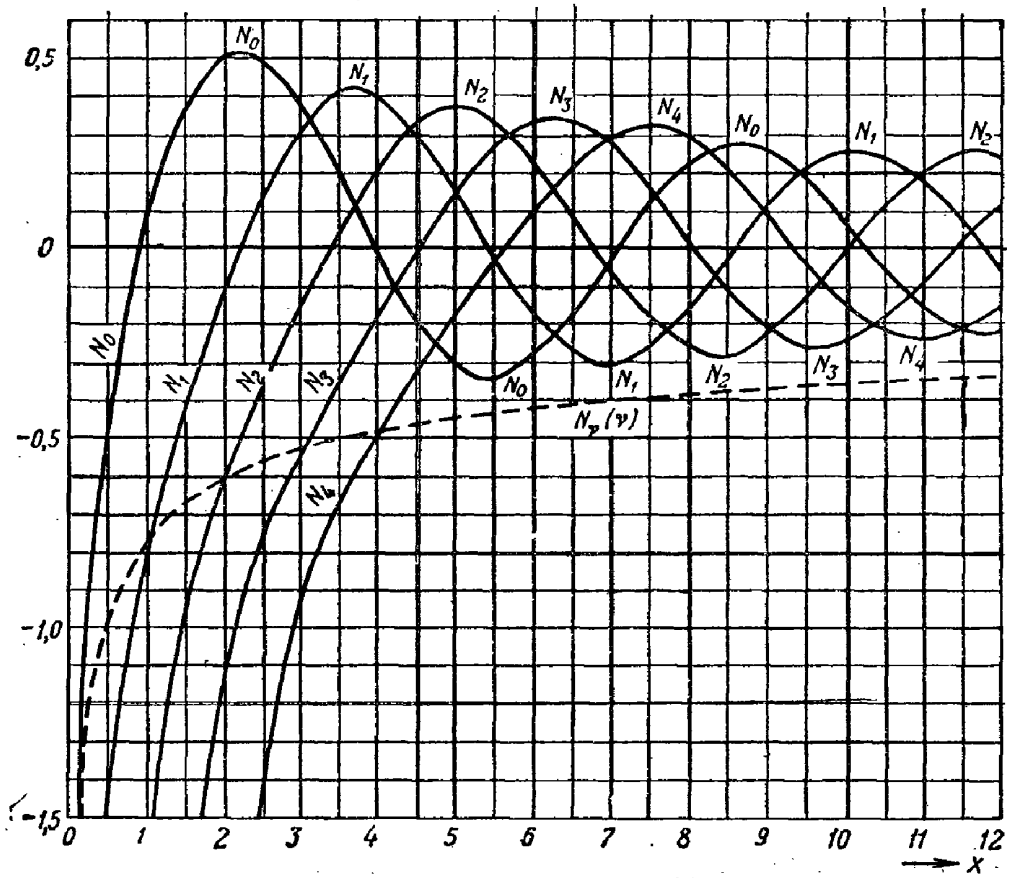


Рис. 113. Функция Неймана $N_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$.

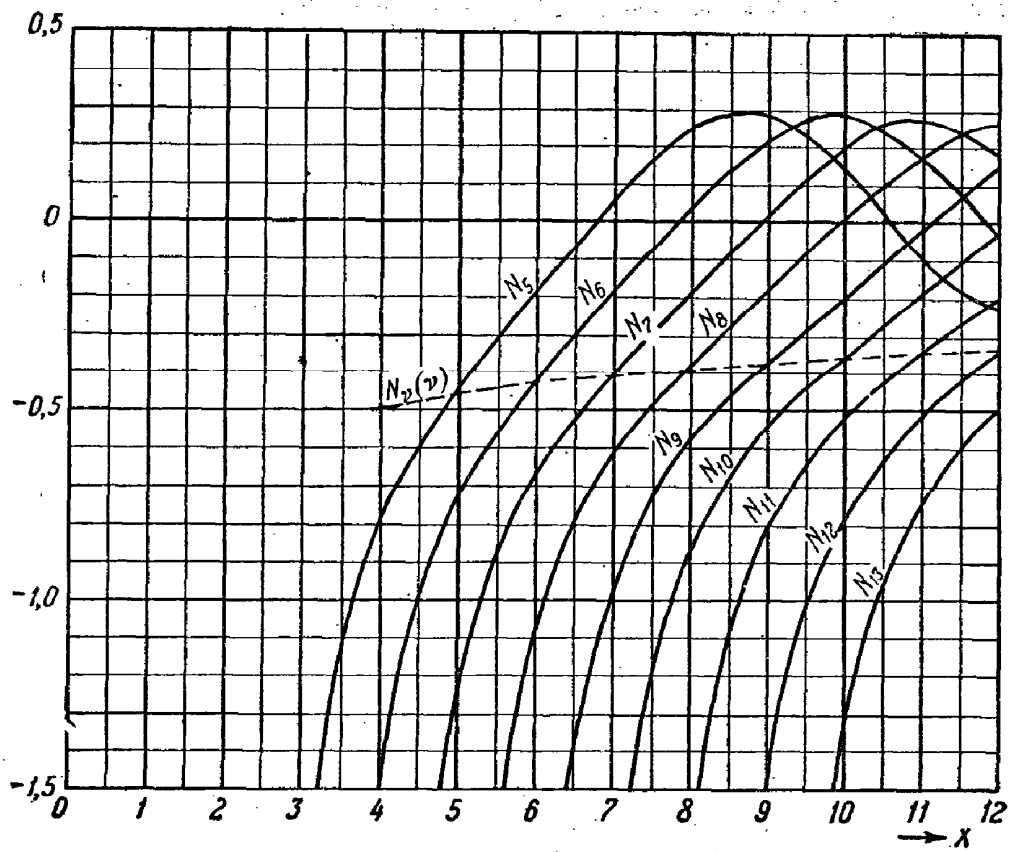


Рис. 114. Функции Неймана $N_\nu(x)$, $\nu = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$.

Для действительного $\nu \geqslant 0$ поведение $N_\nu(z)$ при $|z| \ll 1$ описывается формулами

$$N_0(z) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma z}, \quad N_\nu(z) \approx -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^\nu \qquad (\nu > 0).$$

Для действительного порядка ν функции Неймана от действительного аргумента $x > 0$ будут действительными функциями $N_\nu(x)$; $N_\nu(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ (рис. 113, 114, таблица 47).

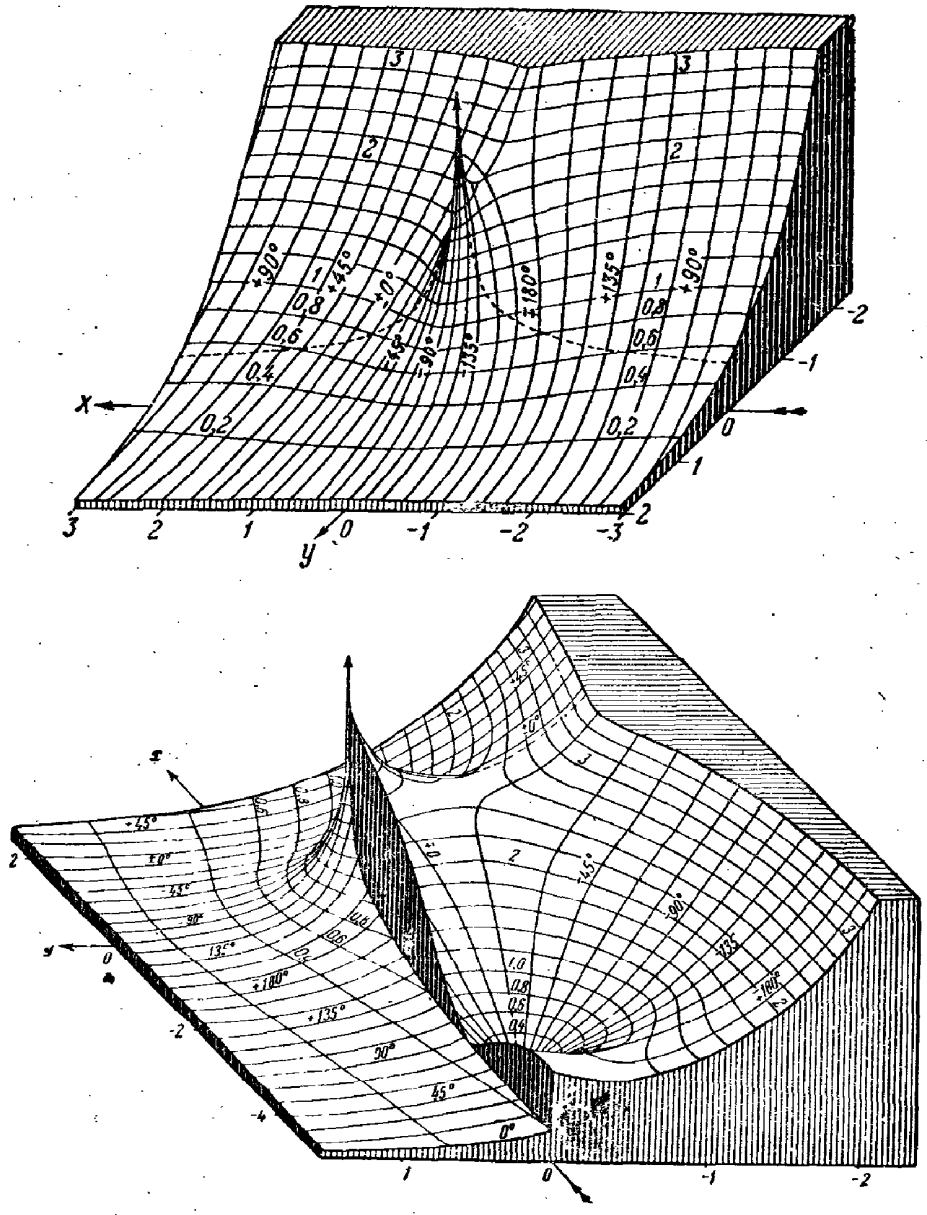


Рис. 115 и 116. Рельеф функции Ганкеля $H_0^{(1)}(z)$; $z = x + iy = re^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$.
Линия ветвления — вдоль отрицательной действительной полуоси.

2.3. Функции Ганкеля $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ (бесселевы функции 3-го рода) определяются как

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z), \qquad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z),$$

что для нецелого ν эквивалентно

$$H_\nu^{(1)}(z)=\frac{1}{\sin\nu\pi}\left[e^{-\nu\pi i}J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)\right],\qquad H_\nu^{(2)}(z)=\frac{-i}{\sin\nu\pi}\left[e^{\nu\pi i}J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)\right].$$

Из определений следует, что

$$J_\nu(z)=H_\nu^{(1)}(z)-iN_\nu(z)=H_\nu^{(2)}(z)+iN_\nu(z)=\frac{1}{2}\left[H_\nu^{(2)}(z)+H_\nu^{(1)}(z)\right],$$

$$N_\nu(z)=iJ_\nu(z)-iH_\nu^{(1)}(z)=iH_\nu^{(2)}(z)-iJ_\nu(z)=\frac{i}{2}\left[H_\nu^{(2)}(z)-H_\nu^{(1)}(z)\right],$$

$$2J_{-\nu}(z)=e^{\nu\pi i}H_\nu^{(1)}(z)+e^{-\nu\pi i}H_\nu^{(2)}(z),\quad H_{-\nu}^{(1)}(z)=e^{\nu\pi i}H_\nu^{(1)}(z),$$

$$H_{-\nu}^{(2)}(z)=e^{-\nu\pi i}H_\nu^{(2)}(z),\quad H_{\bar\nu}^{(1)}(\bar z)=\overline{H_\nu^{(2)}(z)},\qquad H_{\bar\nu}^{(2)}(\bar z)=\overline{H_\nu^{(1)}(z)}.$$

Функции Ганкеля многозначны; после m обходов вокруг точки ветвления $z=0$ получим:

$$\begin{aligned}H_\nu^{(1)}(e^{m\pi i}z)&=-\frac{\sin(m-1)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(1)}(z)-e^{-\nu\pi i}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(2)}(z),\\ H_\nu^{(2)}(e^{m\pi i}z)&=e^{\nu\pi i}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(1)}(z)+\frac{\sin(m+1)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(2)}(z);\end{aligned}\qquad (m\text{—целое})$$

в частности, для целого $\nu=n$

$$H_n^{(1)}(e^{m\pi i}z)=(-1)^{mn}\left[H_n^{(1)}(z)-2mJ_n(z)\right],$$
$$H_n^{(2)}(e^{m\pi i}z)=(-1)^{mn}\left[H_n^{(2)}(z)+2mJ_n(z)\right].$$

В отличие от $J_\nu(z)$ и $N_\nu(z)$, функции Ганкеля действительного порядка ν принимают комплексные значения для действительного аргумента $x>0$. Роль функций Ганкеля в приложениях заключается в том, что они—единственные из бесселевых функций которые обращаются в нуль при бесконечных значениях комплексного аргумента (рис. 115—120), а именно: $H_\nu^{(1)}(z)$—когда мнимая часть аргумента положительна, $H_\nu^{(2)}(z)$—когда она отрицательна:

$$\lim_{\varrho\to+\infty}H_\nu^{(1)}(\varrho e^{i\varphi})=0,\qquad \lim_{\varrho\to+\infty}H_\nu^{(2)}(\varrho e^{-i\varphi})=0\ \text{для}\ 0<\varphi<\pi.$$

2.4. Бесселевы функции порядка $\nu=n+\frac{1}{2}$ $(n=0,\pm1,\ldots)$ являются элементарными функциями (рис. 108, таблица 44):

$$J_{n+\frac12}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{n+\frac12}\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\frac{\sin z}{z},$$

$$J_{-n-\frac12}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{n+\frac12}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\frac{\cos z}{z}\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$N_{n+\frac12}(z)=(-1)^{n+1}J_{-n-\frac12}(z),$$

$$H_{n+\frac12}^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-\frac{i\pi}{2}(n+1)}e^{iz}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(n+k)!}{k!\,(n-k)!}\frac{1}{(2iz)^k},$$

$$H_{n+\frac12}^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{\frac{i\pi}{2}(n+1)}e^{iz}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(n+k)!}{k!\,(n-k)!}\frac{1}{(2iz)^k}.$$

В частности,

$$J_{\frac12}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z,\qquad N_{\frac12}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z,$$

$$H_{\frac12}^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{e^{iz}}{i},\qquad H_{\frac12}^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{e^{-iz}}{-i}.$$

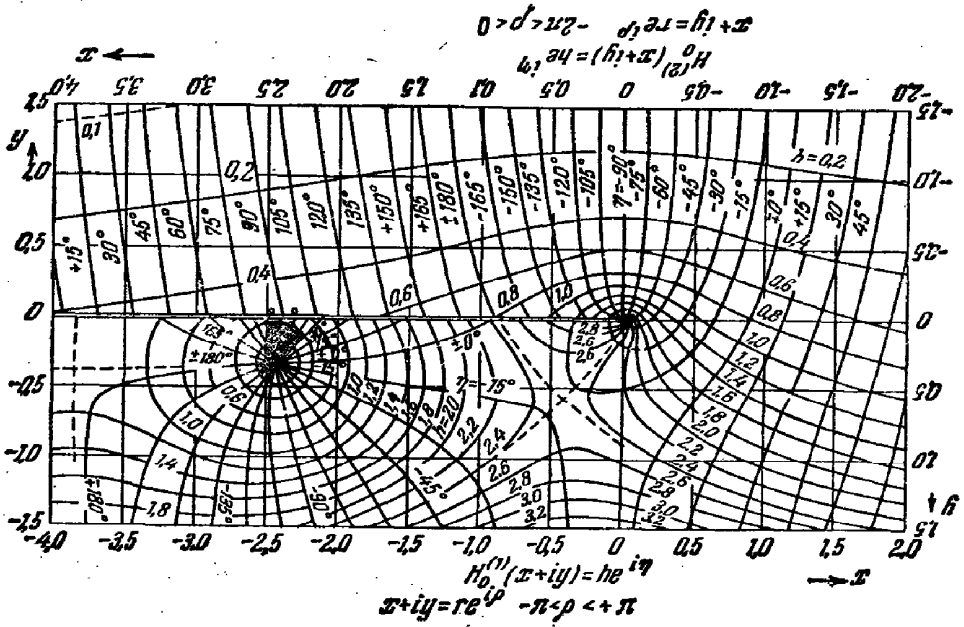


Рис. 117. Карта горизонталей рельефа функций Ганкеля $H_0^{(1)}(z)$ и $H_0^{(2)}(z)$.

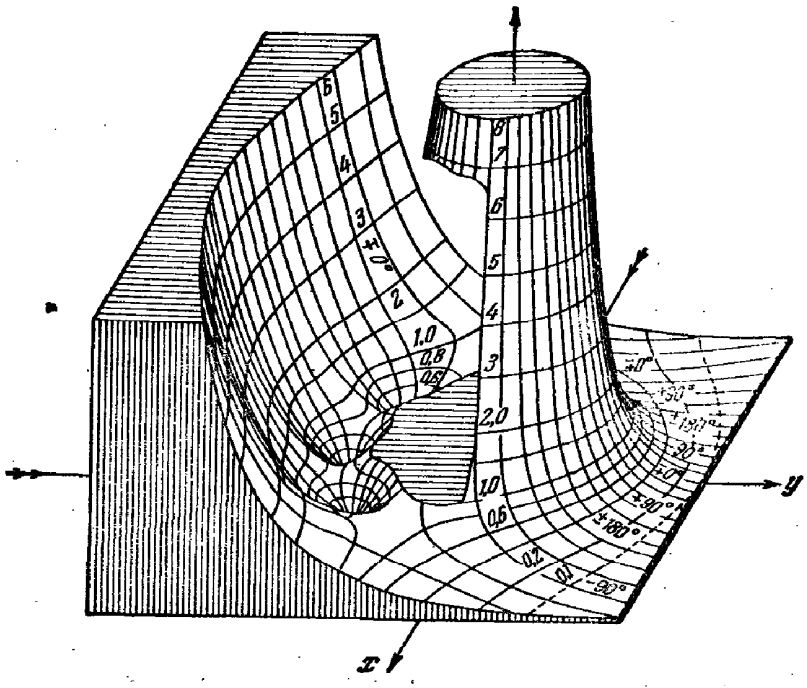


Рис. 118. Рельеф функции Ганкеля $H_{3,5}^{(1)}(z)$.

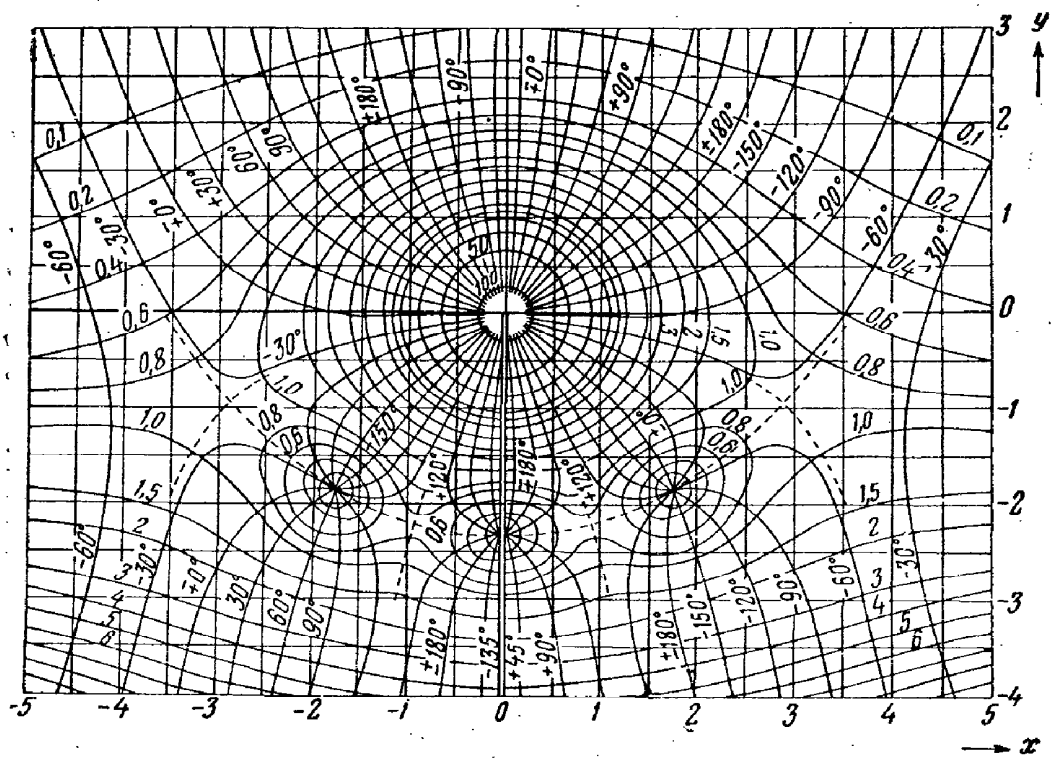


Рис. 119. Карта горизонталей рельефа функции Ганкеля $H^{(1)}_{3,5}(z)$.

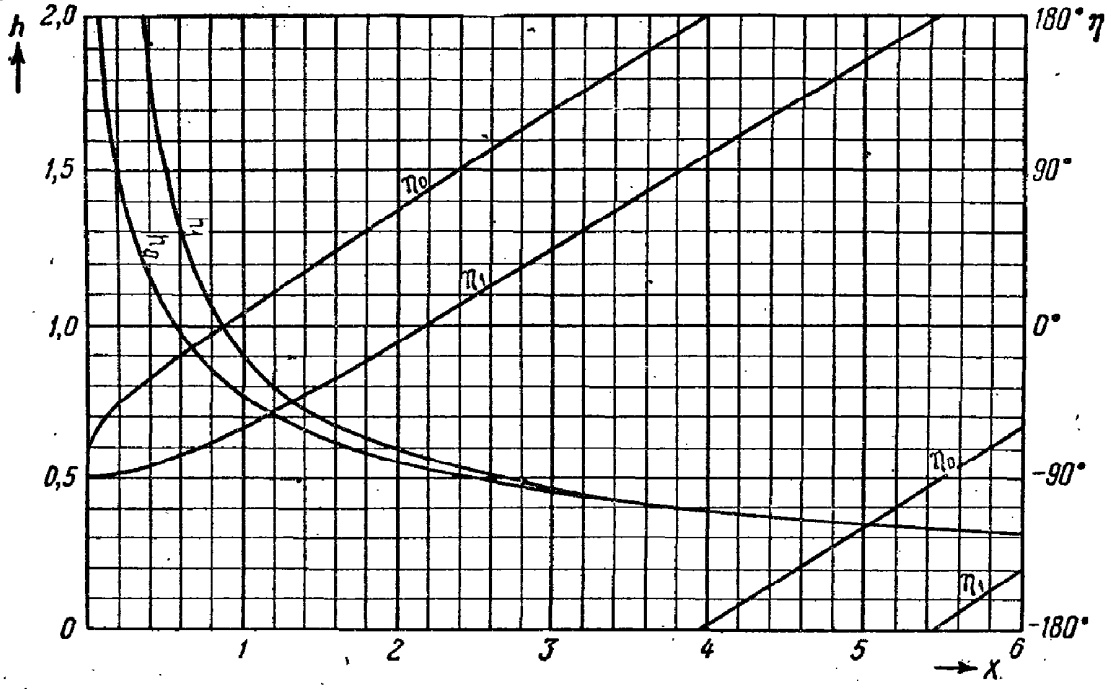


Рис. 120. Функция Ганкеля $H^{(1)}_\nu(x)=h_\nu e^{i\eta_\nu}$, $\nu=0, 1$.

Таблица 42. Функции $\Lambda_n(x)=n!\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}J_n(x)$

x	$\Lambda_1(x)$	$\Lambda_2(x)$	$\Lambda_3(x)$	$\Lambda_4(x)$	$\Lambda_5(x)$	$\Lambda_6(x)$	$\Lambda_7(x)$	$\Lambda_8(x)$
	+ 1,	+ 1,	+ 1,	+ 1,	+ 1,	+ 1,	+ 1,	+ 1,
0,00	0000 — 0,5	0000 0	0000 0	0000 0	0000 0	0000 0	0000 0	0000 0
02	*9999 0,5	0000 — 0,5	0000 — 0,5	0000 — 0,5	0000 — 0,5	0000 — 0,5	0000 0	0000 0
04	9998 1	*9999 1	*9999 0,5	*9999 0,5	*9999 0	*9999 0	0000 — 0,5	0000 — 0,5
06	9996 2	9997 1	9998 1	9998 0,5	9999 1	9999 0,5	*9999 0,5	*9999 0,5
08	9992 2	9995 1,5	9996 1	9997 1	9997 0,5	9998 1	9998 0,5	9998 0,5
0,10	9988 — 3	9992 — 2	9994 — 1,5	9995 — 1	9996 — 1	9996 — 0,5	9997 — 1	9997 — 0,5
12	9982 3	9988 2	9991 1,5	9993 1,5	9994 1	9995 1	9995 1	9996 0,5
14	9976 4	9984 2,5	9988 2	9990 1,5	9992 1,5	9993 1	9993 1	9995 1
16	9968 4	9979 3	9984 2	9987 1,5	9989 1	9991 1,5	9991 0,5	9993 1
18	9960 5	9973 3	9980 2,5	9984 2	9987 2	9988 1	9990 1	9991 1
0,20	9950 — 5	9967 — 3,5	9975 — 2,5	9980 — 2	9983 — 1,5	9986 — 1,5	9988 — 1,5	9989 — 1
22	9940 6	9960 4	9970 3	9976 2,5	9980 2	9983 2	9985 1,5	9987 1,5
24	9928 6	9952 4	9964 3	9971 2,5	9976 2	9979 1,5	9982 1,5	9984 1,5
26	9916 7	9944 4,5	9958 3,5	9966 2,5	9972 2,5	9976 2	9979 1,5	9981 1,5
28	9902 7	9935 5	9951 3,5	9961 3	9967 2	9972 2	9976 2	9978 1,5
0,30	9888 — 7,5	9925 — 5	9944 — 4	9955 — 3	9963 — 3	9968 — 2	9972 — 2	9975 — 1,5
32	9873 8,5	9915 5,5	9936 4	9949 3,5	9957 2,5	9964 2,5	9968 2	9972 2
34	9856 8,5	9904 6	9928 4,5	9942 3,5	9952 3	9959 2,5	9964 2	9968 2
36	9839 9	9892 6	9919 4,5	9935 3,5	9946 3	9954 2,5	9960 2,5	9964 2
38	9821 10	9880 6,5	9910 5	9928 4	9940 3	9949 3	9955 2,5	9960 2
0,40	9801 — 10	9867 — 6,5	9900 — 5	9920 — 4	9934 — 3,5	9943 — 3	9950 — 2,5	9956 — 2,5
42	9781 10,5	9854 7	9890 5	9912 4	9927 3,5	9937 3	9945 2,5	9951 2,5
44	9760 11	9840 7,5	9880 6	9904 4,5	9920 4	9931 3	9940 3	9946 2,5
46	9738 11,5	9825 8	9868 5,5	9895 5	9912 4	9925 3,5	9934 3	9941 2,5
48	9715 12	9809 8	9857 6	9885 4,5	9904 4	9918 3,5	9928 3	9936 2,5
0,50	9691 — 12,5	9793 — 8	9845 — 6,5	9876 — 5	9896 — 4	9911 — 3,5	9922 — 3	9931 — 3
52	9666 13	9777 9	9832 6,5	9866 5,5	9888 4,5	9904 4	9916 3,5	9925 3
54	9640 13,5	9759 9	9819 6,5	9855 5,5	9879 4,5	9896 3,5	9909 3,5	9919 3
56	9613 14	9741 9	9806 7	9844 5,5	9870 4,5	9889 4	9902 3,5	9913 3
58	9585 14	9723 10	9792 7,5	9833 6	9861 5	9881 4,5	9895 3,5	9907 3,5
0,60	9557 — 15	9703 — 9,5	9777 — 7,5	9821 — 6	9851 — 5	9872 — 4	9888 — 3,5	9900 — 3
62	9527 15	9684 10,5	9762 7,5	9809 6	9841 5	9864 4,5	9881 4	9894 3,5
64	9497 16	9663 10,5	9747 8	9797 6,5	9831 5,5	9855 4,5	9873 4	9887 3,5
66	9465 16	9642 11	9731 8,5	9784 6,5	9820 5,5	9846 5	9865 4,5	9880 4
68	9433 16,5	9620 11	9714 8	9771 6,5	9809 5,5	9836 5	9856 4	9872 3,5
0,70	9400 — 17	9598 — 11,5	9698 — 9	9758 — 7	9798 — 6	9826 — 5	9848 — 4,5	9865 — 4
72	9366 17,5	9575 12	9680 9	9744 7,5	9786 6	9816 5	9839 4,5	9857 4
74	9331 18	9551 12	9662 9	9729 7	9774 6	9806 5	9830 4,5	9849 4
76	9295 18,5	9527 12	9644 9	9715 7,5	9762 6,5	9796 5,5	9821 4,5	9841 4,5
78	9258 18,5	9503 13	9626 10	9700 8	9749 6,5	9785 5,5	9812 5	9832 4
0,80	9221 — 19	9477 — 13	9606 — 9,5	9684 — 7,5	9736 — 6,5	9774 — 6	9802 — 5	9824 — 4,5
82	9183 19,5	9451 13	9587 10	9669 8,5	9723 6,5	9762 5,5	9792 5	9815 4,5
84	9144 20	9425 13,5	9567 10,5	9652 8	9710 7	9751 6	9782 5,5	9806 5
86	9104 20,5	9398 14	9546 10,5	9636 8,5	9696 7	9739 6	9771 5	9796 4,5
88	9063 21	9370 14	9525 10,5	9619 8,5	9682 7,5	9727 6,5	9761 5,5	9787 5
0,90	9021 — 21	9342 — 14,5	9504 — 11	9602 — 9	9667 — 7	9714 — 6	9750 — 5,5	9777 — 5
92	8979 22	9313 14,5	9482 11	9584 9	9653 7,5	9702 6,5	9739 6	9767 5
94	8935 22	9284 15	9460 11,5	9566 9	9638 8	9689 6,5	9727 5,5	9757 5
96	8891 22	9254 15,5	9437 11,5	9548 9,5	9622 7,5	9676 7	9716 6	9747 5,5
98	8847 23	9223 15,5	9414 12	9529 9,5	9607 8	9662 7	9704 6	9736 5
1,00	8801	9192	9390	9510	9591	9648	9692	9726
	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0

Продолжение табл. 42

x	$\Lambda_1(x)$	$\Lambda_2(x)$	$\Lambda_3(x)$	$\Lambda_4(x)$	$\Lambda_5(x)$	$\Lambda_6(x)$	$\Lambda_7(x)$	$\Lambda_8(x)$
	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,
1,00	8801 — 23	9192 — 15,5	9390 — 12	9510 — 9,5	9591 — 8	9648 — 7	9692 — 6	9726 — 5,5
02	8755 23,5	9161 16	9366 12	9491 10	9575 8,5	9634 7	9680 6,5	9715 5,5
04	8708 24	9129 16,5	9342 12,5	9471 10	9558 8,5	9620 7	9667 6,5	9704 6
06	8660 24,5	9096 16,5	9317 12,5	9451 10	9541 8,5	9606 7,5	9654 6,5	9692 5,5
08	8611 24,5	9063 17	9292 13	9431 10,5	9524 8,5	9591 7,5	9641 6,5	9681 6
1,10	8562 — 25	9029 — 17	9266 — 13	9410 — 10,5	9507 — 9	9576 — 7,5	9628 — 6,5	9669 — 6
12	8512 25,5	8995 17,5	9240 13	9389 10,5	9489 9	9561 8	9615 7	9657 6
14	8461 25,5	8960 17,5	9214 13,5	9368 11	9471 9	9545 8	9601 7	9645 6,5
16	8410 26	8925 18	9187 13,5	9346 11	9453 9,5	9529 8	9587 7	9632 6
18	8358 26,5	8889 18	9160 14	9324 11,5	9434 9,5	9513 8	9573 7	9620 6,5
1,20	8305 — 27	8853 — 18,5	9132 — 14	9301 — 11	9415 — 9,5	9497 — 8	9559 — 7,5	9607 — 6,5
22	8251 27	8816 18,5	9104 14,5	9279 12	9396 9,5	9481 8,5	9544 7	9594 6,5
24	8197 27	8779 19	9075 14,5	9255 11,5	9377 10	9464 8,5	9530 7,5	9581 6,5
26	8143 28	8741 19	9046 14,5	9232 12	9357 10	9447 8,5	9515 7,5	9568 7
28	8087 28	8703 19,5	9017 15	9208 12	9337 10	9430 9	9500 8	9554 7
1,30	8031 — 28	8664 — 19,5	8987 — 15	9184 — 12	9317 — 10,5	9412 — 9	9484 — 7,5	9540 — 7
32	7975 29	8625 20	8957 15	9160 12,5	9296 10,5	9394 9	9469 8	9526 7
34	7917 28,5	8585 20	8927 15,5	9135 12,5	9275 10,5	9376 9	9453 8	9512 7
36	7860 29,5	8545 20	8896 15,5	9110 12,5	9254 10,5	9358 9	9437 8,5	9498 7,5
38	7801 29,5	8505 20,5	8865 16	9085 13	9233 11	9340 9,5	9420 8	9483 7
1,40	7742 — 29,5	8464 — 21	8833 — 15,5	9059 — 13	9211 — 10,5	9321 — 9,5	9404 — 8,5	9469 — 7,5
42	7683 30	8422 21	8802 16,5	9033 13	9190 11,5	9302 9,5	9387 8,5	9454 7,5
44	7623 30,5	8380 21	8769 16	9007 13,5	9167 11	9283 9,5	9370 8,5	9439 8
46	7562 30,5	8338 21,5	8737 16,5	8980 13	9145 11,5	9264 10	9353 8,5	9423 7,5
48	7501 31	8295 21,5	8704 17	8954 14	9122 11,5	9244 10	9336 9	9408 8
1,50	7439 — 31	8252 — 21,5	8670 — 16,5	8926 — 13,5	9099 — 11,5	9224 — 10	9318 — 8,5	9392 — 8
52	7377 31,5	8209 22	8637 17	8899 14	9076 11,5	9204 10	9301 9	9376 8
54	7314 31,5	8165 22,5	8603 17	8871 14	9053 12	9184 10,5	9283 9	9360 8
56	7251 31,5	8120 22,5	8569 17,5	8843 14	9029 12	9163 10,5	9265 9,5	9344 8
58	7188 32	8075 22,5	8534 17,5	8815 14,5	9005 12	9142 10,5	9246 9	9328 8,5
1,60	7126 — 32,5	8030 — 22,5	8499 — 17,5	8786 — 14,5	8981 — 12,5	9121 — 10,5	9228 — 9,5	9311 — 8,5
62	7059 32,5	7985 23	8464 18	8757 14,5	8956 12	9100 10,5	9209 9,5	9294 8
64	6994 32,5	7939 23	8428 18	8728 14,5	8932 12,5	9079 11	9190 9,5	9278 9
66	6929 33	7893 23,5	8392 18	8699 15	8907 12,5	9057 11	9171 9,5	9260 8,5
68	6863 33	7846 23,5	8356 18,5	8669 15	8882 13	9035 11	9152 10	9243 8,5
1,70	6797 — 33	7799 — 23,5	8319 — 18,5	8639 — 15	8856 — 12,5	9013 — 11	9132 — 9,5	9226 — 9
72	6731 33,5	7752 24	8282 18,5	8609 15,5	8831 13	8991 11	9113 10	9208 9
74	6664 33,5	7704 24	8245 18,5	8578 15	8805 13	8969 11,5	9093 10	9190 9
76	6597 34	7656 24	8208 19	8548 16	8779 13,5	8946 11,5	9073 10,5	9172 9
78	6529 34	7608 24,5	8170 19	8516 15,5	8752 13	8923 11,5	9052 10	9154 9
1,80	6461 — 34	7559 — 24,5	8132 — 19	8485 — 15,5	8726 — 13,5	8900 — 12	9032 — 10,5	9136 — 9,5
82	6393 34	7510 24,5	8094 19,5	8454 16	8699 13,5	8876 11,5	9011 10,5	9117 9,5
84	6325 34,5	7461 25	8055 19,5	8422 16	8672 14	8853 12	8990 10,5	9098 9
86	6256 34,5	7411 24,5	8016 19,5	8390 16	8644 13,5	8829 12	8969 10,5	9080 9,5
88	6187 35	7362 25,5	7977 19,5	8358 16,5	8617 14	8805 12	8948 10,5	9061 10
1,90	6117 — 34,5	7311 — 25	7938 — 20	8325 — 16,5	8589 — 14	8781 — 12	8927 — 11	9041 — 9,5
92	6048 35	7261 25,5	7898 20	8292 16,5	8561 14	8757 12,5	8905 10,5	9022 10
94	5978 35	7210 25,5	7858 20	8259 16,5	8533 14	8732 12	8884 11	9002 9,5
96	5908 35	7159 25,5	7818 20,5	8226 16,5	8505 14,5	8708 12,5	8862 11	8983 10
98	5838 35,5	7108 25,5	7777 20	8193 17	8476 14	8683 12,5	8840 11,5	8963 10
2,00	5767	7057	7737	8159	8448	8658	8817	8943
	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0	+ 0,

Продолжение табл. 42

x	$\Lambda_1(x)$		$\Lambda_2(x)$		$\Lambda_3(x)$		$\Lambda_4(x)$		$\Lambda_5(x)$		$\Lambda_6(x)$		$\Lambda_7(x)$		$\Lambda_8(x)$	
	+ 0,		+ 0,		+ 0,		+ 0,		+ 0,		+ 0,		+ 0,		+ 0,	
2,00	5767	— 35	7057	— 26	7737	— 20,5	8159	— 17	8448	— 14,5	8658	— 13	8817	— 11	8943	— 10
02	5697	35,5	7005	26	7696	20,5	8125	17	8419	15	8632	12,5	8795	11,5	8923	10,5
04	5626	35,5	6953	26	7655	21	8091	17	8389	14,5	8607	13	8772	11,5	8902	10
06	5555	35,5	6901	26	7613	20,5	8057	17,5	8360	14,5	8581	13	8749	11,5	8882	10,5
08	5484	36	6849	26,5	7572	21	8022	17,5	8331	15	8555	13	8726	11,5	8861	10,5
2,10	5412	— 35,5	6796	— 26,5	7530	— 21	7987	— 17,5	8301	— 15	8529	— 13	8703	— 11,5	8840	— 10,5
12	5341	36	6743	26,5	7488	21,5	7952	17,5	8271	15	8503	13	8680	11,5	8819	10,5
14	5269	35,5	6690	26,5	7445	21	7917	17,5	8241	15,5	8477	13,5	8657	12	8798	10,5
16	5198	36	6637	26,5	7403	21,5	7882	18	8210	15	8450	13,5	8633	12	8777	10,5
18	5126	36	6584	27	7360	21	7846	17,5	8180	15,5	8423	13	8609	12	8756	11
2,20	5054	— 36	6530	— 27	7318	— 22	7811	— 18	8149	— 15,5	8397	— 14	8585	— 12	8734	— 11
22	4982	36	6476	27	7274	21,5	7775	18,5	8118	15,5	8369	13,5	8561	12	8712	11
24	4910	35,5	6422	27	7231	21,5	7738	18	8087	15,5	8342	13,5	8537	12,5	8690	11
26	4839	36	6368	27	7188	22	7702	18	8056	15,5	8315	14	8512	12	8668	11
28	4767	36	6314	27	7144	22	7666	18,5	8025	16	8287	13,5	8488	12,5	8646	11
2,30	4695	— 36	6260	— 27,5	7100	— 22	7629	— 18,5	7993	— 16	8260	— 14	8463	— 12,5	8624	— 11
32	4623	36	6205	27,5	7056	22	7592	18,5	7961	16	8232	14	8438	12,5	8602	11,5
34	4551	36	6150	27	7012	22	7555	18,5	7929	16	8204	14,5	8413	12,5	8579	11,5
36	4479	36	6096	27,5	6968	22	7518	19	7897	16	8175	14	8388	12,5	8556	11,5
38	4407	36	6041	27,5	6924	22,5	7480	18,5	7865	16	8147	14	8363	13	8533	11,5
2,40	4335	— 36	5986	— 27,5	6879	— 22,5	7443	— 19,5	7833	— 16,5	8119	— 14,5	8337	— 12,5	8510	— 11,5
42	4263	36	5931	27,5	6834	22,5	7404	18,5	7800	16,5	8090	14,5	8312	13	8487	11,5
44	4191	35,5	5876	28	6789	22,5	7367	18,5	7767	16	8061	14,5	8286	13	8464	11,5
46	4120	36	5820	27,5	6744	22,5	7330	19,5	7735	16,5	8032	14,5	8260	13	8441	12
48	4048	35,5	5765	27,5	6699	22,5	7291	19	7702	17	8003	14,5	8234	13	8417	12
2,50	3977	— 36	5710	— 28	6654	— 22,5	7253	— 19	7668	— 16,5	7974	— 15	8208	— 13	8393	— 11,5
52	3905	35,5	5654	27,5	6609	23	7215	19,5	7635	16,5	7944	14,5	8182	13,5	8370	12
54	3834	35,5	5599	28	6563	23	7176	19,5	7602	17	7915	15	8155	13	8346	12
56	3763	35,5	5543	28	6517	22,5	7137	19	7568	17	7885	15	8129	13,5	8322	12,5
58	3692	35	5487	27,5	6472	23	7099	19,5	7534	16,5	7855	15	8102	13,5	8297	12
2,60	3622	— 35,5	5432	— 28	6426	— 23	7060	— 19,5	7501	— 17,5	7825	— 15	8075	— 13,5	8273	— 12
62	3551	35	5376	28	6380	23	7021	20	7466	17	7795	15	8048	13,5	8249	12,5
64	3481	35	5320	27,5	6334	23	6981	19,5	7432	17	7765	15	8021	13,5	8224	12,5
66	3411	35	5265	28	6288	23	6942	19,5	7398	17	7735	15,5	7994	14	8199	12
68	3341	35	5209	28	6242	23,5	6903	20	7364	17,5	7704	15	7966	13,5	8175	12,5
2,70	3271	— 34,5	5153	— 28	6195	— 23	6863	— 19,5	7329	— 17	7674	— 15,5	7939	— 13,5	8150	— 12,5
72	3202	34,5	5097	28	6149	23	6824	20	7295	17,5	7643	15,5	7912	14	8125	12,5
74	3133	34,5	5041	27,5	6103	23,5	6784	20	7260	17,5	7612	15	7884	14	8100	13
76	3064	34,5	4986	28	6056	23,5	6744	20	7225	17,5	7582	16	7856	14	8074	12,5
78	2995	34,5	4930	28	6009	23	6704	20	7190	17,5	7550	15,5	7828	14	8049	12,5
2,80	2926	— 34	4874	— 27,5	5963	— 23,5	6664	— 20	7155	— 17,5	7519	— 15,5	7800	— 14	8024	— 13
82	2858	33,5	4819	28	5916	23,5	6624	20	7120	17,5	7488	15,5	7772	14	7998	13
84	2791	34	4763	27,5	5869	23	6584	20,5	7085	17,5	7457	16	7744	14,5	7972	13
86	2723	33,5	4708	28	5823	23,5	6543	20	7050	18	7425	15,5	7715	14	7946	12,5
88	2656	33,5	4652	27,5	5776	23,5	6503	20	7014	17,5	7394	16	7687	14,5	7921	13
2,90	2589	— 33	4597	— 28	5729	— 23,5	6463	— 20,5	6979	— 18	7362	— 16	7658	— 14	7895	— 13,5
92	2523	33	4541	27,5	5682	23,5	6422	20	6943	18	7330	16	7630	14,5	7868	13
94	2457	33	4486	27,5	5635	23,5	6382	20,5	6907	18	7298	16	7601	14,5	7842	13
96	2391	33	4431	27,5	5588	23,5	6341	20,5	6871	17,5	7266	16	7572	14,5	7816	13,5
98	2325	32,5	4376	27,5	5541	23,5	6300	20,5	6836	18	7234	16	7543	14,5	7789	13
3,00	2260		4321		5494		6259		6800		7202		7514		7763	
	+ 0,		+ 0,		+ 0,		+ 0,		+ 0,		+ 0,		+ 0,		+ 0,	

Продолжение табл. 42

x	$\Lambda_1(x)$	$\Lambda_2(x)$	$\Lambda_3(x)$	$\Lambda_4(x)$	$\Lambda_5(x)$	$\Lambda_6(x)$	$\Lambda_7(x)$	$\Lambda_8(x)$
	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,
3,00	2260 — 32	4321 — 27,5	5494 — 23	6259 — 20	6800 — 18	7202 — 16	7514 — 14,5	7763 — 13,5
02	2196 32	4266 27,5	5448 24	6219 20,5	6764 18,5	7170 16	7485 14,5	7736 13
04	2132 32	4211 27,5	5400 23	6178 20,5	6727 18	7138 16,5	7456 15	7710 13,5
06	2068 32	4156 27	5354 23,5	6137 20,5	6691 18	7105 16	7426 14,5	7683 13,5
08	2004 31,5	4102 27	5307 23,5	6096 20,5	6655 18	7073 16,5	7397 15	7656 13,5
3,10	1941 — 31	4048 — 27,5	5260 — 23,5	6055 — 20,5	6619 — 18,5	7040 — 16,5	7367 — 14,5	7629 — 13,5
12	1879 31	3993 27	5213 23,5	6014 20,5	6582 18	7007 16	7338 15	7602 13,5
14	1817 31	3939 27	5166 23,5	5973 21	6546 18,5	6975 16,5	7308 15	7575 13,5
16	1755 30,5	3885 27	5119 23,5	5931 20,5	6509 18	6942 16,5	7278 15	7548 14
18	1694 30,5	3831 26,5	5072 23,5	5890 20,5	6473 18,5	6909 16,5	7248 15	7520 13,5
3,20	1633 — 30	3778 — 27	5025 — 23	5849 — 20,5	6436 — 18,5	6876 — 16,5	7218 — 15	7493 — 14
22	1573 29,5	3724 26,5	4979 23,5	5808 20,5	6399 18	6843 16,5	7188 15	7465 13,5
24	1514 30	3671 26,5	4932 23,5	5767 20,5	6363 18,5	6810 16,5	7158 15	7438 14
26	1454 29	3618 26,5	4885 23	5726 21	6326 18,5	6777 17	7128 15	7410 14
28	1396 29,5	3565 26,5	4839 23,5	5684 20,5	6289 18,5	6743 16,5	7098 15	7382 13,5
3,30	1337 — 28,5	3512 — 26,5	4792 — 23,5	5643 — 20,5	6252 — 18,5	6710 — 16,5	7068 — 15,5	7355 — 14
32	1280 29	3459 26	4745 23	5602 21	6215 18,5	6677 17	7037 15	7327 14
34	1222 28	3407 26	4699 23	5560 20,5	6178 18,5	6643 16,5	7007 15,5	7299 14
36	1166 28	3355 26	4653 23,5	5519 20,5	6141 18,5	6610 17	6976 15	7271 14
38	1110 28	3303 26	4606 23	5478 20,5	6104 18,5	6576 16,5	6946 15,5	7243 14
3,40	1054 — 27,5	3251 — 26	4560 — 23	5437 — 21	6067 — 18,5	6543 — 17	6915 — 15,5	7215 — 14,5
42	0999 27	3199 25,5	4514 23	5395 20,5	6030 18,5	6509 16,5	6884 15	7186 14
44	0945 27	3148 25,5	4468 23	5354 20,5	5993 18,5	6476 17	6854 15,5	7158 14
46	0891 26,5	3097 25,5	4422 23	5313 20,5	5956 18,5	6442 17	6823 15,5	7130 14,5
48	0838 26,5	3046 25,5	4376 23	5272 20,5	5919 19	6408 17	6792 15,5	7101 14
3,50	0785 — 26	2995 — 25	4330 — 23	5231 — 21	5881 — 18,5	6374 — 16,5	6761 — 15,5	7073 — 14,5
52	0733 26	2945 25	4284 22,5	5189 20,5	5844 18,5	6341 17	6730 15,5	7044 14
54	0681 25,5	2895 25	4239 23	5148 20,5	5807 18,5	6307 17	6699 15,5	7016 14,5
56	0630 25	2845 25	4193 22,5	5107 20,5	5770 18,5	6273 17	6668 15,5	6987 14,5
58	0580 25	2795 24,5	4148 22,5	5066 20,5	5733 19	6239 17	6637 15,5	6958 14
3,60	0530 — 24,5	2746 — 24,5	4103 — 23	5025 — 20,5	5695 — 18,5	6205 — 17	6606 — 15,5	6930 — 14,5
62	0481 24	2697 24,5	4057 22,5	4984 20,5	5658 18,5	6171 17	6575 16	6901 14,5
64	0433 24	2648 24,5	4012 22,5	4943 20,5	5621 18,5	6137 17	6543 15,5	6872 14,5
66	0385 23,5	2599 24	3967 22	4902 20	5584 19	6103 17	6512 15,5	6843 14,5
68	0338 23,5	2551 24	3923 22,5	4862 20,5	5546 18,5	6069 17	6481 16	6814 14,5
3,70	02910 — 230	2503 — 24	3878 — 22,5	4821 — 20,5	5509 — 18,5	6035 — 17	6449 — 15,5	6785 — 14,5
72	02450 226,5	2455 23,5	3833 22	4780 20,5	5472 18,5	6001 17,5	6418 15,5	6756 14,5
74	01997 223,5	2408 23,5	3789 22	4739 20	5435 18,5	5966 17	6387 16	6727 14,5
76	01550 220,5	2361 23,5	3745 22	4699 20,5	5398 19	5932 17	6355 15,5	6698 14,5
78	01109 217	2314 23	3701 22	4658 20	5360 18,5	5898 17	6324 16	6669 15
3,80	00675 — 214	2268 — 23	3657 — 22	4618 — 20,5	5323 — 18,5	5864 — 17	6292 — 16	6639 — 14,5
82	00247 210,5	2222 23	3613 22	4577 20	5286 18,5	5830 17	6260 15,5	6610 14,5
84	*00174 207	2176 23	3569 21,5	4537 20	5249 18,5	5796 17	6229 16	6581 15
86	00588 204	2130 22,5	3526 21,5	4497 20,5	5212 18,5	5762 17,5	6197 15,5	6551 14,5
88	00996 200,5	2085 22,5	3483 22	4456 20	5175 18,5	5727 17	6166 16	6522 14,5
3,90	01397 — 197,5	2040 — 22	3439 — 21,5	4416 — 20	5138 — 18,5	5693 — 17	6134 — 16	6493 — 15
92	01792 193,5	1996 22,5	3396 21	4376 20	5101 18,5	5659 17	6102 15,5	6463 14,5
94	02179 190,5	1951 22	3354 21,5	4336 20	5064 18,5	5625 17	6071 16	6434 15
96	02560 187,5	1907 21,5	3311 21	4296 19,5	5027 18,5	5591 17	6039 16	6404 14,5
98	02935 183,5	1864 21,5	3269 21,5	4257 20	4990 18,5	5557 17,5	6007 15,5	6375 15
4,00	03302	1821	3226	4217	4953	5522	5976	6345
	— 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,

Продолжение табл. 42

x	$\Lambda_1(x)$		$\Lambda_2(x)$		$\Lambda_3(x)$		$\Lambda_4(x)$		$\Lambda_5(x)$		$\Lambda_6(x)$		$\Lambda_7(x)$		$\Lambda_8(x)$	
	— 0,0		+ 0,		+ 0,		+ 0,		+ 0,		+ 0,		+ 0,		+ 0,	
4.00	3302	— 180,5	1821	— 21,5	3226	— 21	4217	— 20	4953	— 18	5522	— 17	5976	— 16	6345	— 14,5
02	3663	177	1778	21,5	3184	21	4177	19,5	4917	18,5	5488	17	5944	16	6316	15
04	4017	173,5	1735	21	3142	20,5	4138	19,5	4880	18,5	5454	17	5912	16	6286	15
06	4364	170	1693	21	3101	21	4099	20	4843	18,5	5420	17	5880	15,5	6256	14,5
08	4704	167	1651	20,5	3059	20,5	4059	19,5	4806	18	5386	17	5849	16	6227	15
4.10	5038	— 163	1610	— 20,5	3018	— 20,5	4020	— 19,5	4770	— 18,5	5352	— 17	5817	— 16	6197	— 15
12	5364	160	1569	20,5	2977	20,5	3981	19,5	4733	18	5318	17	5785	16	6167	15
14	5684	156,5	1528	20	2936	20,5	3942	19,5	4697	18,5	5284	17	5753	15,5	6137	14,5
16	5997	153	1488	20	2895	20	3903	19	4660	18	5250	17	5722	16	6108	15
18	6303	149,5	1448	20	2855	20,5	3865	19,5	4624	18	5216	17	5690	16	6078	14,5
4.20	6602	— 146,5	1408	— 19,5	2814	— 20	3826	— 19,5	4588	— 18,5	5182	— 17	5658	— 16	6049	— 15
22	6895	142,5	1369	19,5	2774	20	3787	19	4551	18	5148	17	5626	15,5	6019	15
24	7180	139,5	1330	19	2734	19,5	3749	19	4515	18	5114	17	5595	16	5989	15
26	7459	135,5	1292	19	2695	20	3711	19	4479	18	5080	17	5563	16	5959	15
28	7730	132,5	1254	19	2655	19,5	3673	19	4443	18	5046	17	5531	16	5929	14,5
4.30	7995	— 129	1216	— 18,5	2616	— 19,5	3635	— 19	4407	— 18	5012	— 16,5	5499	— 15,5	5900	— 15
32	8253	125,5	1179	18,5	2577	19,5	3597	19	4371	18	4979	17	5468	16	5870	15
34	8504	122,5	1142	18,5	2538	19	3559	18,5	4335	17,5	4945	17	5436	16	5840	15
36	8749	118,5	1105	18	2500	19	3522	19	4300	18	4911	16,5	5404	15,5	5810	14,5
38	8986	115,5	1069	18	2462	19	3484	18,5	4264	17,5	4878	17	5373	16	5781	15
4.40	9217	— 112	1033	— 17,5	2424	— 19	3447	— 18,5	4229	— 18	4844	— 17	5341	— 16	5751	— 15
42	9441	108,5	0998	17,5	2386	19	3410	18,5	4193	17,5	4810	16,5	5309	15,5	5721	15
44	9658	105,5	0963	17	2348	18,5	3373	18,5	4158	18	4777	16,5	5278	16	5691	15
46	9869	101,5	0929	17,5	2311	18,5	3336	18,5	4122	17,5	4744	17	5246	15,5	5661	15
48	*0072	98,5	0894	16,5	2274	18,5	3299	18	4087	17,5	4710	16,5	5215	16	5631	14,5
4.50	0269	— 95,5	0861	— 17	2237	— 18	3263	— 18,5	4052	— 17,5	4677	— 17	5183	— 15,5	5602	— 15
52	0460	91,5	0827	16,5	2201	18,5	3226	18	4017	17,5	4643	16,5	5152	16	5572	15
54	0643	88,5	0794	16	2164	18	3190	18	3982	17,5	4610	16,5	5120	15,5	5542	15
56	0820	85,5	0762	16	2128	18	3154	18	3947	17,5	4577	16,5	5089	16	5512	14,5
58	0991	81,5	0730	16	2092	17,5	3118	18	3912	17	4544	16,5	5057	15,5	5483	15
4.60	1154	— 79	06979	— 156,5	2057	— 18	3082	— 17,5	3878	— 17,5	4511	— 16,5	5026	— 15,5	5453	— 15
62	1312	75	06666	155	2021	17,5	3047	18	3843	17	4478	16,5	4995	16	5423	14,5
64	1462	72,5	06356	152,5	1986	17	3011	17,5	3809	17	4445	16,5	4963	15,5	5394	15
66	1607	68,5	06051	150,5	1952	17,5	2976	17,5	3775	17,5	4412	16,5	4932	15,5	5364	15
68	1744	66	05750	148,5	1917	17	2941	17,5	3740	17	4379	16	4901	15,5	5334	14,5
4.70	1876	— 62,5	05453	— 146,5	1883	— 17	2906	— 17,5	3706	— 17	4347	— 16,5	4870	— 15,5	5305	— 15
72	2001	59	05160	144,5	1849	17	2871	17	3672	17	4314	16,5	4839	16	5275	14,5
74	2119	56,5	04871	142	1815	16,5	2837	17,5	3638	16,5	4281	16	4807	15,5	5246	15
76	2232	53	04587	140,5	1782	17	2802	17	3605	17	4249	16,5	4776	15,5	5216	15
78	2338	49,5	04306	138	1748	16,5	2768	17	3571	17	4216	16	4745	15,5	5186	14,5
4.80	2437	— 47	04030	— 136,5	1715	— 16	2734	— 17	3537	— 16,5	4184	— 16	4714	— 15	5157	— 15
82	2531	44	03757	134	1683	16,5	2700	17	3504	16,5	4152	16	4684	15,5	5127	14,5
84	2619	40,5	03489	132	1650	16	2666	16,5	3471	16,5	4120	16,5	4653	15,5	5098	14,5
86	2700	37,5	03225	130	1618	16	2633	16,5	3438	16,5	4087	16	4622	15,5	5069	15
88	2775	35	02965	128	1586	15,5	2600	16,5	3405	16,5	4055	16	4591	15,5	5039	14,5
4.90	2845	— 31,5	02709	— 126	1555	— 16	2567	— 16,5	3372	— 16,5	4023	— 16	4560	— 15	5010	— 15
92	2908	29	02457	124	1523	15,5	2534	16,5	3339	16,5	3991	15,5	4530	15,5	4980	14,5
94	2966	25,5	02209	122	1492	15	2501	16,5	3306	16	3960	16	4499	15	4951	14,5
96	3017	23	01965	119,5	1462	15,5	2468	16	3274	16,5	3928	16	4469	15,5	4922	14,5
98	3063	20	01726	118	1431	15	2436	16	3241	16	3896	15,5	4438	15	4893	15
5.00	3103		01490		1401		2404		3209		3865		4408		4863	
	— 0,1		+ 0,		+ 0,		+ 0,		+0,		+ 0,		+ 0,		+ 0,	

Продолжение табл. 42

x	$\Lambda_1(x)$	$\Lambda_2(x)$	$\Lambda_3(x)$	$\Lambda_4(x)$	$\Lambda_5(x)$	$\Lambda_6(x)$	$\Lambda_7(x)$	$\Lambda_8(x)$
	− 0,1	+ 0,0	+ 0,1	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,
5,00	3103 − 17,5	1490 − 115,5	4010 − 150	2404 − 16	3209 − 16	3865 − 16	4408 − 15,5	4863 − 14,5
02	3138 14	1259 114	3710 148	2372 16	3177 16	3833 15,5	4377 15	4834 14,5
04	3166 12	1031 111,5	3414 146,5	2340 16	3145 16	3802 15,5	4347 15	4805 14,5
06	3190 8,5	0808 109,5	3121 145,5	2308 15,5	3113 16	3771 15,5	4317 15	4776 14,5
08	3207 6	0589 108	2830 144	2277 15,5	3081 15,5	3740 15,5	4287 15,5	4747 14,5
5,10	3219 − 3,5	0373 − 105,5	2542 − 142	2246 − 15,5	3050 − 16	3709 − 15,5	4256 − 15	4718 − 14,5
12	3226 − 1	0162 103,5	2258 141,5	2215 15,5	3018 15,5	3678 15,5	4226 15	4689 14,5
14	3228 − 2	*0045 101,5	1975 139,5	2184 15,5	2987 15,5	3647 15,5	4196 15	4660 14,5
16	3224 4,5	0248 99,5	1696 138	2153 15	2956 15,5	3616 15,5	4166 14,5	4631 14
18	3215 7	0447 98	1420 137	2123 15	2925 15,5	3585 15	4137 15	4603 14,5
5,20	3201 − 9,5	0643 − 95,5	1146 − 135	2093 − 15	2894 − 15,5	3555 − 15,5	4107 − 15	4574 − 14,5
22	3182 12,5	0834 93,5	0876 134	2063 15	2863 15,5	3524 15	4077 14,5	4545 14,5
24	3157 14,5	1021 91,5	0608 132,5	2033 15	2832 15	3494 15	4048 15	4516 14
26	3128 17	1204 90	0343 131	2003 14,5	2802 15	3464 15	4018 14,5	4488 14,5
28	3094 19,5	1384 87,5	0081 129,5	1974 14,5	2772 15	3434 15	3989 15	4459 14
5,30	3055 − 22	1559 − 86	*9822 − 128	1945 − 14,5	2742 − 15	3404 − 15	3959 − 14,5	4431 − 14,5
32	3011 24	1731 83,5	9566 127	1916 14,5	2712 15	3374 15	3930 14,5	4402 14
34	2963 26,5	1898 82	9312 125	1887 14	2682 15	3344 15	3901 15	4374 14
36	2910 28,5	2062 80	9062 124	1859 14,5	2652 14,5	3314 14,5	3871 14,5	4346 14,5
38	2853 31	2222 78	8814 122	1830 14	2623 15	3285 15	3842 14,5	4317 14
5,40	2791 − 33,5	2378 − 76,5	8570 − 121	1802 − 14	2593 − 14,5	3255 − 14,5	3813 − 14,5	4289 − 14
42	2724 35,5	2531 74	8329 119,5	1774 13,5	2564 14,5	3226 15	3784 14	4261 14
44	2653 37,5	2679 72,5	8089 118	1747 14	2535 14,5	3196 14,5	3756 14,5	4233 14
46	2578 39,5	2824 70,5	7853 117	1719 13,5	2506 14,5	3167 14,5	3727 14,5	4205 14
48	2499 41,5	2965 69	7619 115	1692 13,5	2477 14	3138 14,5	3698 14	4177 14
5,50	2416 − 43,5	3103 − 66,5	7389 − 113,5	16648 − 134	2449 − 14,5	3109 − 14	3670 − 14,5	4149 − 14
52	2329 46	3236 65	7162 112,5	16380 133	2420 14	3081 14,5	3641 14	4121 14
54	2237 47,5	3366 63	6937 111	16114 132	2392 14	3052 14,5	3613 14	4093 13,5
56	2142 49,5	3492 61,5	6715 109,5	15850 131	2364 14	3023 14	3585 14,5	4066 14
58	2043 51,5	3615 59,5	6496 108	15588 130	2336 14	2995 14	3556 14	4038 14
5,60	1940 − 53	3734 − 58	6280 − 106,5	15328 − 128,5	2308 − 13,5	2967 − 14	3528 − 14	4010 − 13,5
62	1834 55	3850 55,5	6067 105	15071 127,5	2281 14	2939 14	3500 14	3983 14
64	1724 56,5	3961 54,5	5857 104	14816 126,5	2253 13,5	2911 14	3472 14	3955 13,5
66	1611 58,5	4070 52,5	5649 102	14563 125,5	2226 13,5	2883 14	3444 13,5	3928 13,5
68	1494 60	4175 50,5	5445 101	14312 124,5	2199 13,5	2855 14	3417 14	3901 14
5,70	1374 − 62	4276 − 49	5243 − 99,5	14063 − 123	2172 − 13,5	2827 − 13,5	3389 − 14	3873 − 13,5
72	1250 63,5	4374 47	5044 98	13817 122,5	2145 13,5	2800 14	3361 13,5	3846 13,5
74	1123 64,5	4468 45,5	4848 97	13572 121	2118 13	2772 13,5	3334 13,5	3819 13,5
76	0994 66,5	4559 44	4654 95	13330 120	2092 13	2745 13,5	3307 14	3792 13,5
78	0861 68	4647 42	4464 94	13090 118,5	2066 13	2718 13,5	3279 13,5	3765 13,5
5,80	0725 + 69,5	4731 − 40,5	4276 − 92,5	12853 − 118	2040 − 13	2691 − 13,5	3252 − 13,5	3738 − 13
82	0586 70,5	4812 39	4091 91	12617 116,5	2014 13	2664 13,5	3225 13,5	3712 13,5
84	0445 72	4890 37,5	3909 89,5	12384 115,5	1988 13	2637 13	3198 13,5	3685 13,5
86	0301 73,5	4965 35,5	3730 88,5	12153 114,5	1962 12,5	2611 13,5	3171 13	3658 13
88	0154 74,5	5036 34	3553 87	11924 113,5	1937 12,5	2584 13	3145 13,5	3632 13,5
5,90	0005 + 76	5104 − 32,5	3379 − 85,5	11697 − 112	1912 − 12,5	2558 − 13	3118 − 13,5	3605 − 13
92	*9853 77	5169 30,5	3208 84,5	11473 111,5	1887 12,5	2532 13,5	3091 13	3579 13
94	9699 78,5	5230 29,5	3039 82,5	11250 110	1862 12,5	2505 12,5	3065 13	3553 13,5
96	9542 79	5289 28	2874 81,5	11030 109	1837 12	2480 13	3039 13	3526 13
98	9384 80,5	5345 26	2711 80,5	10812 107,5	1813 12,5	2454 13	3013 13,5	3500 13
6,00	9223	5397	2550	10597	1788	2428	2986	3474
	0,0	− 0,0	− 0,0	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,

Продолжение табл. 42

x	$\Lambda_1(x)$		$\Lambda_2(x)$		$\Lambda_3(x)$		$\Lambda_4(x)$		$\Lambda_5(x)$		$\Lambda_6(x)$		$\Lambda_7(x)$		$\Lambda_8(x)$	
	— 0,0		— 0,0		+ 0,0		+ 0,1		+ 0,1		+ 0,		+ 0,		+ 0,	
6,00	9223	+ 81,5	5397	— 25	2550	— 78,5	0597	— 107	7881	— 121	2428	— 12,5	2986	— 13	3474	— 13
02	9060	82,5	5447	23	2393	77,5	0383	105,5	7639	120	2403	13	2960	12,5	3448	13
04	8895	83,5	5493	22	2238	76	0172	104,5	7399	119,5	2377	12,5	2935	13	3422	12,5
06	8728	84,5	5537	20	2086	75	*9963	103,5	7160	118	2352	12,5	2909	13	3397	13
08	8559	85	5577	19	1936	73,5	9756	102,5	6924	117,5	2327	12,5	2883	13	3371	13
6,10	8389	+ 86	5615	— 17,5	1789	— 72	9551	— 101	6689	— 116,5	2302	— 12,5	2857	— 12,5	3345	— 12,5
12	8217	87	5650	16	1645	71	9349	100	6456	116	2277	12,5	2832	12,5	3320	13
14	8043	87,5	5682	15	1503	69,5	9149	99,5	6224	114,5	2252	12	2807	13	3294	12,5
16	7868	88,5	5712	13	1364	68,5	8950	98	5995	114	2228	12,5	2781	12,5	3269	12,5
18	7691	89	5738	12	1227	67	8754	96,5	5767	113	2203	12	2756	12,5	3244	13
6,20	7513	+ 89,5	5762	— 11	1093	— 65,5	8561	— 96	5541	— 112	2179	— 12	2731	— 12,5	3218	— 12,5
22	7334	90	5784	9	0962	64,5	8369	94,5	5317	111,5	2155	12	2706	12	3193	12,5
24	7154	91	5802	8	0833	63	8180	94	5094	110,5	2131	12	2682	12,5	3168	12,5
26	6972	91	5818	7	0707	62	7992	92,5	4873	109,5	2107	12	2657	12	3143	12
28	6790	92	5832	5,5	0583	60,5	7807	91,5	4654	108,5	2083	11,5	2633	12,5	3119	12,5
6,30	6606	+ 92,5	5843	— 4	0462	— 59,5	7624	— 90,5	4437	— 107,5	2060	— 11,5	2608	— 12	3094	— 12,5
32	6421	92,5	5851	3	0343	58,5	7443	89	4222	107	2037	12	2584	12	3069	12
34	6236	93	5857	2	0226	57	7265	88,5	4008	106	2013	11,5	2560	12	3045	12,5
36	6050	93,5	5861	— 0,5	0112	55,5	7088	87	3796	105	1990	11,5	2536	12	3020	12
38	5863	93,5	5862	+ 0,5	0001	54,5	6914	86,5	3586	104	1967	11,5	2512	12	2996	12
6,40	5676	+ 94	5861	+ 2	*0108	— 53,5	6741	— 85	3378	— 103,5	1944	— 11	2488	— 12	2972	— 12
42	5488	94	5857	2,5	0215	52	6571	84	3171	102	1922	11,5	2464	12	2948	12,5
44	5300	94	5852	4	0319	51	6403	83	2967	101,5	1899	11	2440	11,5	2923	11,5
46	5112	94,5	5844	5,5	0421	50	6237	82	2764	100,5	1877	11	2417	11,5	2900	12
48	4923	94,5	5833	6	0521	48,5	6073	80,5	2563	100	1855	11,5	2394	12	2876	12
6,50	4734	+ 95	5821	+ 7	0618	— 47,5	5912	— 80	2363	— 98,5	1832	— 10,5	2370	— 11,5	2852	— 12
52	4544	94,5	5807	8,5	0713	46	5752	79	2166	98	1811	11	2347	11,5	2828	11,5
54	4355	94,5	5790	9	0805	45,5	5594	77,5	1970	97	1789	11	2324	11,5	2805	12
56	4166	95	5772	10,5	0896	44	5439	77	1776	96,5	1767	10,5	2301	11	2781	11,5
58	3976	94,5	5751	11,5	0984	43	5285	75,5	1583	95	1746	11	2279	11,5	2758	11,5
6,60	3787	+ 94,5	5728	+ 12	1070	— 41,5	5134	— 75	1393	— 94,5	17242	— 106	2256	— 11	2735	— 12
62	3598	94	5704	13	1153	41	4984	73,5	1204	93,5	17030	105	2234	11,5	2711	11,5
64	3410	94,5	5678	14,5	1235	39,5	4837	72,5	1017	92,5	16820	104,5	2211	11	2688	11,5
66	3221	94	5649	15	1314	38,5	4692	71,5	0832	92	16611	104	2189	11	2665	11
68	3033	93,5	5619	16	1391	37,5	4549	71	0648	91	16403	103	2167	11	2643	11,5
6,70	2846	+ 93,5	5587	+ 16,5	1466	— 36	4407	— 69,5	0466	— 90	16197	— 102	2145	— 11	2620	— 11,5
72	2659	93	5554	17,5	1538	35,5	4268	68,5	0286	89	15993	101,5	2123	11	2597	11
74	2473	93	5519	18,5	1609	34,5	4131	67,5	0108	88	15790	101	2101	10,5	2575	11,5
76	2287	92,5	5482	19,5	1678	33	3996	67	*9932	87,5	15588	100	2080	11	2552	11
78	2102	92	5443	20	1744	32,5	3862	65,5	9757	86,5	15388	99,5	2058	10,5	2530	11
6,80	1918	+ 91,5	5403	+ 21	1809	— 31	3731	— 64,5	9584	— 85,5	15189	— 98,5	2037	— 11	2508	— 11
82	1735	91	5361	21,5	1871	30	3602	64	9413	85	14992	97,5	2015	10,5	2486	11
84	1553	91	5318	22,5	1931	29,5	3474	62,5	9243	84	14797	97	1994	10,5	2464	11
86	1371	90	5273	23	1990	28	3349	62	9075	83	14603	96,5	1973	10,5	2442	11
88	1191	89,5	5227	24	2046	27,5	3225	60,5	8909	82	14410	95,5	1952	10	2420	11
6,90	1012	+ 89	5179	+ 24,5	2101	— 26	3104	— 60	8745	— 81,5	14219	— 95	1932	— 10,5	2398	— 10,5
92	0834	88,5	5130	25	2153	25,5	2984	59	8582	80,5	14029	94	1911	10	2377	11
94	0657	88	5080	26	2204	24,5	2866	58	8421	79,5	13841	93,5	1891	10,5	2355	10,5
96	04	87	5028	26,5	2253	23,5	2750	57	8262	79	13654	92,5	1870	10	2334	10,5
98	0307	86,5	4975	27	2300	22,5	2636	56	8104	77,5	13469	92	1850	10	2313	11
7,00	0134		4921		2345		2524		7949		13285		1830		2291	
	— 0,0		— 0,0		— 0,0		+ 0,0		+ 0,0		+ 0,		+ 0,		+ 0,	

Продолжение табл. 42

x	$\Lambda_1(x)$		$\Lambda_2(x)$		$\Lambda_3(x)$		$\Lambda_4(x)$		$\Lambda_5(x)$		$\Lambda_6(x)$		$\Lambda_7(x)$		$\Lambda_8(x)$	
	− 0,0		− 0,0		− 0,0		+ 0,0		+ 0,0		+ 0,1		+ 0,1		+ 0,	
7,00	0134	+ 86	4921	+ 27,5	2345	− 21,5	2524	− 55,5	7949	− 77,5	3285	− 91	830	− 10	2291	− 10,5
02	*0038	85	4866	28,5	2388	21	2413	54	7794	76	3103	90,5	810	10	2270	10,5
04	0208	84	4809	28,5	2430	19,5	2305	53,5	7642	75,5	2922	89,5	790	10	2249	10
06	0376	83,5	4752	29,5	2469	19	2198	52,5	7491	74,5	2743	89	770	9,5	2229	10,5
08	0543	83	4693	30	2507	18	2093	51,5	7342	73,5	2565	88	751	10	2208	10,5
7,10	0709	+ 81,5	4633	+ 30	2543	− 17,5	1990	− 50,5	7195	− 73	2389	− 87,5	7311	− 96,5	2187	− 10
12	0872	81	4573	31	2578	16,5	1889	50	7049	72	2214	86,5	7118	96	2167	10,5
14	1034	80	4511	31	2611	15,5	1789	48,5	6905	71,5	2041	86	6926	95,5	2146	10
16	1194	79,5	4449	32	2642	14,5	1692	48	6762	70	1869	85,5	6735	95	2126	10
18	1353	78	4385	32	2671	14	1596	47	6622	70	1698	84	6545	94	2106	10
7,20	1509	+ 77,5	4321	+ 33	2699	− 13	1502	− 46,5	6482	− 68,5	1530	− 84	6357	− 93,5	2086	− 10
22	1664	76	4255	32,5	2725	12,5	1409	45,5	6345	68	1362	83	6170	93	2066	10
24	1816	75,5	4190	33,5	2750	11,5	1318	44,5	6209	67	1196	82,5	5984	92,5	2046	10
26	1967	74,5	4123	34	2773	10,5	1229	43,5	6075	66,5	1031	81,5	5799	91,5	2026	9,5
28	2116	73	4055	34	2794	10,5	1142	43	5942	65,5	0868	80,5	5616	91	2007	10
7,30	2262	+ 72,5	3987	+ 34,5	2815	− 9	1056	− 42	5811	− 65	0707	− 80,5	5434	− 90,5	1987	− 9,5
32	2407	71	3918	34,5	2833	8,5	0972	41	5681	63,5	0546	79	5253	89,5	1968	9,5
34	2549	70	3849	35	2850	8	0890	40,5	5554	63,5	0388	79	5074	89	1949	10
36	2689	69	3779	35,5	2866	7	0809	39,5	5427	62	0230	78	4896	88,5	1929	9,5
38	2827	68	3708	35,5	2880	6,5	0730	38,5	5303	62	0074	77	4719	88	1910	9,5
7,40	2963	+ 66,5	3637	+ 35,5	2893	− 5,5	0653	− 38	5179	− 60,5	*9920	− 76,5	4543	− 87	1891	− 9,5
42	3096	65,5	3566	36	2904	5	0577	37	5058	60	9767	76	4369	86,5	1872	9
44	3227	64,5	3494	36,5	2914	4,5	0503	36,5	4938	59,5	9615	75	4196	86	1854	9,5
46	3356	63,5	3421	36,5	2923	3,5	0430	35,5	4819	58,5	9465	74,5	4024	85	1835	9
48	3483	62	3348	36,5	2930	3	0359	35	4702	57,5	9316	73,5	3854	84,5	1817	9,5
7,50	3607	+ 60,5	3275	+ 37	2936	− 2,5	0289	− 34	4587	− 57	9169	− 73	3685	− 84	17982	− 91,5
52	3728	59,5	3201	36,5	2941	1,5	0221	33	4473	56	9023	72	3517	83,5	17799	91
54	3847	58,5	3128	37,5	2944	1,5	0155	32,5	4361	55,5	8879	72	3350	83	17617	90
56	3964	57	3053	37	2947	− 0,5	0090	32	4250	54,5	8735	70,5	3184	82	17437	90
58	4078	56	2979	37,5	2948	0	0026	31	4141	54	8594	70,5	3020	81,5	17257	89
7,60	4190	+ 54,5	2904	+ 37	2948	+ 0,5	*0036	− 30,5	4033	− 53	8453	− 69	2857	− 80,5	17079	− 88,5
62	4299	53	2830	37,5	2947	1,5	0097	29,5	3927	52,5	8315	69	2696	80,5	16902	88
64	4405	52	2755	37,5	2944	1,5	0156	28,5	3822	52	8177	68	2535	79,5	16726	87,5
66	4509	51	2680	37,5	2941	2,5	0213	28,5	3718	51	8041	67,5	2376	78,5	16551	87
68	4611	49	2605	38	2936	3	0270	27	3616	50	7906	66,5	2219	78,5	16377	86,5
7,70	4709	+ 48	2529	+ 37,5	2930	+ 3,5	0324	− 27	3516	− 49,5	7773	− 66	2062	− 77,5	16204	− 85,5
72	4805	47	2454	37,5	2923	3,5	0378	26	3417	49	7641	65,5	1907	77,5	16033	85,5
74	4899	45,5	2379	37,5	2916	4,5	0430	25,5	3319	48	7510	64,5	1752	76	15862	84,5
76	4990	44	2304	37,5	2907	5	0481	24,5	3223	47,5	7381	64	1600	76	15693	84
78	5078	42,5	2229	37,5	2897	5,5	0530	24	3128	46,5	7253	63,5	1448	75	15525	83,5
7,80	5163	+ 41,5	2154	+ 37,5	2886	+ 6	0578	− 23,5	3035	− 46	7126	− 62	1298	− 74,5	15358	− 83
82	5246	40	2079	37,5	2874	6	0625	22,5	2943	45	7002	62,5	1149	74	15192	82,5
84	5326	38,5	2004	37,5	2862	7	0670	22	2853	45	6877	61	1001	73,5	15027	82
86	5403	37	1929	37,5	2848	7	0714	21,5	2763	43,5	6755	60,5	0854	72,5	14863	81,5
88	5477	36	1854	37	2834	8	0757	21	2676	43,5	6634	60	0709	72,5	14700	80,5
7,90	5549	+ 34,5	1780	+ 37	2818	+ 8	0799	− 20	2589	− 42,5	6514	− 59,5	0564	− 71,5	14539	− 80,5
92	5618	33	1706	37	2802	8,5	0839	19,5	2504	42	6395	58,5	0421	70,5	14378	79,5
94	5684	31,5	1632	36,5	2785	9	0878	19	2420	41	6278	58	0280	70,5	14219	79
96	5747	30,5	1559	37	2767	9	0916	18	2338	40,5	6162	57,5	0139	69,5	14061	78,5
98	5808	29	1485	36,5	2749	10	0952	18	2257	40	6047	56,5	0000	69	13904	78
8,00	5866		1412		2729		0988		2177		5934		*9862		13748	
	+ 0,0		− 0,0		− 0,0		− 0,0		+ 0,0		+ 0,0		+ 0,0		+ 0,	

Продолжение табл. 42

x	$\Lambda_1(x)$		$\Lambda_2(x)$		$\Lambda_3(x)$		$\Lambda_4(x)$		$\Lambda_5(x)$		$\Lambda_6(x)$		$\Lambda_7(x)$		$\Lambda_8(x)$	
	+ 0,0		− 0,0		− 0,0		− 0,0		+ 0,0		+ 0,0		+ 0,0		+ 0,1	
8,00	5866	+ 27,5	1412	+ 36	2729	+ 10	0988	− 17	2177	− 39	5934	− 56	9862	− 68 5	3748	− 77,5
02	5921	26	1340	36	2709	10,5	1022	16 5	2099	39	5822	55 5	9725	68	3593	77
04	5973	25	1268	36	2688	10,5	1055	16	2021	37 5	5711	54 5	9589	67	3439	76,5
06	6023	23,5	1196	36	2667	11	1087	15,5	1946	37 5	5602	54 5	9455	66,5	3286	75,5
08	6070	22	1124	35 5	2645	11,5	1118	14,5	1871	36 5	5493	53 5	9322	66	3135	75 5
8,10	6114	+ 20,5	1053	+ 35	2622	+ 12	1147	− 14,5	1798	− 36 5	5386	− 52 5	9190	− 65,5	2984	− 74 5
12	6155	19,5	0983	35	2598	12	1176	14	1725	35	5281	52 5	9059	65	2835	74
14	6194	17,5	0913	35	2574	12 5	1204	13	1655	35	5176	51 5	8929	64	2687	73 5
16	6229	16,5	0843	34 5	2549	12 5	1230	12 5	1585	34	5073	51	8801	64	2540	73 5
18	6262	15 5	0774	34 5	2524	13	1255	12 5	1517	34	4971	50 5	8673	63	2393	72 5
8,20	6293	+ 13,5	0705	+ 34	2498	+ 13,5	1280	− 11,5	1449	− 32,5	4870	− 49 5	8547	− 62,5	2248	− 71,5
22	6320	12 5	0637	33 5	2471	13:5	1303	11	1384	32 5	4771	49	8422	62	2105	71 5
24	6345	11	0570	33,5	2444	13 5	1325	10 5	1319	32	4673	49	8298	61	1962	71
26	6367	10	0503	33	2417	14	1346	10,5	1255	31	4575	47 5	8176	61	1820	70 5
28	6387	8	0437	33	2389	14,5	1367	9,5	1193	30 5	4480	47 5	8054	60	1679	69 5
8,30	6403	+ 7	0371	+ 32,5	2360	+ 14,5	1386	− 9	1132	− 30,5	4385	− 47	7934	− 59,5	1540	− 69 5
32	6417	6	0306	32	2331	14,5	1404	8,5	1071	29	4291	46	7815	59	1401	68 5
34	6429	4,5	0242	32	2302	15	1421	8,5	1013	29	4199	45 5	7697	58 5	1264	68
36	6438	3	0178	31 5	2272	15	1438	7,5	0955	28,5	4108	45	7580	58	1128	68
38	6444	1,5	0115	31	2242	15,5	1453	7,5	0898	28	4018	44 5	7464	57	0992	67
8,40	6447	+ 0 5	0053	+ 30 5	2211	+ 15 5	1468	− 7	0842	− 27	3929	− 43 5	7350	− 57	0858	− 66,5
42	6448	− 0 5	*0008	30 5	2180	15 5	1482	6 5	0788	26 5	3842	43 5	7236	56	0725	66
44	6447	2 5	0069	30	2149	16	1495	5,5	0735	26 5	3755	42,5	7124	55 5	0593	65 5
46	6442	3	0129	30	2117	16	1506	6	0682	25 5	3670	42	7013	55	0462	65
48	6436	5	0189	29	2085	16	1518	5	0631	25	3586	41,5	6903	54,5	0332	64 5
8,50	6426	− 5 5	0247	+ 29	2053	+ 16,5	1528	− 4,5	0581	− 24 5	3503	− 41	6794	− 54	0203	− 64
52	6415	7,5	0305	28 5	2020	16,5	1537	4 5	0532	24	3421	40,5	6686	53 5	0075	63
54	6400	8	0362	28	1987	16,5	1546	4	0484	23,5	3340	40	6579	53	*9949	63
56	6384	9,5	0418	27,5	1954	16,5	1554	3,5	0437	23	3260	39	6473	52	9823	62,5
58	6365	11	0473	27,5	1921	17	1561	3	0391	22,5	3182	39	6369	52	9698	62
8,60	6343	− 12	0528	+ 27	1887	+ 17	1567	− 3	0346	− 22	3104	− 38	6265	− 51	9574	− 61
62	6319	13	0582	26	1853	17	1573	2 5	0302	21 5	3028	38	6163	50,5	9452	61
64	6293	14,5	0634	26	1819	17	1578	2	0259	21	2952	37	6062	50 5	9330	60
66	6264	15	0686	25,5	1785	17	1582	1 5	0217	20 5	2878	36,5	5961	49,5	9210	60
68	6234	17	0737	25,5	1751	17,5	1585	1,5	0176	20	2805	36	5862	49	9090	59
8,70	6200	− 17,5	0788	+ 24 5	1716	+ 17	1588	− 1	0136	− 20	2733	− 36	5764	− 48,5	8972	− 59
72	6165	19	0837	24	1682	17,5	1590	0 5	0096	19	2661	35	5667	48	8854	58
74	6127	19,5	0885	24	1647	17,5	1591	− 0,5	0058	18,5	2591	34 5	5571	47,5	8738	58
76	6088	21	0933	23,5	1612	17 5	1592	0	0021	18	2522	34	5476	47	8622	57
78	6046	22	0980	22,5	1577	17,5	1592	+ 0 5	*0015	18	2454	33,5	5382	46,5	8508	57
8,80	6002	− 23	1025	+ 22 5	1542	+ 17 5	1591	+ 0 5	0051	− 17	2387	− 33	5289	− 45,5	8394	− 56
82	5956	24 5	1070	22	1507	17 5	1590	1	0085	17	2321	32,5	5198	45,5	8282	55,5
84	5907	25	1114	21,5	1472	17,5	1588	1	0119	16,5	2256	32	5107	45	8171	55,5
86	5857	26	1157	21	1437	17,5	1586	1 5	0152	16	2192	31,5	5017	44,5	8060	54,5
88	5805	27	1199	20,5	1402	17,5	1583	1 5	0184	15,5	2129	31	4928	43,5	7951	54,5
8,90	5751	− 28,5	1240	+ 20	1367	+ 17,5	1580	+ 2 5	0215	− 15	2067	− 30,6	4841	− 43,5	7842	− 53,5
92	5694	29	1280	19,5	1332	18	1575	2	0245	15	2006	30	4754	43	7735	53
94	5636	29,5	1319	19	1296	17,5	1571	2,5	0275	14	1946	29,5	4668	42,5	7629	53
96	5577	31	1357	18,5	1261	17,5	1566	3	0303	14	1887	29	4583	41,5	7523	52
98	5515	32	1394	18,5	1226	17,5	1560	3	0331	13,5	1829	28,5	4500	41,5	7419	52
9,00	5451		1431		1191		1554		0358		1772		4417		7315	
	+ 0,0		+ 0,0		− 0,0		− 0,0		− 0,0		+ 0,0		+ 0,0		+ 0,0	

Продолжение табл. 42

x	$\Lambda_1(x)$	$\Lambda_2(x)$	$\Lambda_3(x)$	$\Lambda_4(x)$	$\Lambda_5(x)$	$\Lambda_6(x)$	$\Lambda_7(x)$	$\Lambda_8(x)$
	+ 0,0	+ 0,0	− 0,0	− 0,0	− 0,0	+ 0,0	+ 0,0	+ 0,0
9,00	5451 − 32,5	1431 + 17,5	1191 + 17,5	1554 + 3,5	0358 − 13	1772 − 28,5	4417 − 41	7315 − 51,5
02	5386 33,5	1466 17	1156 17	1547 3,5	0384 12,5	1715 27,5	4335 40,5	7212 50,5
04	5319 34	1500 16,5	1122 17,5	1540 4	0409 12,5	1660 27,5	4254 40	7111 50,5
06	5251 35,5	1533 16,5	1087 17,5	1532 4	0434 12	1605 26,5	4174 39,5	7010 49,5
08	5180 36	1566 15,5	1052 17	1524 4	0458 11,5	1552 26,5	4095 39	6911 49,5
9,10	5108 − 36,5	1597 + 15,5	1018 + 17,5	1516 + 4,5	0481 − 11	1499 − 26	4017 − 38,5	6812 − 49
12	5035 37,5	1628 14,5	0983 17	1507 5	0503 11	1447 25,5	3940 38	6714 48,5
14	4960 38,5	1657 14	0949 17	1497 5	0525 10,5	1396 25	3864 37,5	6617 48
16	4883 38,5	1685 14	0915 17	1487 5	0546 10	1346 24,5	3789 37	6521 47,5
18	4806 40	1713 13	0881 17	1477 5	0566 10	1297 24	3715 36,5	6426 47
9,20	4726 − 40	1739 + 13	0847 + 17	1467 + 5,5	0586 − 9,5	1249 − 23,5	3642 − 36,5	6332 − 46,5
22	4646 41	1765 12	0813 16,5	1456 6	0605 9	1202 23,5	3569 35,5	6239 46
24	4564 42	1789 12	0780 16,5	1444 5,5	0623 8,5	1155 23	3498 35,5	6147 45,5
26	4480 42	1813 11	0747 16,5	1433 6	0640 8,5	1109 22,5	3427 34,5	6056 45,5
28	4396 43	1835 11	0714 16,5	1421 6,5	0657 8	1064 22	3358 34,5	5965 44,5
9,30	4310 − 43,5	1857 + 10,5	0681 + 16,5	1408 + 6	0673 − 8	1020 − 21,5	3289 − 34	5876 − 44,5
32	4223 44	1878 9,5	0648 16	1396 6,5	0689 7	0977 21,5	3221 33,5	5787 43,5
34	4135 44,5	1897 9,5	0616 16	1383 7	0703 7,5	0934 20,5	3154 33	5700 43,5
36	4046 45	1916 9	0584 16	1369 6,5	0718 6,5	0893 20,5	3088 32,5	5613 43
38	3956 45,5	1934 8	0552 16	1356 7	0731 6,5	0852 20	3023 32,5	5527 42,5
9,40	3865 − 46,5	1950 + 8	0520 + 15,5	1342 + 7	0744 − 6,5	0812 − 20	2958 − 31,5	5442 − 42
42	3772 46,5	1966 7,5	0489 16	1328 7,5	0757 5,5	0772 19	2895 31,5	5358 41,5
44	3679 47	1981 7	0457 15	1313 7	0768 6	0734 19	2832 31	5275 41,5
46	3585 47	1995 6,5	0427 15,5	1299 7,5	0780 5	0696 18,5	2770 30,5	5192 40,5
48	3491 48	2008 6	0396 15	1284 7,5	0790 5,5	0659 18	2709 30	5111 40,5
9,50	3395 − 48	2020 + 5,5	0366 + 15	1269 + 7,5	0801 − 4,5	0623 − 18	2649 − 29,5	5030 − 40
52	3299 48,5	2031 5	0336 15	1254 8	0810 4,5	0587 17,5	2590 29,5	4950 39,5
54	3202 49	2041 5	0306 14,5	1238 8	0819 4	0552 17	2531 28,5	4871 39
56	3104 49	2051 4	0277 14,5	1222 8	0827 4,5	0518 16,5	2474 28,5	4793 38,5
58	3006 49,5	2059 3,5	0248 14,5	1206 8	0836 3,5	0485 16,5	2417 28	4716 38
9,60	2907 − 50	2066 + 3,5	0219 + 14,5	1190 + 8	0843 − 3,5	0452 − 16	2361 − 28	4640 − 38
62	2807 50	2073 3	0190 14	1174 8	0850 3,5	0420 16	2305 27	4564 37,5
64	2707 50	2079 2	0162 13,5	1158 8,5	0857 3	0388 15	2251 27	4489 36,5
66	2607 50,5	2083 2	0135 14	1141 8,5	0863 2,5	0358 15	2197 26,5	4416 36,5
68	2506 50,5	2087 1,5	0107 13,5	1124 8,5	0868 2,5	0328 14,5	2144 26	4343 36,5
9,70	2405 − 51	2090 + 1	0080 + 13	1107 + 8,5	0873 − 2,5	0299 − 14,5	2092 − 25,5	4270 − 35,5
72	2303 50,5	2092 + 1	0054 13,5	1090 8,5	0878 2	0270 14	2041 25,5	4199 35,5
74	2202 51,5	2094 0	0027 13	1073 8,5	0882 2	0242 14	1990 25	4128 35
76	2099 51	2094 0	0001 12,5	1056 8,5	0886 1,5	0214 13	1940 24,5	4058 34,5
78	1997 51	2094 − 0,5	*0024 13,5	1039 9	0889 1,5	0188 13	1891 24	3989 34
9,80	1895 − 51,5	2093 − 1	0049 + 12,5	1021 + 8,5	0892 − 1	0162 − 13	1843 − 24	3921 − 33,5
82	1792 51,5	2091 1,5	0074 12,5	1004 9	0894 1	0136 12,5	1795 23,5	3854 33,5
84	1689 51	2088 2	0099 12	0986 9	0896 1	0111 12	1748 23	3787 33
86	1587 51,5	2084 2	0123 11,5	0968 8,5	0898 0,5	0087 12	1702 23	3721 32,5
88	1484 51,5	2080 2,5	0146 12	0951 9	0899 0,5	0063 11,5	1656 22	3656 32,5
9,90	1381 − 51	2075 − 3	0170 + 11,5	0933 + 9	0900 0	0040 − 11	1612 − 22	3591 − 31,5
92	1279 51,5	2069 3,5	0193 11	0915 9	0900 − 0,5	0018 11	1568 22	3528 31,5
94	1176 51	2062 4	0215 11	0897 9	0901 + 0,5	*0004 11	1524 21,5	3465 31
96	1074 51,5	2054 4	0237 11	0879 9	0900 0	0026 10	1481 21	3403 31
98	0971 51	2046 4,5	0259 10,5	0861 9	0900 0,5	0046 10,5	1439 20,5	3341 30
10,00	0869	2037	0280	0843	0899	0067	1398	3281
	+ 0,0	+ 0,0	+ 0,0	− 0,0	− 0,0	− 0,0	+ 0,0	+ 0,0

Таблица 43. **Функции Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$**

x	$J_0(x)$		$J_1(x)$		x	$J_0(x)$		$J_1(x)$		x	$J_0(x)$		$J_1(x)$	
	+ 1,		+ 0,			+ 0,		+ 0,			+ 0,		+ 0,	
0,00	0000	— 0,5	0000	+ 50	1,00	7652	— 44,5	4401	+ 32	2,00	2239	— 57,5	5767	— 6 5
02	*9999	1,5	0100	50	02	7563	45	4465	31,5	02	2124	57,5	5754	8
04	9996	2,5	0200	50	04	7473	45,5	4528	31	04	2009	57,5	5738	8,5
06	9991	3,5	0300	50	06	7382	46	4590	30	06	1894	57	5721	9
08	9984	4,5	0400	49,5	08	7290	47	4650	29,5	08	1780	57	5703	10
0,10	9975	— 5,5	0499	+ 50	1,10	7196	— 47,5	4709	+ 29	2,10	1666	— 56,5	5683	— 11
12	9964	6,5	0599	49,5	12	7101	47 5	4767	28	12	1553	56,5	5661	11,5
14	9951	7,5	0698	49,5	14	7006	48,5	4823	27,5	14	1440	56,5	5638	12
16	9936	8,5	0797	49,5	16	6909	49,5	4878	26,5	16	1327	56	5614	13,5
18	9919	9,5	0896	49,5	18	6810	49,5	4931	26	18	1215	55,5	5587	13,5
0,20	9900	— 10,5	0995	+ 49	1,20	6711	— 50	4983	+ 25	2,20	1104	— 55,5	5560	— 15
22	9879	11	1093	49	22	6611	50,5	5033	24,5	22	0993	55,5	5530	15
24	9857	12,5	1191	49	24	6510	51	5082	24	24	0882	54,5	5500	16
26	9832	13,5	1289	48,5	26	6408	51 5	5130	23	26	0773	54,5	5468	17
28	9805	14,5	1386	48,5	28	6305	52	5176	22	28	0664	54,5	5434	17,5
0,30	9776	— 15	1483	+ 48,5	1,30	6201	— 52 5	5220	+ 21,5	2,30	0555	— 53,5	5399	— 18,5
32	9746	16,5	1580	48	32	6096	53	5263	21	32	0448	53,5	5362	19
34	9713	17	1676	47,5	34	5990	53	5305	19,5	34	0341	53	5324	19,5
36	9679	18,5	1771	47,5	36	5884	53,5	5344	19,5	36	0235	52,5	5285	20,5
38	9642	19	1866	47	38	5777	54	5383	18	38	0130	52,5	5244	21
0,40	9604	— 20	1960	+ 47	1,40	5669	— 54,5	5419	+ 18	2,40	0025	— 52	5202	— 22
42	9564	21	2054	46,5	42	5560	55	5455	16,5	42	*0079	51	5158	22,5
44	9522	22	2147	46,5	44	5450	55	5488	16	44	0181	51	5113	23
46	9478	23	2240	46	46	5340	55	5520	15,5	46	0283	50,5	5067	23 5
48	9432	23,5	2332	45,5	48	5230	56	5551	14	48	0384	50	5020	24,5
0,50	9385	— 25	2423	+ 45	1,50	5118	— 56	5579	+ 14	2,50	0484	— 49,5	4971	— 25
52	9335	25,5	2513	45	52	5006	56	5607	12,5	52	0583	49	4921	25,5
54	9284	26,5	2603	44,5	54	4894	56,5	5632	12	54	0681	48,5	4870	26,5
56	9231	27	2692	44	56	4781	56 5	5656	11	56	0778	47,5	4817	27
58	9177	28,5	2780	43,5	58	4668	57	5678	10,5	58	0873	47 5	4763	27 5
0,60	9120	— 29	2867	+ 43	1,60	4554	— 57	5699	+ 9,5	2,60	0968	— 47	4708	— 28
62	9062	30	2953	43	62	4440	57,5	5718	8,5	62	1062	46	4652	28 5
64	9002	31	3039	42,5	64	4325	57,5	5735	8	64	1154	45,5	4595	29,5
66	8940	31,5	3124	41,5	66	4210	57 5	5751	7	66	1245	45,5	4536	29,5
68	8877	32,5	3207	41,5	68	4095	57,5	5765	6,5	68	1336	44	4477	30,5
0,70	8812	— 33 5	3290	+ 41	1,70	3980	— 58	5778	+ 5	2,70	1424	— 44	4416	— 31
72	8745	34	3372	40	72	3864	58	5788	5	72	1512	43,5	4354	31,5
74	8677	35	3452	40	74	3748	58	5798	3,5	74	1599	42,5	4291	31,5
76	8607	35,5	3532	39,5	76	3632	58	5805	3	76	1684	42	4228	32,5
78	8536	36,5	3611	38,5	78	3516	58	5811	2	78	1768	41	4163	33
0,80	8463	— 37,5	3688	+ 38,5	1,80	3400	— 58	5815	+ 1,5	2,80	1850	— 41	4097	— 33,5
82	8388	38	3765	37,5	82	3284	58 5	5818	+ 0,5	82	1932	40	4030	33,5
84	8312	38,5	3840	37,5	84	3167	58	5819	— 0,5	84	2012	39	3963	34,5
86	8235	39,5	3915	36,5	86	3051	58,5	5818	1	86	2090	38,5	3894	34,5
88	8156	40,5	3988	35,5	88	2934	58	5816	2	88	2167	38	3825	35,5
0,90	8075	— 41	4059	+ 35,5	1,90	2818	— 58	5812	— 3	2,90	2243	— 37	3754	— 35,5
92	7993	41,5	4130	35	92	2702	58	5806	3,5	92	2317	36,5	3683	36
94	7910	42,5	4200	34	94	2586	58	5799	4,5	94	2390	36	3611	36,5
96	7825	43	4268	33,5	96	2470	58	5790	5,5	96	2462	35	3538	36 5
98	7739	43,5	4335	33	98	2354	57,5	5779	6	98	2532	34,5	3465	37
1,00	7652		4401		2,00	2239		5767		3,00	2601		3391	
	+ 0,		+ 0,			+ 0,		+ 0,			— 0,		+ 0,	

Продолжение табл. 43

x	$J_0(x)$		$J_1(x)$		x	$J_0(x)$		$J_1(x)$		x	$J_0(x)$		$J_1(x)$	
	−0,		+0,			−0,		−0,			−0,		−0,	
3,00	2601	−33,5	3391	−37,5	4,00	3971	+6,5	0660	−38	5,00	1776	+33	3276	−11
02	2668	32,5	3316	38	02	3958	8	0736	37,5	02	1710	33	3298	10
04	2733	32	3240	38	04	3942	8,5	0811	37,5	04	1644	33	3318	9,5
06	2797	31,5	3164	38,5	06	3925	9	0886	37	06	1578	33,5	3337	9
08	2860	30,5	3087	39	08	3907	10	0960	36,5	08	1511	34	3355	8
3,10	2921	−29,5	3009	−39	4,10	3887	+11	1033	−36	5,10	1443	+33,5	3371	−7,5
12	2980	29	2931	39,5	12	3865	11,5	1105	36	12	1376	34	3386	7
14	3038	28	2852	39,5	14	3842	12	1177	35	14	1308	34	3400	6
16	3094	27,5	2773	39,5	16	3818	12,5	1247	35	16	1240	34,5	3412	5,5
18	3149	26,5	2694	40,5	18	3793	13,5	1317	34,5	18	1171	34	3423	4,5
3,20	3202	−25,5	2613	−40	4,20	3766	+14,5	1386	−34,5	5,20	1103	+34,5	3432	−4
22	3253	25	2533	40,5	22	3737	15	1455	33,5	22	1034	34,5	3440	3,5
24	3303	24	2452	41	24	3707	15,5	1522	33,5	24	0965	34,5	3447	3
26	3351	23,5	2370	40,5	26	3676	16	1589	32,5	26	0896	34,5	3453	2
28	3398	22,5	2289	41	28	3644	17	1654	32,5	28	0827	34,5	3457	1,5
3,30	3443	−21,5	2207	−41,5	4,30	3610	+17,5	1719	−32	5,30	0758	+34,5	3460	−0,5
32	3486	21	2124	41	32	3575	18	1783	31	32	0689	34,5	3461	0
34	3528	20	2042	41,5	34	3539	19	1845	31	34	0620	35	3461	+0,5
36	3568	19	1959	41,5	36	3501	19	1907	30,5	36	0550	34,5	3460	1,5
38	3606	18,5	1876	42	38	3463	20	1968	30	38	0481	34,5	3457	2
3,40	3643	−17,5	1792	−41,5	4,40	3423	+21	2028	−29	5,40	0412	+34,5	3453	+2,5
42	3678	16,5	1709	42	42	3381	21	2086	29	42	0343	34,5	3448	3
44	3711	16	1625	42	44	3339	21,5	2144	28,5	44	0274	34,5	3442	4
46	3743	15	1541	41,5	46	3296	22,5	2201	27,5	46	0205	34	3434	4,5
48	3773	14	1458	42	48	3251	23	2256	27,5	48	0137	34,5	3425	5,5
3,50	3801	−13,5	1374	−42	4,50	3205	+23	2311	−26,5	5,50	0068	+34	3414	+5,5
52	3828	12,5	1290	42	52	3159	24	2364	26	52	0000	34	3403	6,5
54	3853	11,5	1206	42	54	3111	24,5	2416	25,5	54	*0068	33,5	3390	7
56	3876	11	1122	42	56	3062	25	2467	25	56	0135	34	3376	8
58	3898	10	1038	41,5	58	3012	25,5	2517	24,5	58	0203	33,5	3360	8,5
3,60	3918	−9	0955	−42	4,60	2961	+25,5	2566	−23,5	5,60	0270	+33	3343	+9
62	3936	8,5	0871	41,5	62	2910	26,5	2613	23	62	0336	33,5	3325	9,5
64	3953	7	0788	42	64	2857	27	2659	22,5	64	0403	33	3306	10
66	3967	7	0704	41,5	66	2803	27	2704	22	66	0469	32,5	3286	11
68	3981	5,5	0621	41,5	68	2749	28	2748	21,5	68	0534	32,5	3264	11,5
3,70	3992	−5	0538	−41	4,70	2693	+28	2791	−20,5	5,70	0599	+32,5	3241	+11,5
72	4002	4,5	0456	41,5	72	2637	28,5	2832	20	72	0664	32	3218	13
74	4011	3	0373	41	74	2580	29	2872	19,5	74	0728	31,5	3192	13
76	4017	2,5	0291	40,5	76	2522	29	2911	19	76	0791	32	3166	13,5
78	4022	2	0210	41	78	2464	30	2949	18	78	0855	31	3139	14,5
3,80	4026	−0,5	0128	−40,5	4,80	2404	+30	2985	−17,5	5,80	0917	+31	3110	+14,5
82	4027	0	0047	40	82	2344	30,5	3020	17	82	0979	30,5	3081	15,5
84	4027	+0,5	*0033	40,5	84	2283	30,5	3054	16	84	1040	30,5	3050	16
86	4026	1,5	0114	39,5	86	2222	31	3086	15,5	86	1101	30	3018	16,5
88	4023	2,5	0193	39,5	88	2160	31,5	3117	15	88	1161	29,5	2985	17
3,90	4018	+3	0272	−39,5	4,90	2097	+31,5	3147	−14	5,90	1220	+29,5	2951	+17
92	4012	4	0351	39	92	2034	32	3175	13,5	92	1279	29	2917	18
94	4004	4,5	0429	39	94	1970	32	3202	13	94	1337	28,5	2881	18,5
96	3995	5,5	0507	38,5	96	1906	32,5	3228	12,5	96	1394	28,5	2844	19
98	3984	6,5	0584	38	98	1841	32,5	3253	11,5	98	1451	27,5	2806	19,5
4,00	3971		0660		5,00	1776		3276		6,00	1506		2767	
	−0,		−0,			−0,		−0,			+0,		−0,	

Продолжение табл. 43

x	$J_0(x)$		$J_1(x)$		x	$J_0(x)$		$J_1(x)$		x	$J_0(x)$		$J_1(x)$	
	+ 0,		− 0,			+ 0,		− 0,			+ 0,		+ 0,	
6.00	1506	+ 27,5	2767	+ 20	7.00	3001	0	0047	+ 30	8.00	1717	− 24	2346	+ 14
02	1561	27,5	2727	20,5	02	3001	− 0,5	*0013	30	02	1669	23,5	2374	13,5*
04	1616	26,5	2686	20,5	04	3000	1	0073	30	04	1622	24,5	2401	13
06	1669	26	2645	21,5	06	2998	1,5	0133	29,5	06	1573	24,5	2427	12,5
08	1721	26	2602	21,5	08	2995	2	0192	30	08	1524	24,5	2452	12
6.10	1773	+ 25,5	2559	+ 22,5	7.10	2991	− 3	0252	+ 29	8.10	1475	− 25	2476	+ 11,5
12	1824	24,5	2514	22,5	12	2985	3,5	0310	29,5	12	1425	25	2499	11
14	1873	24,5	2469	23	14	2978	4	0369	29,5	14	1375	25	2521	10,5
16	1922	24	2423	23	16	2970	4,5	0428	29	16	1325	25,5	2542	9,5
18	1970	23,5	2377	24	18	2961	5	0486	28,5	18	1274	26	2561	9,5
6.20	2017	+ 23,5	2329	+ 24	7.20	2951	− 6	0543	+ 29	8.20	1222	− 26	2580	+ 9
22	2064	22,5	2281	24,5	22	2939	6	0601	28,5	22	1170	26	2598	8
24	2109	22	2232	25	24	2927	7	0658	28	24	1118	26	2614	8
26	2153	21,5	2182	25	26	2913	7,5	0714	28	26	1066	26,5	2630	7
28	2196	21	2132	25,5	28	2898	8	0770	28	28	1013	26,5	2644	6,5
6.30	2238	+ 20,5	2081	+ 26	7.30	2882	− 8,5	0826	+ 27,5	8.30	0960	− 26,5	2657	+ 6,5
32	2279	20	2029	26	32	2865	9	0881	27	32	0907	27	2670	5,5
34	2319	19,5	1977	26,5	34	2847	9,5	0935	27,5	34	0853	26,5	2681	5
36	2358	19	1924	27	36	2828	10,5	0990	26,5	36	0800	27	2691	4,5
38	2396	18,5	1870	27	38	2807	10,5	1043	26,5	38	0746	27	2700	4
6.40	2433	+ 18	1816	+ 27	7.40	2786	− 11	1096	+ 26,5	8.40	0692	− 27,5	2708	+ 3,5
42	2469	17,5	1762	27,5	42	2764	12	1149	26	42	0637	27	2715	2,5
44	2504	16,5	1707	28	44	2740	12,5	1201	25,5	44	0583	27	2720	2,5
46	2537	16,5	1651	28	46	2715	12,5	1252	25	46	0529	27,5	2725	2
48	2570	15,5	1595	28,5	48	2690	13,5	1302	25	48	0474	27,5	2729	1
6.50	2601	+ 15	1538	+ 28,5	7.50	2663	− 13,5	1352	+ 25	8.50	0419	− 27	2731	+ 1
52	2631	14,5	1481	28,5	52	2636	14,5	1402	24	52	0365	27,5	2733	0
54	2660	14	1424	29	54	2607	14,5	1450	24	54	0310	27,5	2733	− 0,5
56	2688	13,5	1366	29	56	2578	15,5	1498	24	56	0255	27	2732	1
58	2715	12,5	1308	29	58	2547	15,5	1546	23	58	0201	27,5	2730	1
6.60	2740	+ 12,5	1250	+ 29,5	7.60	2516	− 16	1592	+ 23	8.60	0146	− 27	2728	− 2
62	2765	11,5	1191	29,5	62	2484	16,5	1638	22,5	62	0092	27,5	2724	2,5
64	2788	11	1132	29,5	64	2451	17,5	1683	22	64	0037	27	2719	3
66	2810	10,5	1073	30	66	2416	17,5	1727	22	66	*0017	27	2713	4
68	2831	10	1013	30	68	2381	17,5	1771	21	68	0071	27	2705	4
6.70	2851	+ 9	0953	+ 30	7.70	2346	− 18,5	1813	+ 21	8.70	0125	− 27	2697	− 4,5
72	2869	8,5	0893	30	72	2309	19	1855	20,5	72	0179	27	2688	5
74	2886	8	0833	30	74	2271	19	1896	20	74	0233	26,5	2678	6
76	2902	7,5	0773	30	76	2233	19,5	1936	19,5	76	0286	26,5	2666	6
78	2917	7	0713	30,5	78	2194	20	1975	19,5	78	0339	26,5	2654	6,5
6.80	2931	+ 6	0652	+ 30	7.80	2154	− 20,5	2014	+ 18,5	8.80	0392	− 26,5	2641	− 7,5
82	2943	6	0592	30,5	82	2113	20,5	2051	18,5	82	0445	26	2626	7,5
84	2955	5	0531	30,5	84	2072	21	2088	17,5	84	0497	26	2611	8
86	2965	4	0470	30	86	2030	21,5	2123	17,5	86	0549	26	2595	9
88	2973	4	0410	30,5	88	1987	21,5	2158	17	88	0601	26	2577	9
6.90	2981	+ 3	0349	+ 30,5	7.90	1944	− 22,5	2192	+ 16,5	8.90	0653	− 25,5	2559	− 9,5
92	2987	3	0288	30	92	1899	22	2225	16	92	0704	25	2540	10,5
94	2993	2	0228	30,5	94	1855	23	2257	15	94	0754	25	2519	10,5
96	2997	1	0167	30	96	1809	23	2287	15	96	0804	25	2498	11
98	2999	1	0107	30	98	1763	23	2317	14,5	98	0854	24,5	2476	11,5
7.00	3001		0047		8.00	1717		2346		9.00	0903		2453	
	+ 0,		− 0,			+ 0,		+ 0,			− 0,		+ 0,	

Продолжение табл. 43

x	$J_0(x)$		$J_1(x)$		x	$J_0(x)$		$J_1(x)$		x	$J_0(x)$		$J_1(x)$	
	$-0,$		$+0,$			$-0,$		$+0,$			$-0,$		$-0,$	
9 00	0903	−24 5	2453	−12	10 00	2459	− 4 5	0435	−25	11 00	1712	+ 18	1768	−15
02	0952	24	2429	12,5	02	2468	3 5	0385	25 5	02	1676	18	1798	15
04	1000	24	2404	13	04	2475	3	0334	25	04	1640	18 5	1828	14 5
06	1048	24	2378	13	06	2481	2 5	0284	25	06	1603	18,5	1857	14 5
08	1096	23	2352	14	08	2486	2	0234	25	08	1566	19	1886	13 5
9 10	1142	−23 5	2324	−14	10,10	2490	− 1 5	0184	−25	11 10	1528	+ 19 5	1913	−13 5
12	1189	22 5	2296	14 5	12	2493	1 5	0134	25	12	1489	19 5	1940	13
14	1234	22 5	2267	15	14	2496	− 0 5	0084	25	14	1450	19 5	1966	12 5
16	1279	22 5	2237	15 5	16	2497	0	0034	25	16	1411	20 5	1991	12
18	1324	21 5	2206	16	18	2497	+ 0 5	*0016	25	18	1370	20	2015	12
9 20	1367	−22	2174	−16	10 20	2496	+ 1	0066	−25	11,20	1330	+ 20 5	2039	−11
22	1411	21	2142	17	22	2494	1	0116	24 5	22	1289	21	2061	11
24	1453	21	2108	17	24	2492	2	0165	25	24	1247	20 5	2083	10 5
26	1495	20 5	2074	17	26	2488	2 5	0215	24 5	26	1206	21 5	2104	9 5
28	1536	20 5	2040	18	28	2483	3	0264	24 5	28	1163	21	2123	10
9 30	1577	−19 5	2004	−18	10 30	2477	+ 3 5	0313	−24 5	11 30	1121	+ 21 5	2143	− 9
32	1616	19 5	1968	18 5	32	2470	3 5	0362	24 5	32	1078	22	2161	8 5
34	1655	19 5	1931	19	34	2463	4 5	0411	24	34	1034	21 5	2178	8
36	1694	18 5	1893	19	36	2454	5	0459	24	36	0991	22 5	2194	8
38	1731	18 5	1855	19 5	38	2444	5	0507	24	38	0946	22	2210	7 5
9 40	1768	−18	1816	−19 5	10 40	2434	+ 6	0555	−23 5	11 40	0902	+ 22	2225	− 6 5
42	1804	17 5	1777	20	42	2422	6	0602	23 5	42	0858	22 5	2238	6 5
44	1839	17	1737	20 5	44	2410	7	0649	23,5	44	0813	23	2251	6
46	1873	17	1696	20 5	46	2396	7	0696	23	46	0767	22 5	2263	5 5
48	1907	16	1655	21	48	2382	8	0742	23 5	48	0722	22 5	2274	5
9 50	1939	−16	1613	−21 5	10 50	2366	+ 8	0789	−22 5	11 50	0677	+ 23	2284	− 4 5
52	1971	15 5	1570	21 5	52	2350	8 5	0834	22 5	52	0631	23	2293	4
54	2002	15	1527	21 5	54	2333	9	0879	22 5	54	0585	23	2301	3 5
56	2032	14 5	1484	22	56	2315	9 5	0924	22	56	0539	23	2308	3 5
58	2061	14 5	1440	22 5	58	2296	10	0968	22	58	0493	23 5	2315	2 5
9 60	2090	−13 5	1395	−22 5	10 60	2276	+ 10	1012	−22	11 60	0446	+ 23	2320	− 2
62	2117	13 5	1350	22 5	62	2256	11	1056	21 5	62	0400	23 5	2324	2
64	2144	12 5	1305	23	64	2234	11	1099	21	64	0353	23	2328	1 5
66	2169	12 5	1259	23	66	2212	12	1141	21	66	0307	23 5	2331	0 5
68	2194	12	1213	23 5	68	2188	12	1183	20 5	68	0260	23 5	2332	− 0 5
9 70	2218	−11 5	1166	−23 5	10 70	2164	+ 12	1224	−20 5	11 70	0213	+ 23	2333	0
72	2241	11	1119	23 5	72	2140	13	1265	20	72	0167	23 5	2333	+ 0 5
74	2263	10 5	1072	23 5	74	2114	13 5	1305	19 5	74	0120	23 5	2332	1
76	2284	10	1025	24	76	2087	13 5	1344	19 5	76	0073	23	2330	1 5
78	2304	9 5	0977	24 5	78	2060	14	1383	19 5	78	0027	23 5	2327	2
9 80	2323	− 9	0928	−24	10 80	2032	+ 14 5	1422	−18 5	11 80	*0020	+ 23	2323	+ 2 5
82	2341	8 5	0880	24 5	82	2003	14 5	1459	18 5	82	0066	23	2318	3
84	2358	8	0831	24 5	84	1974	15 5	1496	18 5	84	0112	23 5	2312	3
86	2374	7 5	0782	24 5	86	1943	15 5	1533	17 5	86	0159	23	2306	4
88	2389	7	0733	24 5	88	1912	15 5	1568	17 5	88	0205	22 5	2298	4
9 90	2403	− 7	0684	−25	10 90	1881	+ 16 5	1603	−17 5	11 90	0250	+ 23	2290	+ 4,5
92	2417	6	0634	25	92	1848	16 5	1638	16 5	92	0296	23	2281	5,5
94	2429	5 5	0584	24 5	94	1815	17	1671	16 5	94	0342	22 5	2270	5,5
96	2440	5	0535	25	96	1781	17	1704	16	96	0387	22 5	2259	6
98	2450	4 5	0485	25	98	1747	17 5	1736	16	98	0432	22 5	2247	6,5
10 00	2459		0435		11,00	1712		1768		12 00	0477		2234	
	$-0,$		$+0,$			$-0,$		$-0,$			$+0,$		$-0,$	

Продолжение табл 43

x	$J_0(x)$		$J_1(x)$		x	$J_0(x)$		$J_1(x)$		x	$J_0(x)$		$J_1(x)$	
	+0,		−0,			+0,		−0,			+0,		+0,	
12,00	0477	+ 22	2234	+ 6,5	13,20	2167	+ 2,5	0271	+ 22	14,40	1065	− 18,5	1850	+ 9,5
02	0521	22,5	2221	7,5	22	2172	2	0227	22	42	1028	19	1869	8,5
04	0566	22	2206	7,5	24	2176	1,5	0183	22	44	0990	19	1886	8,5
06	0610	21,5	2191	8	26	2179	1,5	0139	21,5	46	0952	19	1903	8
08	0653	22	2175	9	28	2182	0,5	0096	22	48	0914	19,5	1919	7,5
12,10	0697	+ 21,5	2157	+ 8,5	13,30	2183	+ 0,5	0052	+ 22	14,50	0875	− 19	1934	+ 7,5
12	0740	21	2140	9,5	32	2184	− 0,5	0008	22	52	0837	19,5	1949	6,5
14	0782	21	2121	10	34	2183	0,5	*0036	21,5	54	0798	20	1962	6,5
16	0824	21	2101	10	36	2182	1	0079	22	56	0758	19,5	1975	6
18	0866	21	2081	10,5	38	2180	1,5	0123	21,5	58	0719	20	1987	6
12,20	0908	+ 20,5	2060	+ 11	13,40	2177	− 2	0166	+ 21,5	14,60	0679	− 20	1999	+ 5
22	0949	20	2038	11,5	42	2173	2	0209	21,5	62	0639	20,5	2009	5
24	0989	20	2015	11,5	44	2169	3	0252	21,5	64	0598	20	2019	4
26	1029	20	1992	12	46	2163	3	0295	21,5	66	0558	20,5	2027	4
28	1069	19,5	1968	12,5	48	2157	3,5	0338	21	68	0517	20,5	2035	4
12,30	1108	+ 19,5	1943	+ 13	13,50	2150	− 4	0380	+ 21,5	14,70	0476	− 20	2043	+ 3
32	1147	19	1917	13	52	2142	4,5	0423	21	72	0436	21	2049	2,5
34	1185	18,5	1891	14	54	2133	5	0465	21	74	0394	20,5	2054	2,5
36	1222	18,5	1863	13,5	56	2123	5	0507	20,5	76	0353	20,5	2059	2
38	1259	18,5	1836	14,5	58	2113	6	0548	21	78	0312	20,5	2063	1,5
12,40	1296	+ 17,5	1807	+ 14,5	13,60	2101	− 6	0590	+ 20,5	14,80	0271	− 21	2066	+ 1
42	1331	18	1778	15	62	2089	6,5	0631	20	82	0229	20,5	2068	+ 1
44	1367	17	1748	15	64	2076	7	0671	20,5	84	0188	20,5	2070	0
46	1401	17	1718	15,5	66	2062	7	0712	20	86	0147	21	2070	0
48	1435	17	1687	16	68	2048	8	0752	19,5	88	0105	20,5	2070	− 0,5
12,50	1469	+ 16,5	1655	+ 16	13,70	2032	− 8	0791	+ 20	14,90	0064	− 20,5	2069	− 1
52	1502	16	1623	16,5	72	2016	8,5	0831	19,5	92	0023	21	2067	1,5
54	1534	15,5	1590	17	74	1999	9	0870	19	94	*0019	20,5	2064	1,5
56	1565	15,5	1556	17	76	1981	9	0908	19	96	0060	20,5	2061	2,5
58	1596	15	1522	17,5	78	1963	10	0946	19	98	0101	20,5	2056	2,5
12,60	1626	+ 14,5	1487	+ 17,5	13,80	1943	− 10	0984	+ 18,5	15,00	0142	− 20,5	2051	− 3
62	1655	14,5	1452	17,5	82	1923	10	1021	18,5	02	0183	20,5	2045	3,5
64	1684	14	1417	18,5	84	1903	11	1058	18	04	0224	20,5	2038	3,5
66	1712	13,5	1380	18	86	1881	11	1094	18	06	0265	20	2031	4,5
68	1739	13,5	1344	18,5	88	1859	11,5	1130	17,5	08	0305	20,5	2022	4,5
12,70	1766	+ 13	1307	+ 19	13,90	1836	− 12	1165	+ 17,5	15,10	0346	− 20	2013	− 5
72	1792	12,5	1269	19	92	1812	12	1200	17	12	0386	20	2003	5,5
74	1817	12	1231	19,5	94	1788	12,5	1234	17	14	0426	19,5	1992	5,5
76	1841	11,5	1192	19	96	1763	13	1268	16,5	16	0465	20	1981	6
78	1864	11,5	1154	20	98	1737	13	1301	16,5	18	0505	19,5	1969	7
12,80	1887	+ 11	1114	+ 19,5	14,00	1711	− 13,5	1334	+ 16	15,20	0544	− 19,5	1955	− 6,5
82	1909	10,5	1075	20	02	1684	14	1366	15,5	22	0583	19,5	1942	7,5
84	1930	10	1035	20,5	04	1656	14	1397	15,5	24	0622	19	1927	7,5
86	1950	10	0994	20	06	1628	14,5	1428	15	26	0660	19	1912	8
88	1970	9	0954	21	08	1599	14,5	1458	15	28	0698	19	1896	8,5
12,90	1988	+ 9	0912	+ 20,5	14,10	1570	− 15,5	1488	+ 14,5	15,30	0736	− 18,5	1879	− 9
92	2006	8,5	0871	20,5	12	1539	15	1517	14	32	0773	19	1861	9
94	2023	8	0830	21	14	1509	15,5	1545	14	34	0811	18	1843	9,5
96	2039	8	0788	21	16	1478	16	1573	13,5	36	0847	18	1824	10
98	2055	7	0746	21,5	18	1446	16	1600	13	38	0883	18	1804	10
13,00	2069	+ 7	0703	+ 21	14,20	1414	− 16,5	1626	+ 13	15,40	0919	− 18	1784	− 10,5
02	2083	6,5	0661	21,5	22	1381	16,5	1652	12,5	42	0955	17,5	1763	11
04	2096	6	0618	21,5	24	1348	17	1677	12	44	0990	17	1741	11
06	2108	5,5	0575	21,5	26	1314	17	1701	11,5	46	1024	17,5	1719	11,5
08	2119	5	0532	21,5	28	1280	17,5	1724	11,5	48	1059	16,5	1696	12
13,10	2129	+ 4,5	0489	+ 22	14,30	1245	− 17,5	1747	+ 11	15,50	1092		1672	
12	2138	4,5	0445	21,5	32	1210	18	1769	11		−0,		+0,	
14	2147	3,5	0402	22	34	1174	18	1791	10					
16	2154	3,5	0358	22	36	1138	18	1811	10					
18	2161	3	0314	21,5	38	1102	18,5	1831	9,5					
13,20	2167		0271		14,40	1065		1850						
	+0		−0,			+0,		+0,						

Таблица 44. Функции Бесселя $J_{n/2}(x)$

x	$J_{1/2}(x)$	$J_{3/2}(x)$	$J_{5/2}(x)$	$J_{7/2}(x)$	$J_{9/2}(x)$	$J_{11/2}(x)$	$J_{13/2}(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	+ 0,6714	+ 0,2403	+ 0,4950 (— 1)	+ 0,7186 (— 2)	+ 0,8067 (— 3)	+ 0,7385 (— 4)	+ 0,5710 (— 5)
2	+ 0,5130	+ 0,4913	+ 0,2239	+ 0,6852 (—1)	+ 0,1589 (— 1)	+ 0,2973 (— 2)	+ 0,4672 (— 3)
3	+ 0,6501 (— 1)	+ 0,4777	+ 0,4127	+ 0,2101	+ 0,7760 (— 1)	+ 0,2266 (— 1)	+ 0 5493 (— 2)
4	— 0,3019	+ 0,1853	+ 0,4409	+ 0,3658	+ 0,1993	+ 0,8261 (— 1)	+ 0,2787 (— 1)
5	— 0,3422	— 0,1697	+ 0,2404	+ 0,4100	+ 0,3337	+ 0,1906	+ 0,8558 (— 1)
6	— 0,9102 (— 1)	— 0,3279	— 0,7295 (— 1)	+ 0,2671	+ 0,3846	+ 0,3098	+ 0,1833
7	+ 0,1981	— 0,1991	— 0,2834	— 0,3403 (— 2)	+ 0,2800	+ 0,3634	+ 0,2911
8	+ 0,2791	+ 0,7593 (— 1)	— 0,2506	— 0,2326	+ 0,4712 (— 1)	+ 0,2856	+ 0,3456
9	+ 0,1096	+ 0,2545	— 0,2477 (— 1)	— 0,2683	— 0,1839	+ 0,8439 (— 1)	+ 0,2870
10	— 0,1373	+ 0,1980	+ 0,1967	— 0,9965 (— 1)	— 0,2664	— 0,1401	+ 0,1123
11	— 0,2406	— 0,2293 (— 1)	+ 0,2343	+ 0,1294	— 0,1519	— 0,2538	— 0,1018
12	— 0,1236	— 0,2047	+ 0,7242 (— 1)	+ 0,2348	+ 0 6457 (— 1)	— 0,1864	— 0,2356
13	+ 0,9298 (— 1)	— 0,1937	— 0,1377	+ 0,1607	+ 0,2134	+ 0,7055 (— 2)	— 0,2075
14	+ 0,2112	— 0,1407 (— 1)	— 0,2143	— 0,6245 (—1)	+ 0,1830	+ 0,1801	— 0,4151 (— 1)
15	+ 0,1340	+ 0,1654	— 0,1009	— 0,1991	+ 0,7984 (— 2)	+ 0,2039	+ 0,1415
16	— 0,5743 (— 1)	+ 0,1874	+ 0,9257 (— 1)	— 0,1585	— 0,1619	+ 0,6763 (— 1)	+ 0,2083
17	— 0,1860	+ 0,4230 (— 1)	+ 0,1935	+ 0,1461 (— 1)	— 0,1875	— 0,1139	+ 0,1138
18	— 0,1412	— 0,1320	+ 0,1192	+ 0,1651	— 0,5500 (— 1)	— 0,1926	— 0,6273 (— 1)
19	+ 0,2743 (— 1)	— 0,1795	— 0,5578 (— 1)	+ 0,1649	+ 0,1165	— 0,1097	— 0,1800
20	+ 0,1629	— 0,6466 (— 1)	— 0,1726	+ 0,2152 (— 1)	+ 0,1801	+ 0,5953 (— 1)	— 0,1474
21	+ 0 1457	+ 0,1023	— 0,1311	— 0,1335	+ 0,8656 (— 1)	+ 0,1706	+ 0,2808 (— 2)
22	— 0,1506 (— 2)	+ 0,1700	+ 0,2469 (— 1)	— 0,1644	— 0,7701 (— 1)	+ 0,1329	+ 0,1435
23	— 0,1408	+ 0,8253 (— 1)	+ 0,1516	— 0,4958 (— 1)	— 0,1666	— 0,1563 (— 1)	+ 0,1592
24	— 0,1475	— 0,7523 (— 1)	+ 0,1381	+ 0,1040	— 0,1078	— 0,1444	+ 0,4157 (— 1)
25	— 0,2112 (— 1)	— 0,1590	+ 0,2038 (— 2)	+ 0,1594	+ 0,4260 (— 1)	— 0,1461	— 0,1060
26	+ 0,1193	— 0,9664 (— 1)	— 0,1305	+ 0,7155 (— 1)	+ 0,1497	— 0,1972 (— 1)	— 0,1581
27	+ 0,1469	+ 0,5030 (— 1)	— 0,1413	— 0,7646 (— 1)	+ 0,1214	+ 0,1169	— 0,7390 (— 1)
28	+ 0,4085 (— 1)	+ 0,1466	— 0,2514 (— 1)	— 0,1511	— 0,1263 (— 1)	+ 0,1470	+ 0,7040 (— 1)
29	— 0,9833 (— 1)	+ 0,1074	+ 0,1094	— 0,8858 (— 1)	— 0,1308	+ 0,4798 (— 1)	+ 0,1490
30	— 0,1439	— 0,2727 (— 1)	+ 0,1412	+ 0,5080 (— 1)	— 0,1293	— 0,8961 (— 1)	+ 0,9649 (— 1)
31	— 0,5790 (— 1)	— 0,1330	+ 0,4503 (— 1)	+ 0,1402	— 0,1337 (— 1)	— 0,1461	— 0,3776 (— 1)
32	+ 0,7778 (— 1)	— 0,1152	— 0,8858 (— 1)	+ 0,1014	+ 0,1108	— 0,7024 (— 1)	— 0,1349
33	+ 0,1389	+ 0,6053 (— 2)	— 0,1383	— 0,2701 (— 1)	+ 0,1326	+ 0,6318 (— 1)	— 0,1115
34	+ 0,7240 (— 1)	+ 0,1182	— 0,6196 (— 1)	— 0,1274	+ 0,3574 (— 1)	+ 0,1368	+ 0,8521 (— 2)
35	— 0,5775 (— 1)	+ 0,1202	+ 0,6805 (— 1)	— 0,1105	— 0,9015 (— 1)	+ 0,8732 (— 1)	+ 0,1176
36	— 0,1319	+ 0,1335 (— 1)	+ 0,1330	+ 0,5119 (— 2)	— 0,1320	— 0,3812 (— 1)	+ 0,1204
37	— 0,8441 (— 1)	— 0,1027	+ 0,7609 (— 1)	+ 0,1130	— 0,5472 (— 1)	— 0,1263	+ 0,1718 (— 1)
38	+ 0,3836 (— 1)	— 0,1226	— 0,4804 (— 1)	+ 0,1163	+ 0,6946 (— 1)	— 0,9984 (— 1)	— 0,9836 (— 1)
39	+ 0,1231	— 0,3091 (— 1)	— 0,1255	+ 0,1482 (— 1)	+ 0,1252	+ 0,1476 (— 1)	— 0,1240
40	+ 0,9400 (— 1)	+ 0,8649 (— 1)	— 0,8751 (— 1)	— 0,9743 (— 1)	+ 0,7046 (— 1)	+ 0,1133	— 0,3931 (— 1)
41	— 0,1977 (— 1)	+ 0,1225	+ 0,2873 (— 1)	— 0,1190	— 0,4906 (— 1)	+ 0,1083	+ 0,7811 (— 1)
42	— 0,1128	+ 0,4656 (— 1)	+ 0,1162	— 0,3273 (— 1)	— 0,1216	+ 0,6668 (— 2)	+ 0,1234
43	— 0,1012	— 0,6990 (— 1)	+ 0,9632 (— 1)	+ 0,8110 (— 1)	— 0,8313 (— 1)	— 0,9850 (— 1)	+ 0,5793 (— 1)
44	+ 0,2129 (— 2)	— 0,1202	— 0,1033 (— 1)	+ 0,1190	+ 0,2927 (— 1)	— 0,1131	— 0,5753 (— 1)
45	+ 0,1012	— 0,6023 (— 1)	— 0,1052	+ 0,4854 (— 1)	+ 0,1128	— 0,2599 (— 1)	— 0,1191
46	+ 0,1061	+ 0,5315 (— 1)	— 0,1026	— 0,6430 (— 1)	+ 0,9284 (— 1)	— 0,8247 (— 1)	— 0,7312 (— 1
47	+ 0,1438 (— 1)	+ 0,1158	— 0,6991 (— 2)	— 0,1165	— 0,1037 (— 1)	+ 0,1146	+ 0,3718 (— 1
48	— 0,8848 (— 1)	+ 0,7188 (— 1)	+ 0,9297 (— 1)	— 0,6220 (— 1)	— 0,1020	+ 0,4306 (— 1)	+ 0,1119
49	— 0,1087	— 0,3648 (— 1)	+ 0,1065	+ 0,4735 (— 1)	— 0,9972 (— 1)	— 0,6566 (— 1)	+ 0,8497 (— 1)
50	— 0,2961 (— 1)	— 0,1095	+ 0,2304 (— 1)	+ 0,1118	— 0,7388 (— 2)	— 0,1131	— 0,1750 (— 1)

Продолжение табл. 44

x	$J_{-1/2}(x)$	$J_{-3/2}(x)$	$J_{-5/2}(x)$	$J_{-7/2}(x)$	$J_{-9/2}(x)$	$J_{-11/2}(x)$	$J_{-13/2}(x)$
0	+ ∞	− ∞	+ ∞	− ∞	+ ∞	− ∞	+ ∞
1	+ 0,4311	− 1,1025	+ 2,8764	− 13,279	+ 90,080	− 797,44	+ 8681,7
2	− 0 2348	− 0,3956	+ 0,8282	− 1,6749	+ 5,0340	− 20,978	+ 110,35
3	− 0,4560	+ 0,8701 (− 1)	+ 0,3690	− 0,7021	+ 1,2691	− 3,1053	+ 10,117
4	− 0.2608	+ 0.3671	− 0,1457 (− 1)	− 0,3489	+ 0.6251	− 1.0577	+ 2,2834
5	+ 0.1012	+ 0,3219	− 0,2944	− 0,2755 (− 1)	+ 0,3329	− 0,5717	+ 0,9249
6	+ 0,3128	+ 0,3889 (− 1)	− 0,3322	+ 0,2379	+ 0,5460 (− 1)	− 0,3198	+ 0,5318
7	+ 0,2274	− 0,2306	− 0,1285	+ 0,3224	− 0,1939	− 0,7313 (− 1)	+ 0,3088
8	− 0,4104 (− 1)	− 0,2740	+ 0 1438	+ 0,1841	− 0,3049	+ 0,1589	+ 0,8641 (− 1)
9	− 0,2423	− 0,8268 (− 1)	+ 0,2699	− 0,6725 (− 1)	− 0,2176	+ 0,2848	− 0 1306
10	− 0,2117	+ 0,1584	+ 0,1642	− 0,2405	+ 0,4188 (− 2)	+ 0,2368	− 0,2646
11	+ 0 1065 (−2)	+ 0,2405	− 0,6665 (− 1)	− 0,2102	+ 0,2004	+ 0,4622 (− 1)	− 0,2466
12	+ 0 1944	+ 0 1074	− 0,2212	− 0,1522 (− 1)	+ 0,2301	− 0,1573	− 0,8586 (− 1)
13	+ 0 2008	− 0,1084	− 0,1758	+ 0,1760	+ 0,8100 (− 1)	− 0,2321	+ 0,1154
14	+ 0,2916 (− 1)	− 0,2133	+ 0,1655 (− 1)	+ 0,2074	− 0,1203	− 0,1301	+ 0,2225
15	− 0,1565	− 0,1235	+ 0,1812	+ 0 6313 (− 1)	− 0,2107	+ 0,6327 (− 1)	+ 0,1643
16	− 0,1910	+ 0 6937 (− 1)	+ 0,1780	− 0,1250	− 0,1233	+ 0,1944	− 0,1030 (− 1)
17	− 0,5325 (− 1)	+ 0,1892	+ 0,1986 (− 1)	− 0,1950	+ 0,6044 (− 1)	+ 0,1630	− 0,1659
18	+ 0,1242	+ 0 1343	− 0,1466	− 0 9362 (− 1)	+ 0,1830	+ 0,2131 (− 2)	− 0,1843
19	+ 0 1810	− 0,3696 (− 1)	− 0,1751	+ 0,8305 (− 1)	+ 0,3445	− 0,1515	− 0,5682 (− 1)
20	+ 0 7281 (− 1)	− 0 1665	− 0,4783 (− 1)	+ 0,1785	− 0,1464 (− 1)	− 0,1719	+ 0 1092
21	− 0 9537 (− 1)	− 0,1411	+ 0,1155	+ 0 1136	− 0,1534	− 0,4788 (− 1)	+ 0 1785
22	− 0 1701	+ 0,9238 (− 2)	+ 0,1688	− 0,4761 (− 1)	− 0,1537	+ 0,1105	+ 0 9845 (− 1)
23	− 0,8865 (− 1)	+ 0 1446	+ 0,6978 (− 1)	− 0,1598	− 0,2114 (− 1)	+ 0,1681	− 0,5924 (− 1)
24	+ 0,6908 (− 1)	+ 0,1446	− 0,8716 (− 1)	− 0,1265	+ 0,1240	+ 0,7994 (− 1)	− 0,1607
25	+ 0,1582	+ 0,1479 (− 1)	− 0,1599	+ 0,1720 (− 1)	+ 0,1551	− 0,7304 (− 1)	− 0,1230
26	+ 0,1012	− 0,1232	− 0,8701 (− 1)	+ 0,1399	+ 0,4933 (− 1)	− 0,1570	+ 0,1710 (− 1)
27	− 0,4486 (− 1)	− 0,1452	+ 0,6099 (− 1)	+ 0,1339	− 0,9571 (− 1)	− 0,1020	+ 0,1373
28	− 0,1451	− 0 3566 (− 1)	+ 0,1490	+ 0,9064 (− 2)	− 0,1512	+ 0,3955 (− 1)	+ 0 1357
29	− 0,1108	+ 0,1021	+ 0,1003	− 0,1194	− 0,7144 (− 1)	+ 0,1416	+ 0,1773 (− 1)
30	+ 0,2247 (− 1)	+ 0,1432	− 0,3679 (− 1)	− 0,1370	+ 0 6877 (− 1)	+ 0,1164	− 0,1115
31	+ 0,1311	+ 0 5367 (− 1)	− 0,1363	− 0,3169 (− 1)	+ 0,1434	− 0 9951 (− 2)	− 0,1399
32	+ 0,1177	− 0 8145 (− 1)	− 0,1100	+ 0,9865 (− 1)	+ 0,8845 (− 1)	− 0 1235	− 0,4599 (− 1)
33	− 0,1844 (− 2)	− 0,1388	+ 0,1447 (− 1)	+ 0,1366	− 0,4345 (− 1)	− 0,1248	+ 0,8504 (− 1)
34	− 0,1161	− 0,6898 (− 1)	+ 0,1222	+ 0,5101 (− 1)	− 0,1327	− 0,1588 (− 1)	+ 0,1378
35	− 0,1219	+ 0,6123 (− 1)	+ 0,1166	− 0,7789 (− 1)	− 0,1011	+ 0,1039	+ 0,6841 (− 1)
36	− 0 1702 (− 1)	+ 0,1324	+ 0,5987 (− 2)	− 0 1332	+ 0,1991 (− 1)	+ 0 1282	− 0,5909 (− 1)
37	+ 0,1004	+ 0,8170 (− 1)	− 0,1070	− 0 6724 (− 1)	+ 0,1197	+ 0 3811 (− 1)	− 0,1311
38	+ 0,1236	− 0,4161 (− 1)	− 0 1203	+ 0,5745 (− 1)	+ 0,1098	− 0,8344 (− 1)	− 0,8560 (− 1)
39	+ 0,3407 (− 1)	− 0,1240	− 0,2453 (− 1)	+ 0,1272	+ 0,1705 (− 2)	− 0,1276	+ 0,3427 (− 1)
40	− 0,8414 (− 1)	− 0 9190 (− 1)	+ 0,9103 (− 1)	+ 0,8052 (− 1)	− 0,1051	− 0 5687 (− 1)	+ 0,1208
41	− 0 1230	+ 0 2277 (− 1)	+ 0,1214	− 0 3757 (− 1)	− 0,1150	+ 0 6280 (− 1)	+ 0,9810 (− 1)
42	− 0 4924 (− 1)	+ 0,1140	+ 0,4110 (− 1)	− 0,1189	− 0 2128 (− 1)	+ 0,1204	− 0,1026 (− 1)
43	+ 0 6754 (− 1)	+ 0,9964 (− 1)	− 0,7450 (− 1)	− 0,9097 (− 1)	+ 0,8931 (− 1)	+ 0,7228 (− 1)	− 0,1078
44	+ 0 1203	− 0,4863 (− 2)	− 0,1200	+ 0,1849 (− 1)	+ 0,1170	− 0,4243 (− 1)	− 0,1064
45	+ 0 6248 (− 1)	− 0,1026	− 0,5564 (− 1)	+ 0 1088	+ 0,3874 (− 1)	− 0,1165	− 0,1026 (− 1)
46	− 0 5084 (− 1)	− 0 1050	+ 0,5769 (− 1)	+ 0 9971 (− 1)	− 0,7271 (− 1)	− 0 8449 (− 1)	+ 0,9291 (− 1)
47	− 0 1155	− 0,1192 (− 1)	+ 0,1163	− 0 4427 (− 3)	− 0,1162	+ 0,2269 (− 1)	+ 0 1109
48	− 0 7372 (− 1)	+ 0 9001 (− 1)	+ 0,6810 (− 1)	− 0 8292 (− 1)	− 0 5600 (− 1)	+ 0,9342 (− 1)	+ 0,3460 (− 1)
49	+ 0,3426 (− 1)	+ 0,1080	− 0,4088 (− 1)	− 0,1038	+ 0,5571 (− 1)	+ 0,9361 (− 1)	− 0,7673 (− 1)
50	+ 0,1089	+ 0,2743 (− 1)	− 0,1105	− 0,1638 (− 1)	+ 0,1128	− 0,3933 (− 2)	− 0 1120

Таблица 45. Функции Бесселя $J_{n/3}(x)$ и $J_{n/4}(x)$

x	$J_{1/4}(x)$	$J_{-1/4}(x)$	$J_{3/4}(x)$	$J_{-3/4}(x)$	$J_{1/3}(x)$	$J_{-1/3}(x)$	$J_{2/3}(x)$	$J_{-2/3}(x)$
0,0	0,0000	∞	0,0000	∞	0,0000	∞	0,0000	∞
2	+ 0,6155	+ 1,4319	+ 0,1924	+ 1,4892	+ 0,5159	+ 1,5672	+ 0,2372	+ 1,6808
4	0,7144	1,1559	0,3180	0,7770	0,6354	1,1879	0,3698	0,9625
6	0,7589	0,9737	0,4187	0,4442	0,7000	0,9582	0,4701	0,6156
8	0,7690	0,8170	0,4987	0,2193	0,7294	0,7731	0,5453	0,3769
1,0	+ 0,7522	+ 0,6694	+ 0,5587	+ 0,0447	+ 0 7309	+ 0,6069	+ 0,5979	+ 0,1883
2	0,7129	0,5260	0,5989	— 0,0985	0,7085	0 4516	0,6289	+ 0,0307
4	0,6545	0,3862	0,6194	0,2172	0,6654	0,3049	0 6391	— 0,1033
6	0,5804	0,2512	0,6208	0,3143	0 6048	0,1672	0,6296	0,2163
8	0,4937	0,1229	0,6038	0,3906	0,5296	+ 0,0397	0,6016	0,3093
2,0	+ 0,3978	+ 0,0036	+ 0,5698	— 0,4467	+ 0,4429	— 0,0757	+ 0,5570	— 0,3823
2	0,2962	— 0,1045	0,5204	0,4829	0,3482	0,1774	0,4978	0,4355
4	0,1923	0,1992	0,4578	0,4996	0,2488	0,2636	0,4265	0,4689
6	+ 0,0895	0,2788	0,3844	0,4977	0,1479	0,3330	0,3459	0,4831
8	— 0,0092	0,3418	0,3029	0,4784	+ 0,0490	0,3847	0,2589	0,4789
3,0	— 0,1006	— 0,3875	+ 0,2162	— 0,4434	— 0,0450	— 0,4182	+ 0,1684	— 0,4576
2	0,1824	0,4154	0,1273	0,3945	0,1312	0,4336	+ 0,0776	0,4209
4	0,2521	0,4256	+ 0,0391	0,3343	0,2071	0,4314	— 0,0105	0,3708
6	0,3081	0,4188	— 0,0455	0,2651	0,2707	0,4129	0,0932	0,3098
8	0,3493	0,3962	0,1238	0,1899	0,3205	0,3794	0,1680	0,2405
4,0	— 0,3748	— 0,3595	— 0,1935	— 0,1114	— 0,3554	— 0,3331	— 0,2325	— 0,1657
2	0,3845	0,3106	0,2525	— 0,0326	0,3749	0,2761	0,2852	0,0882
4	0,3788	0,2519	0,2992	+ 0,0438	0,3789	0,2111	0,3245	— 0,0110
6	0,3587	0,1861	0,3325	0,1152	0,3681	0,1409	0,3498	+ 0,0631
8	0,3255	0,1158	0,3518	0,1791	0,3434	— 0,0681	0,3606	0,1317
5,0	— 0,2810	— 0,0439	— 0,3569	+ 0,2336	— 0,3064	+ 0,0043	— 0,3571	+ 0,1925
2	0,2272	+ 0,0269	0,3481	0,2770	0,2589	0,0738	0,3401	0,2434
4	0,1666	0,0940	0,3264	0,3082	0,2032	0,1377	0 3106	0,2831
6	0,1017	0,1550	0,2929	0,3264	0,1415	0,1939	0,2703	0,3105
8	— 0,0351	0,2078	0,2493	0,3314	0,0765	0,2406	0,2209	0,3248
6,0	+ 0,0306	+ 0,2506	— 0,1976	+ 0,3234	— 0,0107	+ 0,2763	— 0,1646	+ 0,3262
2	0,0929	0,2823	0,1399	0,3033	+ 0,0534	0,3001	0,1038	0,3148
4	0,1497	0,3019	0,0787	0,2720	0,1133	0,3113	— 0,0409	0 2916
6	0,1988	0,3090	— 0,0163	0,2312	0,1670	0,3100	+ 0,0216	0,2578
8	0,2387	0,3038	+ 0,0449	0,1827	0,2125	0,2966	0,0815	0,2150
7,0	+ 0,2680	+ 0,2869	+ 0,1025	+ 0,1284	+ 0,2484	+ 0,2720	+ 0,1364	+ 0,1650
2	0,2860	0,2591	0,1545	0,0707	0,2735	0,2374	0,1844	0,1101
4	0,2923	0,2220	0,1991	+ 0,0118	0,2872	0,1944	0,2240	+ 0,0523
6	0,2869	0,1771	0,2348	— 0,0459	0,2893	0,1449	0,2538	— 0,0059
8	0,2704	0,1264	0,2604	0,1004	0,2799	0,0911	0,2729	0 0624
8,0	+ 0,2436	+ 0,0720	+ 0,2752	— 0,1496	+ 0,2598	+ 0,0350	+ 0,2808	— 0,1151
2	0,2080	+ 0,0161	0,2788	0,1917	0,2299	— 0,0211	0,2775	0 1619
4	0,1650	— 0,0390	0,2715	0,2253	0,1918	0,0750	0,2635	0,2013
6	0,1165	0,0913	0,2538	0,2493	0,1470	0,1247	0,2395	0,2319
8	0,0646	0,1388	0,2265	0,2631	0,0974	0,1683	0,2067	0,2526
9,0	+ 0,0113	— 0,1798	+ 0,1910	— 0,2662	+ 0,0451	— 0,2043	+ 0,1665	— 0,2630
2	— 0,0413	0,2128	0,1488	0,2588	— 0,0078	0,2315	0,1206	0 2629
4	0,0911	0,2367	0,1017	0,2415	0,0592	0,2490	0,0710	0,2525
6	0,1363	0,2508	0,0515	0,2150	0,1073	0,2563	+ 0,0197	0,2323
8	0,1752	0,2547	+ 0,0004	0,1807	0,1501	0,2533	— 0,0314	0 2035
10,0	— 0,2064	— 0,2484	— 0,0497	— 0,1399	— 0,1861	— 0,2405	— 0,0801	— 0,1672

Таблица 46. Функции Бесселя $J_\nu(n)$

ν	J_ν (1)	J_ν (2)	J_ν (3)	J_ν (4)	J_ν (5)	J_ν (6)
0	+ 0,7652	+ 0,2239	− 0,2601	− 0,3971	− 0,1776	+ 0,1506
0,5	+ 0,6714	+ 0,5130	+ 0,6501 (− 1)	− 0,3019	− 0,3422	− 0,9102 (− 1)
1,0	+ 0,4401	+ 0,5767	+ 0,3391	− 0,6604 (− 1)	− 0,3276	− 0,2767
1,5	+ 0,2403	+ 0,4913	+ 0,4777	+ 0,1853	− 0,1697	− 0,3279
2,0	+ 0,1149	+ 0,3528	+ 0,4861	+ 0,3641	+ 0,4657 (− 1)	− 0,2429
2,5	+ 0,4950 (− 1)	+ 0,2239	+ 0,4127	+ 0,4409	+ 0,2404	− 0,7295 (− 1)
3,0	+ 0,1956 (− 1)	+ 0,1289	+ 0,3091	+ 0,4302	+ 0,3648	+ 0,1148
3,5	+ 0,7186 (− 2)	+ 0,6852 (− 1)	+ 0,2101	+ 0,3658	+ 0,4100	+ 0,2671
4,0	+ 0,2477 (− 2)	+ 0,3400 (− 1)	+ 0,1320	+ 0,2811	+ 0,3912	+ 0,3576
4,5	+ 0,8067 (− 3)	+ 0,1589 (− 1)	+ 0,7760 (− 1)	+ 0,1993	+ 0,3337	+ 0,3846
5,0	+ 0,2498 (− 3)	+ 0,7040 (− 2)	+ 0,4303 (− 1)	+ 0,1321	+ 0,2611	+ 0,3621
5,5	+ 0,7385 (− 4)	+ 0,2973 (− 2)	+ 0,2266 (− 1)	+ 0,8261 (− 1)	+ 0,1906	+ 0,3098
6,0	+ 0,2094 (− 4)	+ 0,1202 (− 2)	+ 0,1139 (− 1)	+ 0,4909 (− 1)	+ 0,1310	+ 0,2458
6,5	+ 0,5710 (− 5)	+ 0,4672 (− 3)	+ 0,5493 (− 2)	+ 0,2787 (− 1)	+ 0,8558 (− 1)	+ 0,1833
7,0	+ 0,1502 (− 5)	+ 0,1749 (− 3)	+ 0,2547 (− 2)	+ 0,1518 (− 1)	+ 0,5338 (− 1)	+ 0,1296
8	+ 0,9422 (− 7)	+ 0,2218 (− 4)	+ 0,4934 (− 3)	+ 0,4029 (− 2)	+ 0,1841 (− 1)	+ 0,5653 (− 1)
9	+ 0,5249 (− 8)	+ 0,2492 (− 5)	+ 0,8440 (− 4)	+ 0,9386 (− 3)	+ 0,5520 (− 2)	+ 0,2117 (− 1)
10	+ 0,2631 (− 9)	+ 0,2515 (− 6)	+ 0,1293 (− 4)	+ 0,1950 (− 3)	+ 0,1468 (− 2)	+ 0,6964 (− 2)
11	+ 0,1198 (− 10)	+ 0,2304 (− 7)	+ 0,1794 (− 5)	+ 0,3660 (− 4)	+ 0,3509 (− 3)	+ 0,2048 (− 2)
12	+ 0,5000 (− 12)	+ 0,1933 (− 8)	+ 0,2276 (− 6)	+ 0,6264 (− 5)	+ 0,7628 (− 4)	+ 0,5452 (− 3)
13	+ 0,1926 (− 13)	+ 0,1455 (− 9)	+ 0,2659 (− 7)	+ 0,9859 (− 6)	+ 0,1521 (− 4)	+ 0,1327 (− 3)
14	+ 0,689 (− 15)	+ 0,1023 (− 10)	+ 0,2880 (− 8)	+ 0,1436 (− 6)	+ 0,2801 (− 5)	+ 0,2976 (− 4)
15	+ 0,23 (− 16)	+ 0,7183 (− 12)	+ 0,2908 (− 9)	+ 0,1948 (− 7)	+ 0,4797 (− 6)	+ 0,6192 (− 5)
16	+ 0,1 (− 17)	+ 0,4506 (− 13)	+ 0,2749 (− 10)	+ 0,2472 (− 8)	+ 0,7675 (− 7)	+ 0,1202 (− 5)
17		+ 0,2659 (− 14)	+ 0,2444 (− 11)	+ 0,2947 (− 9)	+ 0,1153 (− 7)	+ 0,2187 (− 6)
18		+ 0,148 (− 15)	+ 0,2050 (− 12)	+ 0,3313 (− 10)	+ 0,1631 (− 8)	+ 0,3746 (− 7)
19		+ 0,8 (− 17)	+ 0,1628 (− 13)	+ 0,3525 (− 11)	+ 0,2183 (− 9)	+ 0,6062 (− 8)
20			+ 0,1228 (− 14)	+ 0,3560 (− 12)	+ 0,2770 (− 10)	+ 0,9296 (− 9)
21			+ 0,88 (− 16)	+ 0,3420 (− 13)	+ 0,3344 (− 11)	+ 0,1355 (− 9)
22			+ 0,6 (− 17)	+ 0,3134 (− 14)	+ 0,3848 (− 12)	+ 0,1882 (− 10)
23				+ 0,275 (− 15)	+ 0,4231 (− 13)	+ 0,2496 (− 11)
24				+ 0,23 (− 16)	+ 0,4454 (− 14)	+ 0,3168 (− 12)
25				+ 0,2 (− 17)	+ 0,450 (− 15)	+ 0,3855 (− 13)
26					+ 0,44 (− 16)	+ 0,4507 (− 14)
27					+ 0,4 (− 17)	+ 0,507 (− 15)
28						+ 0,55 (− 16)
29						+ 0,6 (− 17)
30						+ 0,1 (− 17)

ν	J_ν (7)	J_ν (8)	J_ν (9)	J_ν (10)	J_ν (11)	J_ν (12)
0	+ 0,3001	+ 0,1717	− 0,9033 (− 1)	− 0,2459	− 0,1712	+ 0,4769 (− 1)
0,5	+ 0,1981	+ 0,2791	+ 0,1096	− 0,1373	− 0,2406	− 0,1236
1,0	− 0,4683 (− 2)	+ 0,2346	+ 0,2453	+ 0,4347 (− 1)	− 0,1768	− 0,2234
1,5	− 0,1991	+ 0,7593 (− 1)	+ 0,2545	+ 0,1980	− 0,2293 (− 1)	− 0,2047
2,0	− 0,3014	− 0,1130	+ 0,1448	+ 0,2546	+ 0,1390	− 0,8493 (− 1)

Продолжение табл. 46

x	$J_\nu(7)$	$J_\nu(8)$	$J_\nu(9)$	$J_\nu(10)$	$J_\nu(11)$	$J_\nu(12)$
2,5	−0,2834	−0,2506	−0,2477 (−1)	+0,1967	+0,2343	+0,7242 (−1)
3,0	−0,1676	−0,2911	−0,1809	+0,5838 (−1)	+0,2273	+0,1951
3,5	−0,3403 (−2)	−0,2326	−0,2683	−0,9965 (−1)	+0,1294	+0,2348
4,0	+0,1578	−0,1054	−0,2655	−0,2196	−0,1504 (−1)	+0,1825
4,5	+0,2800	+0,4712 (−1)	−0,1839	−0,2664	−0,1519	+0,6487 (−1)
5,0	+0,3479	+0,1858	−0,5504 (−1)	−0,2341	−0,2383	−0,7347 (−1)
5,5	+0,3634	+0,2856	+0,8439 (−1)	−0,1401	−0,2538	−0,1864
6,0	+0,3392	+0,3376	+0,2043	−0,1446 (−1)	−0,2016	−0,2437
6,5	+0,2911	+0,3456	+0,2870	+0,1123	−0,1018	−0,2356
7,0	+0,2336	+0,3206	+0,3275	+0,2167	+0,1838 (−1)	−0,1703
7,5	+0,1772	+0,2759	+0,3302	+0,2861	+0,1334	−0,6865 (−1)
8,0	+0,1280	+0,2235	+0,3051	+0,3179	+0,2250	+0,4510 (−1)
8,5	+0,8853 (−1)	+0,1718	+0,2633	+0,3168	+0,2838	+0,1496
9,0	+0,5892 (−1)	+0,1263	+0,2149	+0,2919	+0,3089	+0,2304
9,5	+0,3785 (−1)	+0,892* (−1)	+0,1672	+0,2526	+0,3051	+0,2806
10,0	+0,2354 (−1)	+0,6077 (−1)	+0,1247	+0,2075	+0,2804	+0,3005
10,5	+0,1420 (−1)	+0,4004 (−1)	+0,8959 (−1)	+0,1630	+0,2433	+0,2947
11,0	+0,8335 (−2)	+0,2560 (−1)	+0,6222 (−1)	+0,1231	+0,2010	+0,2704
11,5	+0,4763 (−2)	+0,1590 (−1)	+0,4188 (−1)	+0,8976 (−1)	+0,1593	+0,2351
12,0	+0,2656 (−2)	+0,9624 (−2)	+0,2739 (−1)	+0,6337 (−1)	+0,1216	+0,1953
12,5	+0,1446 (−2)	+0,5680 (−2)	+0,1744 (−1)	+0,4344 (−1)	+0,8978 (−1)	+0,1559
13,0	+0,7702 (−3)	+0,3275 (−2)	+0,1083 (−1)	+0,2897 (−1)	+0,6429 (−1)	+0,1201
13,5	+0,4016 (−3)	+0,1846 (−2)	+0,6568 (−2)	+0,1884 (−1)	+0,4477 (−1)	+0,8969 (−1)
14,0	+0,2052 (−3)	+0,1019 (−2)	+0,3895 (−2)	+0,1196 (−1)	+0,3037 (−1)	+0,6504 (−1)
15	+0,5059 (−4)	+0,2926 (−3)	+0,1286 (−2)	+0,4508 (−2)	+0,1301 (−1)	+0,3161 (−1)
16	+0,1161 (−4)	+0,7801 (−4)	+0,3933 (−3)	+0,1567 (−2)	+0,5110 (−2)	+0,1399 (−1)
17	+0,2494 (−5)	+0,1942 (−4)	+0,1120 (−3)	+0,5056 (−3)	+0,1856 (−2)	+0,5698 (−2)
18	+0,5037 (−6)	+0,4538 (−5)	+0,2988 (−4)	+0,1524 (−3)	+0,6280 (−3)	+0,2152 (−2)
19	+0,9598 (−7)	+0,9992 (−6)	+0,7497 (−5)	+0,4315 (−4)	+0,1990 (−3)	+0,7590 (−3)
20	+0,1731 (−7)	+0,2081 (−6)	+0,1777 (−5)	+0,1151 (−4)	+0,5931 (−4)	+0,2512 (−3)
21	+0,2966 (−8)	+0,4110 (−7)	+0,3990 (−6)	+0,2907 (−5)	+0,1670 (−4)	+0,7839 (−4)
22	+0,4839 (−9)	+0,7725 (−8)	+0,8515 (−7)	+0,6969 (−6)	+0,4458 (−5)	+0,2315 (−4)
23	+0,7535 (−10)	+0,1385 (−8)	+0,1732 (−7)	+0,1590 (−6)	+0,1132 (−5)	+0,6491 (−5)
24	+0,1122 (−10)	+0,2373 (−9)	+0,3364 (−8)	+0,3463 (−7)	+0,2738 (−6)	+0,1733 (−5)
25	+0,1602 (−11)	+0,3895 (−10)	+0,6257 (−9)	+0,7215 (−8)	+0,6333 (−7)	+0,4418 (−6)
26	+0,2195 (−12)	+0,6135 (−11)	+0,1116 (−9)	+0,1441 (−8)	+0,1403 (−7)	+0,1078 (−6)
27	+0,2893 (−13)	+0,9289 (−12)	+0,1913 (−10)	+0,2762 (−9)	+0,2981 (−8)	+0,2521 (−7)
28	+0,3673 (−14)	+0,1354 (−12)	+0,3154 (−11)	+0,5094 (−10)	+0,6092 (−9)	+0,5665 (−8)
29	+0,450 (−15)	+0,1903 (−13)	+0,5016 (−12)	+0,9050 (−11)	+0,1198 (−9)	+0,1225 (−8)
30	+0,53 (−16)	+0,2583 (−14)	+0,7692 (−13)	+0,1551 (−11)	+0,2274 (−10)	+0,2552 (−9)
31	+0,6 (−17)	+0,339 (−15)	+0,1140 (−13)	+0,2568 (−12)	+0,4165 (−11)	+0,5133 (−10)
32	+0,1 (−17)	+0,43 (−16)	+0,1636 (−14)	+0,4112 (−13)	+0,7375 (−12)	+0,9976 (−11)
33		+0,5 (−17)	+0,227 (−15)	+0,6376 (−14)	+0,1264 (−12)	+0,1876 (−11)
34		+0,1 (−17)	+0,31 (−16)	+0,958 (−15)	+0,2100 (−13)	+0,3417 (−12)
35			+0,4 (−17)	+0,140 (−15)	+0,3383 (−14)	+0,6035 (−13)
36				+0,20 (−16)	+0,529 (−15)	+0,1035 (−13)
37				+0,3 (−17)	+0,80 (−16)	+0,1723 (−14)
38					+0,12 (−16)	+0,279 (−15)
39					+0,2 (−17)	+0,44 (−16)
40						+0,7 (−17)
41						+0,1 (−17)

Продолжение табл. 46

ν	J_ν (13)	J_ν (14)	J_ν (15)	J_ν (16)	J_ν (17)	J_ν (18)
0	+ 0,2069	+ 0,1711	— 0,1422 (— 1)	— 0,1749	— 0,1699	— 0,1336 (— 1)
0,5	+ 0,9298 (— 1)	+ 0,2112	+ 0,1340	— 0,5743 (— 1)	— 0,1860	— 0,1412
1,0	— 0,7032 (— 1)	+ 0,1334	+ 0,2051	+ 0,9040 (— 1)	— 0,9767 (— 1)	— 0,1500
1,5	— 0,1937	— 0,1407 (— 1)	+ 0,1654	+ 0,1874	+ 0,4230 (— 1)	— 0,1420
2,0	— 0,2177	— 0,1520	+ 0,4157 (— 1)	+ 0,1862	+ 0,1584	0,7533 (— 2)
2,5	— 0,1377	— 0,2143	— 0,1009	+ 0,9257 (— 1)	+ 0,1935	+ 0,1192
3,0	+ 0,3320 (— 2)	— 0,1768	— 0,1940	— 0,4385 (— 1)	+ 0,1349	+ ,1863
3,5	+ 0,1407	— 0,6245 (— 1)	— 0,1991	— 0,1585	+ 0,1461 (— 1)	+ 0,1451
4,0	+ 0,2193	+ 0,7624 (— 1)	— 0,1192	— 0,2026	— 0,1107	— 0,6964 (— 1)
4,5	+ 0,2134	+ 0,1830	+ 0,7984 (— 2)	— 0,1619	— 0,1875	— 0,5500 (— 1)
5,0	+ 0,1316	+ 0,2204	+ 0,1305	— 0,5747 (— 1)	— 0,1870	— 0,1554
5,5	+ 0,7055 (— 2)	+ 0,1801	+ 0,2039	+ 0,6743 (— 1)	— 0,1139	— 0,1926
6,0	— 0,1180	+ 0,8117 (— 1)	+ 0,2061	+ 0,1667	+ 0,7153 (— 3)	— 0,1560
6,5	— 0,2075	— 0,4151 (— 1)	+ 0,1415	+ 0,2083	+ 0,1138	— 0,6273 (— 1)
7,0	— 0,2406	— 0,1508	+ 0,3446 (— 1)	+ 0,1825	+ 0,1875	+ 0,5140 (— 1)
7,5	— 0,2145	— 0,2187	— 0,8121 (— 1)	+ 0,1018	+ 0,2009	+ 0,1473
8,0	— 0,1410	— 0,2320	— 0,1740	— 0,7021 (— 2)	+ 0,1537	+ 0,1959
8,5	— 0,4006 (— 1)	— 0,1928	— 0,2227	— 0,1128	+ 0,6346 (— 1)	+ 0,1855
9,0	+ 0,6698 (— 1)	— 0,1143	— 0,2200	— 0,1895	— 0,4286 (— 1)	+ 0,1228
9,5	+ 0,1621	— 0,1541 (— 1)	— 0,1712	— 0,2217	— 0,1374	+ 0,2786 (— 1)
10,0	+ 0,2338	+ 0,8501 (— 1)	— 0,9007 (— 1)	— 0,2062	— 0,1991	— 0,7317 (— 1)
10,5	+ 0,2770	+ 0,1718	+ 0,5862 (— 2)	— 0,1504	— 0,2171	— 0,1561
11,0	+ 0,2927	+ 0,2357	+ 0,9995 (— 1)	— 0,6822 (— 1)	— 0,1914	— 0,2041
11,5	+ 0,2854	+ 0,2732	+ 0,1794	+ 0,2427 (— 1)	— 0,1307	— 0,2100
12,0	+ 0,2615	+ 0,2855	+ 0,2367	+ 0,1124	— 0,4857 (— 1)	— 0,1762
12,5	+ 0,2279	+ 0,2770	+ 0,2692	+ 0,1853	+ 0,4024 (— 1)	— 0,1122
13,0	+ 0,1901	+ 0,2536	+ 0,2787	+ 0,2368	+ 0,1228	— 0,3092 (— 1)
13,5	+ 0,1528	+ 0,2214	+ 0,2693	+ 0,2653	+ 0,1899	+ 0,5414 (— 1)
14,0	+ 0,1188	+ 0,1855	+ 0,2464	+ 0,2724	+ 0,2364	+ 0,1316
14,5	+ 0,8953 (— 1)	+ 0,1500	+ 0,2155	+ 0,2623	+ 0,2613	+ 0,1934
15,0	+ 0,6564 (— 1)	+ 0,1174	+ 0,1813	+ 0,2399	+ 0,2446	+ 0,2356
15,5	+ 0,4691 (— 1)	+ 0,8931 (— 1)	+ 0,1474	+ 0,2102	+ 0,2559	+ 0,2575
16,0	+ 0,3272 (— 1)	+ 0,6613 (— 1)	+ 0,1162	+ 0,1775	+ 0,2340	+ 0,2611
16,5	+ 0,2232 (— 1)	+ 0,4777 (— 1)	+ 0,8905 (— 1)	+ 0,1450	+ 0,2054	+ 0,2500
17,0	+ 0,1491 (— 1)	+ 0,3372 (— 1)	+ 0,6653 (— 1)	+ 0,1150	+ 0,1739	+ 0,2286
17,5	+ 0,9760 (— 2)	+ 0,2330 (— 1)	+ 0,4853 (— 1)	+ 0,8876 (— 1)	+ 0,1427	+ 0,2009
18,0	+ 0,6269 (— 2)	+ 0,1577 (— 1)	+ 0,3463 (— 1)	+ 0,6685 (— 1)	+ 0,1138	+ 0,1706
18,5	+ 0,3955 (— 2)	+ 0,1047 (— 1)	+ 0,2419 (— 1)	+ 0,4920 (— 1)	+ 0,8844 (— 1)	+ 0,1406
19,0	+ 0,2452 (— 2)	+ 0,6824 (— 2)	+ 0,1657 (— 1)	+ 0,3544 (— 1)	+ 0,6710 (— 1)	+ 0,1127
20	+ 0,8971 (— 3)	+ 0,2753 (— 2)	+ 0,7360 (— 2)	+ 0,1733 (— 1)	+ 0,3619 (— 1)	+ 0,6731 (— 1)
21	+ 0,3087 (— 3)	+ 0,1041 (— 2)	+ 0,3054 (— 2)	+ 0,7879 (— 2)	+ 0,1804 (— 1)	+ 0,3686 (— 1)
22	+ 0,1004 (— 3)	+ 0,3711 (— 3)	+ 0,1190 (— 2)	+ 0,3354 (— 2)	+ 0,8380 (— 2)	+ 0,1871 (— 1)
23	+ 0,3092 (— 4)	+ 0,1251 (— 3)	+ 0,4379 (— 3)	+ 0,1343 (— 2)	+ 0,3651 (— 2)	+ 0,8864 (— 2)
24	+ 0,9060 (— 5)	+ 0,4006 (— 4)	+ 0,1527 (— 3)	+ 0,5087 (— 3)	+ 0,1500 (— 2)	+ 0,3946 (— 2)
25	+ 0,2532 (— 5)	+ 0,1221 (— 4)	+ 0,5060 (— 4)	+ 0,1828 (— 3)	+ 0,5831 (— 3)	+ 0,1658 (— 2)
26	+ 0,6761 (— 6)	+ 0,3555 (— 5)	+ 0,1599 (— 4)	+ 0,6253 (— 4)	+ 0,2154 (— 3)	+ 0,6607 (— 3)
27	+ 0,1730 (— 6)	+ 0,9902 (— 6)	+ 0,4829 (— 5)	+ 0,2042 (— 4)	+ 0,7586 (— 4)	+ 0,2504 (— 3)
28	+ 0,4249 (— 7)	+ 0,2645 (— 6)	+ 0,1398 (— 5)	+ 0,6380 (— 5)	+ 0,2553 (— 4)	+ 0,9057 (— 4)
29	+ 0,1004 (— 7)	+ 0,6790 (— 7)	+ 0,3883 (— 6)	+ 0,1912 (— 5)	+ 0,8228 (— 5)	+ 0,3133 (— 4)
30	+ 0,2283 (— 8)	+ 0,1678 (— 7)	+ 0,1037 (— 6)	+ 0,5505 (— 6)	+ 0,2546 (— 5)	+ 0,1039 (— 4)
31	+ 0,5009 (— 9)	+ 0,3995 (— 8)	+ 0,2670 (— 7)	+ 0,1526 (— 6)	+ 0,7577 (— 6)	+ 0,3313 (— 5)
32	+ 0,1062 (— 9)	+ 0,9187 (— 9)	+ 0,6632 (— 8)	+ 0,4078 (— 7)	+ 0,2172 (— 6)	+ 0,1016 (— 5)
33	+ 0,2176 (— 10)	+ 0,2042 (— 9)	+ 0,1591 (— 8)	+ 0,1052 (— 7)	+ 0,6009 (— 7)	+ 0,3005 (— 6)
34	+ 0,4320 (— 11)	+ 0,4392 (— 10)	+ 0,3693 (— 9)	+ 0,2625 (— 8)	+ 0,1606 (— 7)	+ 0,8583 (— 7)
35	+ 0,8310 (— 12)	+ 0,9155 (— 11)	+ 0,8301 (— 10)	+ 0,6339 (— 9)	+ 0,4153 (— 8)	+ 0,2370 (— 7)
36	+ 0,1551 (— 12)	+ 0,1851 (— 11)	+ 0,1809 (— 10)	+ 0,1484 (— 9)	+ 0,1040 (— 8)	+ 0,6335 (— 8)
37	+ 0,2812 (— 13)	+ 0,3632 (— 12)	+ 0,3827 (— 11)	+ 0,3368 (— 10)	+ 0,2526 (— 9)	+ 0,1641 (— 8)
38	+ 0,4956 (— 14)	+ 0,6928 (— 13)	+ 0,7863 (— 12)	+ 0,7426 (— 11)	+ 0,5956 (— 10)	+ 0,4126 (— 9)
39	+ 0,850 (— 15)	+ 0,1285 (— 13)	+ 0,1571 (— 12)	+ 0,1591 (— 11)	+ 0,1364 (— 10)	+ 0,1007 (— 9)

Продолжение табл. 46

ν	J_ν (13)	J_ν (14)	J_ν (15)	J_ν (16)	J_ν (17)	J_ν (18)
40	+ 0,142 (— 15)	+ 0,2320 (— 14)	+ 0,3054 (— 13)	+ 0,3317 (— 12)	+ 0,3039 (— 11)	+ 0,2391 (— 10)
41	+ 0,23 (— 16)	+ 0,408 (— 15)	+ 0,5781 (— 14)	+ 0,6733 (— 13)	+ 0,6590 (— 12)	+ 0,5520 (— 11)
42	+ 0,4 (— 17)	+ 0,70 (— 16)	+ 0 1067 (— 14)	+ 0,1331 (— 13)	+ 0,1392 (— 12)	+ 0,1241 (— 11)
43	+ 0,1 (— 17)	+ 0,12 (— 16)	+ 0,192 (— 15)	+ 0,2567 (— 14)	+ 0,2865 (— 13)	+ 0,2719 (— 12)
44		+ 0,2 (— 17)	+ 0,34 (— 16)	+ 0,483 (— 15)	+ 0,5752 (— 14)	+ 0,5810 (— 13)
45			+ 0,6 (— 17)	+ 0,89 (— 16)	+ 0,1127 (— 14)	+ 0,1211 (— 13)
46			+ 0,1 (— 17)	+ 0,16 (— 16)	+ 0,216 (— 15)	+ 0,2466 (— 14)
47				+ 0,3 (— 17)	+ 0,40 (— 16)	+ 0,490 (— 15)
48					+ 0,7 (— 17)	+ 0,95 (— 16)
49					+ 0,1 (— 17)	+ 0,18 (— 16)
50						+ 0,3 (— 17)

ν	J_ν (19)	J_ν (20)	J_ν (21)	J_ν (22)	J_ν (23)	J_ν (24)
0	+ 0,1466	+ 0,1670	+ 0,3658 (— 1)	— 0,1207	— 0,1624	— 0,5623 (— 1)
0,5	+ 0,2743 (— 1)	+ 0,1629	+ 0,1457	— 0,1506 (— 2)	— 0,1408	— 0,1475
1,0	— 0,1057	+ 0,6683 (— 1)	+ 0,1711	+ 0,1172	— 0,3952 (— 1)	— 0,1560
1,5	— 0,1795	— 0,6466 (— 1)	+ 0,1023	+ 0,1700	+ 0,8253 (— 1)	— 0,7523 (— 1)
2,0	— 0,1578	— 0,1603	— 0,2028 (— 1)	+ 0,1313	+ 0,1590	+ 0,4339 (— 1)
2,5	— 0,5578 (— 1)	— 0,1726	— 0,1311	+ 0,2469 (— 1)	+ 0,1516	+ 0,1381
3,0	+ 0,7249 (— 1)	— 0,9890 (— 1)	— 0,1750	— 0,9330 (— 1)	+ 0,6717 (— 1)	+ 0,1613
3,5	+ 0,1649	+ 0,2152 (— 1)	— 0,1335	— 0,1644	— 0,4958 (— 1)	+ 0,1040
4,0	+ 0,1806	+ 0,1307	— 0,2971 (— 1)	— 0,1568	— 0,1415	— 0,3076 (— 2)
4,5	+ 0,1165	+ 0,1801	+ 0,8656 (— 1)	— 0,7701 (— 1)	— 0,1666	— 0,1078
5,0	+ 0,3572 (— 2)	+ 0,1512	+ 0,1637	+ 0,3630 (— 1)	— 0,1164	— 0,1623
5,5	— 0,1097	+ 0,5953 (— 1)	+ 0,1706	+ 0,1329	— 0,1563 (— 1)	— 0,1444
6,0	— 0,1788	— 0,5509 (— 1)	+ 0,1076	+ 0,1733	+ 0,9086 (— 1)	— 0,6455 (— 1)
6,5	— 0,1800	— 0,1474	+ 0,2808 (— 2)	+ 0,1435	+ 0,1592	+ 0,4157 (— 1)
7,0	— 0,1165	— 0,1842	— 0,1022	+ 0,5820 (— 1)	+ 0,1638	+ 0,1300
8	+ 0,9294 (— 1)	— 0,7387 (— 1)	— 0,1757	— 0,1362	+ 0,8829 (— 2)	+ 0,1404
9	+ 0,1947	+ 0,1251	— 0,3175 (— 1)	— 0,1573	— 0,1576	— 0,3643 (— 1)
10	+ 0,9155 (— 1)	+ 0,1865	+ 0,1485	+ 0,7547 (— 2)	— 0,1322	— 0,1677
11	— 0,9837 (— 1)	+ 0,6136 (— 1)	+ 0,1732	+ 0,1641	+ 0,4268 (— 1)	— 0,1033
12	— 0,2055	— 0,1190	+ 0,3293 (— 1)	+ 0,1566	+ 0,1730	+ 0,7299 (— 1)
13	— 0,1612	— 0,2041	— 0,1356	+ 0,6688 (— 2)	+ 0,1379	+ 0,1763
14	— 0,1507 (— 1)	— 0,1464	— 0,2008	— 0,1487	— 0,1718 (— 1)	+ 0,1180
15	+ 0,1389	— 0,8121 (— 3)	— 0,1321	— 0,1959	— 0,1588	— 0,3863 (— 1)
16	+ 0,2345	+ 0,1452	+ 0,1202 (— 1)	— 0,1185	— 0,1899	— 0,1663
17	+ 0,2559	+ 0,2331	+ 0,1505	+ 0,2358 (— 1)	— 0,1055	— 0,1831
18	+ 0,2235	+ 0,2511	+ 0,2316	+ 0,1549	+ 0,3402 (— 1)	— 0,9311 (— 1)
19	+ 0,1676	+ 0,2189	+ 0,2465	+ 0,2299	+ 0,1587	+ 0,4345 (— 1)
20	+ 0,1116	+ 0,1647	+ 0,2145	+ 0,2422	+ 0,2282	+ 0,1619
21	+ 0,6746 (— 1)	+ 0,1106	+ 0,1621	+ 0,2105	+ 0,2381	+ 0,2264
22	+ 0,3748 (— 1)	+ 0,6758 (— 1)	+ 0,1097	+ 0,1596	+ 0,2067	+ 0,2343
23	+ 0,1934 (— 1)	+ 0,3805 (— 1)	+ 0,6767 (— 1)	+ 0,1087	+ 0,1573	+ 0,2031
24	+ 0,9331 (— 2)	+ 0,1993 (— 1)	+ 0,3857 (— 1)	+ 0,6773 (— 1)	+ 0,1078	+ 0,1550
25	+ 0,4237 (— 2)	+ 0,9781 (— 2)	+ 0,2049 (— 1)	+ 0,3905 (— 1)	+ 0,6777 (— 1)	+ 0,1070
26	+ 0,1819 (— 2)	+ 0,4524 (— 2)	+ 0,1022 (— 1)	+ 0,2102 (— 1)	+ 0,3949 (— 1)	+ 0,6778 (— 1)
27	+ 0,7412 (— 3)	+ 0,1981 (— 2)	+ 0,4806 (— 2)	+ 0,1064 (— 1)	+ 0,2152 (— 1)	+ 0,3990 (— 1)
28	+ 0,2877 (— 3)	+ 0,8242 (— 3)	+ 0,2143 (— 2)	+ 0,5084 (— 2)	+ 0,1104 (— 1)	+ 0,2200 (— 1)
29	+ 0,1066 (— 3)	+ 0,3270 (— 3)	+ 0,9094 (— 3)	+ 0,2307 (— 2)	+ 0,5357 (— 2)	+ 0,1143 (— 1)
30	+ 0,3785 (— 4)	+ 0,1240 (— 3)	+ 0,3682 (— 3)	+ 0,9965 (— 3)	+ 0,2470 (— 2)	+ 0,5626 (— 2)
31	+ 0,1289 (— 4)	+ 0,4508 (— 4)	+ 0,1427 (— 3)	+ 0,4113 (— 3)	+ 0,1085 (— 2)	+ 0,2633 (— 2)
32	+ 0,4223 (— 5)	+ 0,1574 (— 4)	+ 0,5304 (— 4)	+ 0,1626 (— 3)	+ 0,4561 (— 3)	+ 0,1176 (— 2)
33	+ 0,1333 (— 5)	+ 0,5289 (— 5)	+ 0,1895 (— 4)	+ 0,6171 (— 4)	+ 0,1837 (— 3)	+ 0,5024 (— 3)
34	+ 0,4057 (— 6)	+ 0,1713 (— 5)	+ 0,6521 (— 5)	+ 0,2253 (— 4)	+ 0,7110 (— 4)	+ 0,2060 (— 3)
35	+ 0,1193 (— 6)	+ 0,5358 (— 6)	+ 0,2164 (— 5)	+ 0,7927 (— 5)	+ 0,2649 (— 4)	+ 0,8119 (— 4)
36	+ 0,3396 (— 7)	+ 0,1620 (— 6)	+ 0,6941 (— 6)	+ 0,2692 (— 5)	+ 0,9516 (— 5)	+ 0,3083 (— 4)
37	+ 0,9362 (— 8)	+ 0,4742 (— 7)	+ 0,2153 (— 6)	+ 0,8839 (— 6)	+ 0,3302 (— 5)	+ 0,1130 (— 4)
38	+ 0,2503 (— 8)	+ 0,1345 (— 7)	+ 0,6471 (— 7)	+ 0,2809 (— 6)	+ 0,1108 (— 5)	+ 0,4000 (— 5)
39	+ 0,6496 (— 9)	+ 0,3704 (— 8)	+ 0,1886 (— 7)	+ 0,8652 (— 7)	+ 0,3603 (— 6)	+ 0,1371 (— 5)
40	+ 0,1638 (— 9)	+ 0,9902 (— 9)	+ 0,5336 (— 8)	+ 0,2586 (— 7)	+ 0,1136 (— 6)	+ 0,4553 (— 6)
41	+ 0,4018 (— 10)	+ 0,2574 (— 9)	+ 0,1467 (— 8)	+ 0,7506 (— 8)	+ 0,3476 (— 7)	+ 0,1467 (— 6)
42	+ 0,9594 (— 11)	+ 0,6510 (— 10)	+ 0,3922 (— 9)	+ 0,2118 (— 8)	+ 0,1034 (— 7)	+ 0,4590 (— 7)
43	+ 0,2231 (— 11)	+ 0 1604 (— 10)	+ 0,1021 (— 9)	+ 0,5816 (— 9)	+ 0 2989 (— 8)	+ 0,1396 (— 7)
44	+ 0,5059 (— 12)	+ 0,3849 (— 11)	+ 0,2589 (— 10)	+ 0,1555 (— 9)	+ 0,8417 (— 9)	+ 0,4133 (— 8)

Продолжение табл. 46

ν	J_ν (19)	J_ν (20)	J_ν (21)	J_ν (22)	J_ν (23)	J_ν (24)
45	+ 0,1119 (− 12)	+ 0,9011 (− 12)	+ 0,6402 (− 11)	+ 0,4054 (− 10)	+ 0,2309 (− 9)	+ 0,1191 (− 8)
46	+ 0,2416 (− 13)	+ 0,2059 (− 12)	+ 0,1544 (− 11)	+ 0,1031 (− 10)	+ 0,6175 (− 10)	+ 0,3347 (− 9)
47	+ 0,5096 (− 14)	+ 0,4594 (− 13)	+ 0,3637 (− 12)	+ 0,2557 (− 11)	+ 0,1611 (− 10)	+ 0,9172 (− 10)
48	+ 0,1051 (− 14)	+ 0,1002 (− 13)	+ 0,8368 (− 13)	+ 0,6196 (− 12)	+ 0,4105 (− 11)	+ 0,2453 (− 10)
49	+ 0,212 (− 15)	+ 0,2135 (− 14)	+ 0,1882 (− 13)	+ 0,1467 (− 12)	+ 0,1022 (− 11)	+ 0,6409 (− 11)
50	+ 0,42 (− 16)	+ 0,445 (− 15)	+ 0,4139 (− 14)	+ 0,3397 (− 13)	+ 0,2486 (− 12)	+ 0,1636 (− 11)
51	+ 0,8 (− 17)	+ 0,91 (− 16)	+ 0,891 (− 15)	+ 0,7696 (− 14)	+ 0,5917 (− 13)	+ 0,4085 (− 12)
52	+ 0,2 (− 17)	+ 0,18 (− 16)	+ 0,188 (− 15)	+ 0,1706 (− 14)	+ 0,1378 (− 13)	+ 0,9976 (− 13)
53		+ 0,4 (− 17)	+ 0,39 (− 16)	+ 0,370 (− 15)	+ 0,3142 (− 14)	+ 0,2385 (− 13)
54		+ 0,1 (− 17)	+ 0,8 (− 17)	+ 0,79 (− 16)	+ 0,702 (− 15)	+ 0,5585 (− 14)
55			+ 0,2 (− 17)	+ 0,16 (− 16)	+ 0,154 (− 15)	+ 0,1281 (− 14)
56				+ 0,3 (− 17)	+ 0,34 (− 16)	+ 0,288 (− 15)
57				+ 0,1 (− 17)	+ 0,7 (− 17)	+ 0,64 (− 16)
58					+ 0,1 (− 17)	+ 0,14 (− 16)
59						+ 0,3 (− 17)
60						+ 0,1 (− 17)

ν	J_ν (25)	J_ν (26)	J_ν (27)	J_ν (28)	J_ν (29)
0	+ 0,0963	+ 0 1560	+ 0,0727	− 0,0732	− 0,1478
1	− 0,1254	+ 0,0150	+ 0 1366	+ 0,1306	+ 0,0069
2	− 0,1063	− 0,1548	− 0 0626	+ 0,0825	+ 0,1483
3	+ 0,1083	− 0,0389	− 0,1459	− 0,1188	+ 0,0135
4	+ 0,1323	+ 0,1459	+ 0,0302	− 0,1079	− 0,1455
5	− 0,0660	+ 0,0838	+ 0,1548	+ 0,0879	− 0,0537
6	− 0,1587	− 0,1137	+ 0,0271	+ 0,1393	+ 0,1270
7	− 0,0102	− 0,1362	− 0,1428	− 0,0282	+ 0,1062
8	+ 0,1530	+ 0,0403	− 0,1012	− 0,1534	− 0,0757
9	+ 0,1081	+ 0,1610	+ 0,0828	− 0,0595	− 0,1480
10	− 0,0752	+ 0,0712	+ 0,1564	+ 0,1152	− 0,0161
11	− 0,1682	− 0,1063	+ 0,0330	+ 0,1418	+ 0,1369
12	− 0,0729	− 0,1611	− 0,1295	− 0,0038	+ 0,1200
13	+ 0,0983	− 0,0424	− 0,1481	− 0,1450	− 0,0376
14	+ 0,1751	+ 0,1187	− 0,0131	− 0,1309	− 0,1537
15	+ 0,0978	+ 0,1702	+ 0,1345	+ 0,0142	− 0,1108
16	− 0,0577	+ 0,0777	+ 0,1625	+ 0,1461	+ 0,0391
17	− 0,1717	− 0,0745	+ 0,0582	+ 0,1527	+ 0,1539
18	− 0,1758	− 0,1752	− 0,0893	+ 0,0394	+ 0,1414
19	− 0,0814	− 0,1681	− 0,1772	− 0,1021	+ 0,0216
20	+ 0,0520	− 0,0706	− 0,1601	− 0,1779	− 0,1131
21	+ 0,1646	+ 0,0597	− 0,0600	− 0,1521	− 0,1776
22	+ 0,2246	+ 0,1669	+ 0,0668	− 0,0502	− 0,1441
23	+ 0,2306	+ 0,2227	+ 0,1688	+ 0,0732	− 0,0410
24	+ 0,1998	+ 0,2271	+ 0,2209	+ 0,1704	+ 0,0790
25	+ 0,1529	+ 0,1966	+ 0,2238	+ 0,2190	+ 0,1718
26	+ 0,1061	+ 0,1510	+ 0,1936	+ 0,2207	+ 0,2172
27	+ 0,6778 (− 1)	+ 0,1053	+ 0,1491	+ 0,1908	+ 0,2176
28	+ 0,4028 (− 1)	+ 0,6776 (− 1)	+ 0,1045	+ 0,1473	+ 0,1881
29	+ 0,2245 (− 1)	+ 0,4063 (− 1)	+ 0,6773 (− 1)	+ 0,1038	+ 0,1456
30	+ 0,1181 (− 1)	+ 0,2288 (− 1)	+ 0,4096 (− 1)	+ 0,6769 (− 1)	+ 0,1030
31	+ 0,5889 (− 2)	+ 0,1217 (− 1)	+ 0,2329 (− 1)	+ 0,4126 (− 1)	+ 0,6763 (− 1)
32	+ 0,2795 (− 2)	+ 0,6147 (− 2)	+ 0,1253 (− 1)	+ 0,2368 (− 1)	+ 0,4155 (− 1)
33	+ 0,1267 (− 2)	+ 0,2957 (− 2)	+ 0,6400 (− 2)	+ 0,1287 (− 1)	+ 0,2405 (− 1)
34	+ 0,550 (− 3)	+ 0,1360 (− 2)	+ 0,3118 (− 2)	+ 0,6648 (− 2)	+ 0,1320 (− 1)
35	+ 0,229 (− 3)	+ 0,599 (− 3)	+ 0,1453 (− 2)	+ 0,3278 (− 2)	+ 0,6891 (− 2)
36	+ 0,92 (− 4)	+ 0,254 (− 3)	+ 0,650 (− 3)	+ 0,1548 (− 2)	+ 0,3437 (− 2)
37	+ 0,36 (− 4)	+ 0,103 (− 3)	+ 0,279 (− 3)	+ 0,701 (− 3)	+ 0,1642 (− 2)
38	+ 0,13 (− 4)	+ 0,41 (− 4)	+ 0,116 (− 3)	+ 0,306 (− 3)	+ 0,754 (− 3)
39	+ 0,5 (− 5)	+ 0,15 (− 4)	+ 0,46 (− 4)	+ 0,128 (− 3)	+ 0,333 (− 3)
40	+ 0,2 (− 5)	+ 0,6 (− 5)	+ 0,18 (− 4)	+ 0,52 (− 4)	+ 0,142 (− 3)
41	+ 0,1 (− 5)	+ 0,2 (− 5)	+ 0,7 (− 5)	+ 0,20 (− 4)	+ 0,58 (− 4)
42		+ 0,1 (− 5)	+ 0,2 (− 5)	+ 0,8 (− 5)	+ 0,23 (− 4)
43			+ 0,1 (− 5)	+ 0,3 (− 5)	+ 0,9 (− 5)
44				+ 0,1 (− 5)	+ 0,3 (− 5)

Таблица 47. Функции Неймана $N_0(x)$ и $N_1(x)$

x	$N_0(x)$		$N_1(x)$		x	$N_0(x)$		$N_1(x)$		x	$N_0(x)$		$N_1(x)$	
						+ 0,		− 0,			+ 0,		− 0,	
0 00	− ∞		− ∞		1,00	0883	+ 77	7812	+ 86	2 00	5104	+ 10	1070	+ 56
02	2,564		31,860		02	1037	75 5	7640	84 5	02	5124	9	0958	56
04	2 122		15,964		04	1188	74	7471	83	04	5142	8	0846	55
06	1,863		10,676		06	1336	72	7305	81 5	06	5158	7	0736	55
08	1,678		8,038		08	1480	71	7142	80 5	08	5172	5 5	0626	54 5
0 10	− 1,534	+ 59	− 6,459		1,10	1622	+ 69	6981	+ 79	2 10	5183	+ 4 5	0517	+ 54
12	1,416	50	5,409		12	1760	67 5	6823	78	12	5192	3 5	0409	54
14	1,316	44	4,662		14	1895	65 5	6667	77	14	5199	2 5	0301	53
16	1,228	38 5	4,103		16	2026	64 5	6513	76	16	5204	1 5	0195	52 5
18	1,151	35	3,670		18	2155	63	6361	75	18	5207	+ 0 5	0090	52 5
0 20	− 1,081	+ 31 5	− 3,324		1 20	2281	+ 61 5	6211	+ 74	2 20	5208	− 0 5	*0015	+ 51 5
22	1,018	29,5	3,042		22	2404	59 5	6063	73 5	22	5207	2	0118	51 5
24	0,959	27	2,807		24	2523	58 5	5916	72 5	24	5203	2 5	0221	51
26	0,905	25	2,609		26	2640	57	5771	71 5	26	5198	4	0323	50
28	0,855	24	2,440		28	2754	55 5	5628	71 5	28	5190	6 5	0423	50
0,30	− 0 807	+ 22	− 2,293	+ 64	1,30	2865	+ 54 5	5485	+ 70 5	2 30	5181	− 6	0523	+ 49
32	0,763	21	2,165	56 5	32	2974	52 5	5344	70	32	5169	6 5	0621	49
34	0,721	20	2,052	50	34	3079	51 5	5204	69	34	5156	7 5	0719	48
36	0,681	19,5	1,952	45	36	3182	50	5066	69	36	5141	9	0815	48
38	0,642	18	1,862	40 5	38	3282	48 5	4928	68 5	38	5123	9 5	0911	47
0,40	− 0 6060	+ 174	− 1 781	+ 36 5	1,40	3379	+ 47	4791	+ 67,5	2 40	5104	− 10 5	1005	+ 46 5
42	0,5712	167 5	1,708	33 5	42	3473	46	4656	67 5	42	5083	11 5	1098	46
44	0 5377	161	1,641	30 5	44	3565	44 5	4521	66 5	44	5060	12	1190	45 5
46	0,5055	155	1,580	28 5	46	3654	43 5	4388	66 5	46	5036	13 5	1281	45
48	0,4745	150	1,523	26	48	3741	41 5	4255	66	48	5009	14	1371	44
0,50	− 0,4445	+ 144 5	− 1,471	+ 24	1 50	3824	+ 41	4123	+ 65 5	2 50	4981	− 15	1459	+ 44
52	0,4156	140	1,423	22 5	52	3906	39	3992	65	52	4951	16	1547	43
54	0,3876	136	1,378	20 5	54	3984	38	3862	65	54	4919	17	1633	42,5
56	0,3604	131 5	1 337	20	56	4060	36 5	3732	64	56	4885	17 5	1718	41 5
58	0,3341	128	1,297	18 5	58	4133	35 5	3604	64	58	4850	18 5	1801	41 5
0,60	− 0,3085	+ 124	− 1 260	+ 17	1,60	4204	+ 34 5	3476	+ 63 5	2 60	4813	− 19	1884	+ 40 5
62	0,2837	121	1,226	16 5	62	4273	32 5	3349	63 5	62	4775	20	1965	40
64	0,2595	118	1,193	16	64	4338	31 5	3222	63	64	4735	21	2045	39
66	0,2359	114,5	1,161	14 5	66	4401	30 5	3096	62	66	4693	21 5	2123	38 5
68	0,2130	111,5	1 132	14 5	68	4462	29	2972	62 5	68	4650	22 5	2200	38
0,70	− 0,1907	+ 109	− 1,1032	+ 135 5	1,70	4520	+ 28	2847	+ 61 5	2 70	4605	− 23	2276	+ 37 5
72	0,1689	106 5	1,0761	129,5	72	4576	26 5	2724	61 5	72	4559	24	2351	36 5
74	0,1476	103,5	1,0502	124 5	74	4629	25 5	2601	61	74	4511	24,5	2424	36
76	0,1269	101,5	1,0253	120	76	4680	24	2479	61	76	4462	25,5	2496	35
78	0,1066	99	1,0013	116	78	4728	23	2357	60	78	4411	26	2566	34 5
0,80	− 0,0868	+ 96 5	− 0,9781	+ 111 5	1 80	4774	+ 22	2237	+ 60	2 80	4359	− 26 5	2635	+ 34
82	0,0675	94 5	0,9558	108	82	4818	20 5	2117	60	82	4306	27 5	2703	33
84	0,0486	92,5	0,9342	105	84	4859	19 5	1997	59	84	4251	28	2769	32 5
86	0,0301	90,5	0,9132	101 5	86	4898	18	1879	59	86	4195	28 5	2834	31 5
88	− 0,0120	88	0,8929	99	88	4934	17	1761	58 5	88	4138	29 5	2897	31
0 90	+ 0,0056	+ 86,5	− 0,8731	+ 96	1,90	4968	+ 16	1644	+ 58	2,90	4079	− 30	2959	+ 30 5
92	0,0229	84,5	0,8539	94	92	5000	14 5	1528	58	92	4019	30 5	3020	29 5
94	0,0398	82,5	0,8351	92	94	5029	13 5	1412	57 5	94	3958	31	3079	28 5
96	0,0563	81	0,8167	89,5	96	5056	12 5	1297	56 5	96	3896	31,5	3136	28
98	0,0725	79	0,7988	88	98	5081	11 5	1184	57	98	3833	32	3192	27 5
1,00	+ 0 0883		− 0,7812		2 00	5104		1070		3,00	3769		3247	
						+ 0,		− 0,			+ 0,		+ 0,	

Продолжение табл. 47

x	$N_0(x)$		$N_1(x)$		x	$N_0(x)$		$N_1(x)$		x	$N_0(x)$		$N_1(x)$	
	+ 0,		+ 0,			— 0,		+ 0,			— 0,		+ 0,	
3,00	3769	— 33	3247	+ 26,5	4,00	0169	— 40	3979	— 12	5,00	3085	— 14,5	1479	— 34
02	3703	33	3300	25,5	02	0249	39 5	3955	12,5	02	3114	14	1411	34
04	3637	34	3351	25	04	0328	39	3930	13,5	04	3142	13	1343	34
06	3569	34,5	3401	24	06	0406	39	3903	14	06	3168	12,5	1275	34,5
08	3500	34,5	3449	23,5	08	0484	38 5	3875	14,5	08	3193	13,5	1206	34,5
3,10	3431	— 35	3496	+ 23	4,10	0561	— 38,5	3846	— 15,5	5,10	3216	— 11	1137	— 34
12	3361	36	3542	21,5	12	0638	38	3815	16	12	3238	10,5	1069	34 5
14	3289	36	3585	21	14	0714	37,5	3783	16,5	14	3259	9 5	1000	35
16	3217	36,5	3627	20,5	16	0789	37,5	3750	17	16	3278	9	0930	34 5
18	3144	36 5	3668	19,5	18	0864	37	3716	18	18	3296	8,5	0861	34 5
3 20	3071	— 37,5	3707	+ 19	4,20	0938	— 36,5	3680	— 18,5	5,20	3313	— 7,5	0792	— 34 5
22	2996	37,5	3745	17,5	22	1011	36	3643	19	22	3328	6,5	0723	35
24	2921	38	3780	17,5	24	1083	36	3605	19,5	24	3341	6 5	0653	34,5
26	2845	38,5	3815	16	26	1155	35,5	3566	20,5	26	3354	5 5	0584	34,5
28	2768	38 5	3847	16	28	1226	35	3525	20,5	28	3365	4,5	0515	35
3 30	2691	— 39	3879	+ 14,5	4,30	1296	— 34,5	3484	— 21,5	5,30	3374	— 4,5	0445	— 34,5
32	2613	39	3908	14	32	1365	34,5	3441	22	32	3383	3	0376	34,5
34	2535	39,5	3936	13	34	1434	33,5	3397	22	34	3389	3	0307	34,5
36	2456	40	3962	12,5	36	1501	33 5	3353	23	36	3395	2	0238	34
38	2376	40	3987	11,5	38	1568	32,5	3307	23,5	38	3399	1,5	0170	34,5
3 40	2296	— 40	4010	+ 11	4,40	1633	— 32,5	3260	— 24	5,40	3402	— 0,5	0101	— 34
42	2216	40,5	4032	10	42	1698	32	3212	24,5	42	3403	0	0033	34
44	2135	40,5	4052	9	44	1762	31 5	3163	25	44	3403	+ 0,5	*0035	34
46	2054	41	4070	8,5	46	1825	30 5	3113	25,5	46	3402	1,5	0103	33 5
48	1972	41	4087	7,5	48	1886	30 5	3062	26	48	3399	2	0170	34
3,50	1890	— 41	4102	+ 6,5	4,50	1947	— 30	3010	— 26,5	5,50	3395	+ 3	0238	— 33
52	1808	41	4115	6	52	2007	29	2957	26,5	52	3389	3	0304	33 5
54	1726	41 5	4127	5 5	54	2065	29	2904	27,5	54	3383	4	0371	33
56	1643	41,5	4138	4,5	56	2123	28	2849	27,5	56	3375	5	0437	33
58	1560	41,5	4147	3,5	58	2179	28	2794	28,5	58	3365	5,5	0503	32,5
3 60	1477	— 41,5	4154	+ 3	4,60	2235	— 27	2737	— 28 5	5,60	3354	+ 6	0568	— 32,5
62	1394	41,5	4160	2	62	2289	26,5	2680	28,5	62	3342	6 5	0633	32
64	1311	42	4164	1	64	2342	26	2623	29,5	64	3329	7	0697	32
66	1227	41,5	4166	+ 0 5	66	2394	25	2564	29,5	66	3315	8	0761	31,5
68	1144	41,5	4167	0	68	2444	25	2505	30	68	3299	8,5	0824	31,5
3,70	1061	— 42	4167	— 1	4,70	2494	— 24	2445	— 30,5	5,70	3282	+ 9,5	0887	— 31
72	0977	41,5	4165	2	72	2542	23,5	2384	30,5	72	3263	9,5	0949	31
74	0894	41,5	4161	2,5	74	2589	23	2323	31	74	3244	10,5	1011	30,5
76	0811	41 5	4156	3,5	76	2635	22,5	2261	31	76	3223	11	1072	30,5
78	0728	41 5	4149	4	78	2680	21,5	2199	31,5	78	3201	12	1133	29,5
3,80	0645	— 41,5	4141	— 4,5	4,80	2723	— 21	2136	— 32	5,80	3177	+ 12	1192	— 29,5
82	0562	41	4132	6	82	2765	20,5	2072	32	82	3153	13	1251	29,5
84	0480	41,5	4120	6	84	2806	19,5	2008	32,5	84	3127	13	1310	29
86	0397	41	4108	7	86	2845	19,5	1943	32,5	86	3101	14	1368	28,5
88	0315	40,5	4094	8	88	2884	18,5	1878	33	88	3073	14,5	1425	28
3 90	0234	— 41	4078	— 8,5	4,90	2921	— 17,5	1812	— 33	5,90	3044	+ 15,5	1481	— 27,5
92	0152	40,5	4061	9	92	2956	17	1746	33	92	3013	15,5	1536	27,5
94	0071	40	4043	10	94	2990	16,5	1680	33,5	94	2982	16	1591	27
96	*0009	40,5	4023	10,5	96	3023	16	1613	33,5	96	2950	17	1645	26,5
98	0090	39,5	4002	11,5	98	3055	15	1546	33,5	98	2916	17	1698	26
4 00	0169		3979		5,00	3085		1479		6,00	2882		1750	
	— 0,		+ 0,			— 0,		+ 0,			— 0,		— 0,	

Продолжение табл. 47

x	$N_0(x)$		$N_1(x)$		x	$N_0(x)$		$N_1(x)$		x	$N_0(x)$		$N_1(x)$	
	$-0,$		$-0,$			$-0,$		$-0,$			$+0,$		$-0,$	
6,00	2882	+ 18	1750	− 25,5	7,00	0259	+ 30	3027	+ 2	8,00	2235	+ 15 5	1581	+ 24 5
02	2846	18	1801	25,5	02	0199	30	3023	3	02	2266	15	1532	25
04	2810	19	1852	25	04	0139	30 5	3017	3	04	2296	15	1482	25
06	2772	19	1902	24	06	0078	30	3011	4	06	2326	14	1432	25
08	2734	20	1950	24	08	0018	30	3003	4	08	2354	13,5	1382	25 5
6,10	2694	+ 20	1998	− 23 5	7,10	*0042	+ 30	2995	+ 5	8,10	2381	+ 13	1331	+ 25,5
12	2654	20,5	2045	23	12	0102	29,5	2985	5,5	12	2407	12 5	1280	25 5
14	2613	21,5	2091	22 5	14	0161	30	2974	6	14	2432	12	1229	26
16	2570	21 5	2136	22	16	0221	29,5	2962	6,5	16	2456	11 5	1177	26
18	2527	22	2180	21,5	18	0280	29,5	2949	7,5	18	2479	11	1125	26,5
6,20	2483	+ 22,5	2223	− 21	7,20	0339	+ 29	2934	+ 7,5	8 20	2501	+ 10.5	1072	+ 26
22	2438	22 5	2265	20,5	22	0397	29	2919	8 5	22	2522	10	1020	26 5
24	2393	23,5	2306	20	24	0455	29	2902	8 5	24	2542	9 5	0967	27
26	2346	23,5	2346	19,5	26	0513	29	2885	9,5	26	2561	8 5	0913	26 5
28	2299	24	2385	18,5	28	0571	28,5	2866	10	28	2578	8 5	0860	27
6,30	2251	+ 24 5	2422	− 18,5	7,30	0628	+ 28	2846	+ 10,5	8,30	2595	+ 8	0806	+ 27
32	2202	25	2459	18	32	0684	28,5	2825	11	32	2611	7	0752	27
34	2152	25	2495	17,5	34	0741	28	2803	11,5	34	2625	7	0698	27
36	2102	25,5	2530	16,5	36	0797	27,5	2780	12	36	2639	6	0644	27,5
38	2051	26	2563	16,5	38	0852	27,5	2756	12,5	38	2651	5,5	0589	27
6,40	1999	+ 26	2596	− 15,5	7,40	0907	+ 27	2731	+ 13	8,40	2662	+ 5	0535	+ 27 5
42	1947	26,5	2627	15	42	0961	27	2705	13,5	42	2672	4 5	0480	27
44	1894	26,5	2657	14,5	44	1015	26,5	2678	14	44	2681	4	0426	27,5
46	1841	27	2686	14	46	1068	26,5	2650	14,5	46	2689	3 5	0371	27,5
48	1787	27,5	2714	13,5	48	1121	26	2621	15	48	2696	3	0316	27
6,50	1732	+ 27,5	2741	− 13	7,50	1173	+ 26	2591	+ 15,5	8,50	2702	+ 2 5	0262	+ 27,5
52	1677	27,5	2767	12	52	1225	25,5	2560	15,5	52	2707	1,5	0207	27,5
54	1622	28	2791	11,5	54	1276	25	2529	16,5	54	2710	1,5	0152	27
56	1566	28,5	2814	11	56	1326	24,5	2496	17	56	2713	0,5	0098	27,5
58	1509	28,5	2836	10,5	58	1375	24,5	2462	17	58	2714	+ 0,5	0043	27
6,60	1452	+ 28,5	2857	− 10	7,60	1424	+ 24	2428	+ 17,5	8,60	2715	− 0,5	*0011	+ 27
62	1395	29	2877	9,5	62	1472	24	2393	18	62	2714	1	0065	27
64	1337	29	2896	8 5	64	1520	23,5	2357	18,5	64	2712	1,5	0119	27
66	1279	29	2913	8 5	66	1567		2320	19	66	2709	2	0173	27
68	1221	29,5	2930	7,5	68	1613	22,5	2282	19,5	68	2705	2,5	0227	26,5
6,70	1162	+ 29,5	2945	− 6,5	7,70	1658	+ 22	2243	+ 19,5	8,70	2700	− 3	0280	+ 26,5
72	1103	29,5	2958	6,5	72	1702	22	2204	20	72	2694	3,5	0333	26,5
74	1044	30	2971	6	74	1746	21,5	2164	20,5	74	2687	4,5	0386	26,5
76	0984	30	2983	5	76	1789	21	2123	21	76	2678	4,5	0439	26
78	0924	30	2993	4,5	78	1831	20,5	2081	21	78	2669	5	0491	26,5
6,80	0864	+ 30	3002	− 4	7,80	1872	+ 20,5	2039	+ 21,5	8,80	2659	− 6	0544	+ 25,5
82	0804	30	3010	3	82	1913	19,5	1996	22	82	2647	6	0595	26
84	0744	30	3016	3	84	1952	19,5	1952	22	84	2635	7	0647	25,5
86	0684	30,5	3022	2	86	1991	18,5	1908	22,5	86	2621	7	0698	25
88	0623	30	3026	1,5	88	2028	18,5	1863	23	88	2607	7,5	0748	25,5
6,90	0563	+ 30,5	3029	− 1	7,90	2065	+ 18	1817	+ 23	8,90	2592	− 8,5	0799	+ 25
92	0502	30,5	3031	− 0,5	92	2101	17,5	1771	23,5	92	2575	8,5	0849	24,5
94	0441	30	3032	+ 0,5	94	2136	17	1724	23,5	94	2558	9,5	0898	24,5
96	0381	30,5	3031	0 5	96	2170	16,5	1677	24	96	2539	9,5	0947	24
98	0320	30,5	3030	1,5	98	2203	16	1629	24	98	2520	10,5	0995	24
7,00	0259		3027		8,00	2235		1581		9,00	2499		1043	
	$-0,$		$-0,$			$+0,$		$-0.$			$+0,$		$+0,$	

Продолжение табл. 47

x	$N_0(x)$		$N_1(x)$		x	$N_0(x)$		$N_1(x)$		x	$N_0(x)$		$N_1(x)$	
	+ 0,		+ 0,			+ 0,		+ 0,			− 0,		+ 0,	
9,00	2499	− 10 5	1043	+ 24	10,00	0557	− 25	2490	+ 3	11,00	1688	− 16,5	1637	− 18,5
02	2478	11	1091	23	02	0507	25	2496	2	02	1721	15,5	1600	19
04	2456	11,5	1137	23,5	04	0457	25	2500	2	04	1752	15,5	1562	19
06	2433	12,5	1184	22,5	06	0407	25	2504	1,5	06	1783	15	1524	19
08	2408	12 5	1229	23	08	0357	25	2507	0,5	08	1813	15	1486	20
9,10	2383	− 13	1275	+ 22	10,10	0307	− 25,5	2508	+ 0,5	11,10	1843	− 14	1446	− 19,5
12	2357	13	1319	22	12	0256	25	2509	0	12	1871	14	1407	20,5
14	2331	14	1363	21,5	14	0206	25	2509	− 1	14	1899	13 5	1366	20
16	2303	14 5	1406	21,5	16	0156	25	2507	1	16	1926	13	1326	20,5
18	2274	14 5	1449	21	18	0106	25	2505	1,5	18	1952	12,5	1285	21
9,20	2245	− 15	1491	+ 20 5	10,20	0056	− 25	2502	− 2	11,20	1977	− 12,5	1243	− 21
22	2215	15,5	1532	20 5	22	0006	25	2498	3	22	2002	11,5	1201	21
24	2184	16	1573	20	24	*0044	25	2492	3	24	2025	11,5	1159	21,5
26	2152	16 5	1613	19,5	26	0094	24,5	2486	3,5	26	2048	11	1116	21,5
28	2119	16 5	1652	19 5	28	0143	25	2479	4	28	2070	10 5	1073	22
9,30	2086	− 17	1691	+ 18,5	10,30	0193	− 24,5	2471	− 4,5	11,30	2091	− 10	1029	− 21,5
32	2052	17 5	1728	18,5	32	0242	24,5	2462	5,5	32	2111	9,5	0986	22,5
34	2017	18	1765	18	34	0291	24,5	2451	5,5	34	2130	9,5	0941	22
36	1981	18	1801	18	36	0340	24,5	2440	6	36	2149	8,5	0897	22,5
38	1945	19	1837	17	38	0389	24	2428	6	38	2166	8,5	0852	22,5
9,40	1907	− 18,5	1871	+ 17	10,40	0437	− 24,5	2416	− 7	11,40	2183	− 8	0807	− 22,5
42	1870	19 5	1905	16 5	42	0486	24	2402	7 5	42	2199	7	0762	22,5
44	1831	19 5	1938	16	44	0534	23,5	2387	8	44	2213	7	0717	23
46	1792	20	1970	15 5	46	0581	23,5	2371	8	46	2227	6 5	0671	23
48	1752	20	2001	15 5	48	0628	23,5	2355	9	48	2240	6	0625	23
9,50	1712	− 20,5	2032	+ 14,5	10,50	0675	− 23 5	2337	− 9	11,50	2252	− 5,5	0579	− 23
52	1671	20 5	2061	14 5	52	0722	23	2319	10	52	2263	5,5	0533	23
54	1630	21	2090	14	54	0768	23	2299	10	54	2274	4,5	0487	23
56	1588	21 5	2118	13 5	56	0814	22,5	2279	10,5	56	2283	4	0441	23,5
58	1545	21 5	2145	13	58	0859	22 5	2258	11	58	2291	4	0394	23
9,60	1502	− 22	2171	+ 12 5	10 60	0904	− 22,5	2236	− 11	11,60	2299	− 3	0348	− 23,5
62	1458	22	2196	12	62	0949	22	2214	12	62	2305	3	0301	23,5
64	1414	22,5	2220	11 5	64	0993	21,5	2190	12	64	2311	2	0254	23
66	1369	22,5	2243	11	66	1036	21,5	2166	13	66	2315	2	0208	23,5
68	1324	22,5	2265	11	68	1079	21,5	2140	13	68	2319	1 5	0161	23,5
9,70	1279	− 23	2287	+ 10	10,70	1122	− 21	2114	− 13	11,70	2322	− 1	0114	− 23
72	1233	23,5	2307	9 5	72	1164	20,5	2088	14	72	2324	− 0,5	0068	23,5
74	1186	23	2326	9,5	74	1205	20 5	2060	14	74	2325	+ 0,5	0021	23
76	1140	23,5	2345	8,5	76	1246	20 5	2032	14,5	76	2324	0	*0025	23,5
78	1093	24	2362	8 5	78	1287	19,5	2003	15	78	2324	1	0072	23
9,80	1045	− 23,5	2379	+ 7,5	10,80	1326	− 20	1973	− 15,5	11,80	2322	+ 1,5	0118	− 23
82	0998	24 5	2394	7,5	82	1366	19	1942	15,5	82	2319	2	0164	23
84	0949	24	2409	7	84	1404	19	1911	16	84	2315	2,5	0210	23
86	0901	24	2423	6	86	1442	18 5	1879	16,5	86	2310	2,5	0256	23
88	0853	24,5	2435	6	88	1479	18,5	1846	16,5	88	2305	3,5	0302	22,5
9,90	0804	− 24,5	2447	+ 5,5	10,90	1516	− 18	1813	− 17	11,90	2298	+ 3,5	0347	− 22,5
92	0755	25	2458	4,5	92	1552	17,5	1779	17	92	2291	4	0392	22,5
94	0705	24,5	2467	4,5	94	1587	17,5	1745	18	94	2283	5	0437	22,5
96	0656	25	2476	4	96	1622	16,5	1709	17,5	96	2273	5	0482	22,5
98	0606	24,5	2484	3	98	1655	16,5	1674	18,5	98	2263	5,5	0527	22
10,00	0557		2490		11,00	1688		1637		12,00	2252		0571	
	+ 0,		+ 0,			− 0,		+ 0,			− 0,		− 0,	

Продолжение табл. 47

x	$N_0(x)$		$N_1(x)$		x	$N_0(x)$		$N_1(x)$		x	$N_0(x)$		$N_1(x)$	
	−0,		−0,			−0,		−0,			+0,		−0,	
12,00	2252	+ 5,5	0571	− 22	13,00	0782	+ 21	2101	− 6	14,00	1272	+ 16,5	1666	+ 14
02	2241	6,5	0615	22	02	0740	21	2113	5,5	02	1305	16	1638	14
04	2228	7	0659	21,5	04	0698	21,5	2124	5	04	1337	16	1610	15
06	2214	7	0702	21,5	06	0655	21,5	2134	5	06	1369	16	1580	15
08	2200	8	0745	21	08	0612	21,5	2144	4	08	1401	15	1550	15
12,10	2184	+ 8	0787	− 21,5	13,10	0569	+ 21,5	2152	− 4	14,10	1431	+ 15	1520	+ 15,5
12	2168	8,5	0830	20,5	12	0526	21,5	2160	3,5	12	1461	15	1489	16
14	2151	9	0871	21	14	0483	22	2167	2,5	14	1491	14,5	1457	16
16	2133	9	0913	20,5	16	0439	21,5	2172	3	16	1520	14	1425	16,5
18	2115	10	0954	20	18	0396	22	2178	2	18	1548	13,5	1392	16,5
12,20	2095	+ 10	0994	− 20	13,20	0352	+ 21,5	2182	− 1,5	14,20	1575	+ 13,5	1359	+ 17
22	2075	10,5	1034	20	22	0309	22	2185	1	22	1602	13	1325	17
24	2054	11	1074	19,5	24	0265	22	2187	1	24	1628	13	1291	17
26	2032	11,5	1113	19	26	0221	22	2189	− 0,5	26	1654	12,5	1257	17,5
28	2009	11,5	1151	19	28	0177	21,5	2190	0	28	1679	12	1222	18
12,30	1986	+ 12	1189	− 19	13,30	0134	+ 22	2190	+ 1	14,30	1703	+ 11,5	1186	+ 18
32	1962	12,5	1227	18,5	32	0090	22	2188	0,5	32	1726	11,5	1150	18
34	1937	13	1264	18	34	0046	22	2187	1,5	34	1749	11	1114	18,5
36	1911	13	1300	18	36	0002	21,5	2184	2	36	1771	10,5	1077	18,5
38	1885	13,5	1336	17,5	38	*0041	22	2180	2	38	1792	10	1040	18,5
12,40	1858	+ 14	1371	− 17,5	13,40	0085	+ 21,5	2176	+ 3	14,40	1812	+ 10	1003	+ 19
42	1830	14	1406	17	42	0128	22	2170	3	42	1832	9,5	0965	19
44	1802	15	1440	17	44	0172	21,5	2164	3,5	44	1851	9	0927	19,5
46	1772	14,5	1474	16	46	0215	21,5	2157	4	46	1869	8,5	0888	19,5
48	1743	15,5	1506	16	48	0258	21,5	2149	4,5	48	1886	8,5	0849	19,5
12,50	1712	+ 15,5	1538	− 16	13,50	0301	+ 21	2140	+ 4,5	14,50	1903	+ 8	0810	+ 19,5
52	1681	16	1570	15,5	52	0343	21,5	2131	5,5	52	1919	7,5	0771	19,5
54	1649	16	1601	15	54	0386	21	2120	5,5	54	1934	7	0732	20
56	1617	16,5	1631	14,5	56	0428	21	2109	6	56	1948	7	0692	20
58	1584	16,5	1660	14,5	58	0470	21	2097	6,5	58	1962	6	0652	20
12,60	1551	+ 17	1689	− 14	13,60	0512	+ 21	2084	+ 7	14,60	1974	+ 6	0612	+ 20,5
62	1517	17,5	1717	13,5	62	0554	20,5	2070	7	62	1986	5,5	0571	20
64	1482	17,5	1744	13,5	64	0595	20,5	2056	8	64	1997	5	0531	20,5
66	1447	18	1771	12,5	66	0636	20,5	2040	8	66	2007	5	0490	20,5
68	1411	18	1796	12,5	68	0677	20	2024	8,5	68	2017	4	0449	20,5
12,70	1375	+ 18,5	1821	− 12,5	13,70	0717	+ 20	2007	+ 8,5	14,70	2025	+ 4	0408	+ 20,5
72	1338	18,5	1846	11,5	72	0757	19,5	1990	9,5	72	2033	3,5	0367	20,5
74	1301	18,5	1869	11,5	74	0796	20	1971	9,5	74	2040	3	0326	21
76	1264	19	1892	11	76	0836	19,5	1952	10	76	2046	2,5	0284	20,5
78	1226	19,5	1914	10,5	78	0875	19	1932	10	78	2051	2,5	0243	20,5
12,80	1187	+ 19,5	1935	− 10	13,80	0913	+ 19	1912	+ 11	14,80	2056	+ 1,5	0202	+ 21
82	1148	19,5	1955	10	82	0951	19	1890	11	82	2059	1,5	0160	20,5
84	1109	20	1975	9	84	0989	18,5	1868	11,5	84	2062	1	0119	21
86	1069	20	1993	9	86	1026	18	1845	11,5	86	2064	+ 0,5	0077	20,5
88	1029	20	2011	8,5	88	1062	18,5	1822	12	88	2065	0	0036	20,5
12,90	0989	+ 20,5	2028	− 8	13,90	1099	+ 17,5	1798	+ 12,5	14,90	2065	0	*0005	+ 21
92	0948	20,5	2044	8	92	1134	17,5	1773	13	92	2065	− 0,5	0047	20,5
94	0907	20,5	2060	7	94	1169	17,5	1747	13	94	2064	1,5	0088	20,5
96	0866	21	2074	7	96	1204	17	1721	13,5	96	2061	1,5	0129	20,5
98	0824	21	2088	6,5	98	1238	17	1694	14	98	2058	1,5	0170	20,5
13,00	0782		2101		14,00	1272		1666		15,00	2055		0211	
	−0,		−0,			+0,		−0,			+0,		+0,	

Продолжение табл. 47

x	$N_0(x)$		$N_1(x)$		x	$N_0(x)$		$N_1(x)$		x	$N_0(x)$		$N_1(x)$	
	+ 0,		+ 0,			+ 0,		+ 0,			+ 0,		+ 0,	
15,00	2055	— 2 5	0211	+ 20	15,40	1813	— 10	0979	+ 17	15 80	1295	— 16	1575	+ 12
02	2050	2 5	0251	20,5	42	1793	10 5	1013	17 5	82	1263	16	1599	11
04	2045	3 5	0292	20	44	1772	10 5	1048	17	84	1231	16 5	1621	11,5
06	2038	3 5	0332	20,5	46	1751	11	1082	16 5	86	1198	16 5	1644	10,5
08	2031	4	0373	20	48	1729	11 5	1115	16 5	88	1165	16 5	1665	10 5
15,10	2023	— 4	0413	+ 20	15,50	1706	— 11,5	1148	+ 16	15,90	1132	— 17	1686	+ 10
12	2015	5	0453	19 5	52	1683	12	1180	16	92	1098	17 5	1706	10
14	2005	5	0492	19 5	54	1659	12	1212	16	94	1063	17	1726	9
16	1995	5 5	0531	20	56	1635	12	1244	15	96	1029	17 5	1744	9
18	1984	6	0571	19	58	1610	13	1274	15 5	98	0994	18	1762	9
15 20	1972	— 6	0609	+ 19 5	15 60	1584	— 13 5	1305	+ 14 5	16,00	0958		1780	
22	1960	7	0648	19	62	1557	13 5	1334	14 5		+ 0,		+ 0,	
24	1946	7	0686	19	64	1530	13 5	1363	14,5					
26	1932	7 5	0724	18,5	66	1503	14	1392	14					
28	1917	7 5	0761	19	68	1475	14 5	1420	13,5					
15 30	1902	— 8 5	0799	+ 18	15 70	1446	— 14 5	1447	+ 13,5					
32	1885	8 5	0835	18,5	72	1417	15	1474	13					
34	1868	8 5	0872	18	74	1387	15	1500	13					
36	1851	9 5	0908	17,5	76	1357	15 5	1526	12 5					
38	1832	9 5	0943	18	78	1326	15 5	1551	12					
15,40	1813		0979		15,80	1295		1575						
	+ 0,		+ 0,			+ 0,		+ 0,						

3. Интегральные представления

3.1. Для $n=0, 1, 2, \ldots$ имеем:

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin t-nt)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{i(z\sin t-nt)}dt \qquad \text{(Бессель).}$$

3.2. При $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$ справедливы формулы (Пуассон)

$$J_\nu(z)=\frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(z\cos t)\sin^{2\nu}t\,dt,$$

$$N_\nu(z)=\frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(z\sin t)\cos^{2\nu}t\,dt-\int_0^{+\infty}e^{-z\operatorname{sh}t}\operatorname{ch}^{2\nu}t\,dt\right]\ (\operatorname{Re}z>0),$$

а при $-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$ для положительных значений аргумента

$$J_\nu(x)=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\int_1^{+\infty}\frac{\sin xt}{(t^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}}dt,$$

$$N_\nu(x)=-\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\int_1^{+\infty}\frac{\cos xt}{(t^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}}dt. \qquad \text{(Мелер, Сонин)}$$

3.3. Для произвольного ν в правой полуплоскости ($\operatorname{Re} z>0$ или $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}$) получаем представление через контурный интеграл

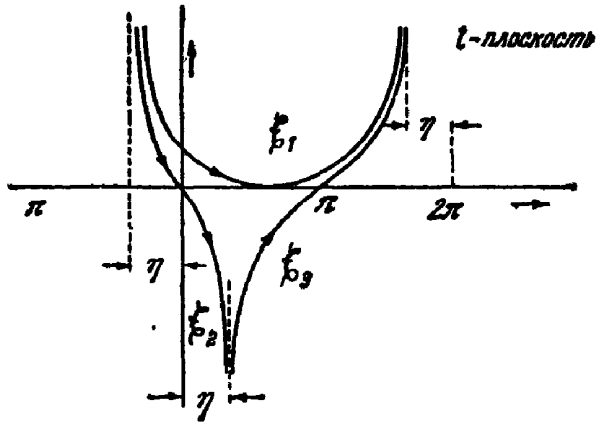


Рис. 121. Пути интегрирования в интеграле Зоммерфельда.

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+0} e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\,t^{-\nu-1}dt.$$

(Сонин)

3.4. Для произвольного ν имеем (Зоммерфельд):

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{C}_1} e^{iz\cos t}\,e^{i\nu(t-\pi/2)}\,dt,$$

$$H_\nu^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{C}_2} e^{iz\cos t}\,e^{i\nu(t-\pi/2)}\,dt,$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{C}_3} e^{iz\cos t}\,e^{i\nu(t-\pi/2)}\,dt.$$

При этом пути интегрирования выбираются следующим образом (рис. 121): для любого числа η, $0\leqslant\eta\leqslant\pi$, $\mathfrak{C}_1$ есть кривая, пробегаемая от $-\eta+i\infty$ до $2\pi-\eta+i\infty$; $\mathfrak{C}_2$ — от $-\eta+i\infty$ до $\eta-i\infty$; $\mathfrak{C}_3$ — от $\eta-i\infty$ до $2\pi-\eta+i\infty$. Приведенные интегральные представления Зоммерфельда справедливы в области $-\eta<\arg z<\pi-\eta$.

4. Асимптотика

4.1. **Асимптотические разложения Ганкеля** справедливы для больших значений аргумента: $|z|\gg 1$, $|z|\gg\nu$. Обозначим

$$(\nu,\ 0)=1,\quad (\nu,\ m)=\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)\ldots(4\nu^2-(2m-1)^2)}{2^{2m}m!}\quad\text{для}\quad m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

и пусть $P_\nu(z)$, $Q_\nu(z)$, $S_\nu(z)$ означают следующие, формально построенные ряды *):

$$P_\nu(z)\equiv 1-\frac{\nu,\ 2}{(2z)^2}+\frac{(\nu,\ 4)}{(2z)^4}-\ldots,$$

$$Q_\nu(z)\equiv\frac{(\nu,\ 1)}{(2z)}-\frac{(\nu,\ 3)}{(2z)^3}+\ldots,$$

$$S_\nu(z)\equiv 1+\frac{(\nu,\ 1)}{z}+\frac{(\nu,\ 2)}{z^2}+\frac{(\nu,\ 3)}{z^3}+\ldots,$$

формально удовлетворяющие соотношению

$$S_\nu(\pm iz)\equiv P_\nu\left(\frac{z}{2}\right)\mp iQ_\nu\left(\frac{z}{2}\right).$$

*) Для $\nu=0,\ 1$ получим:

$$S_0(2z)\equiv 1-\frac{0{,}125}{z}+\frac{0{,}0703125}{z^2}-\frac{0{,}07324219}{z^3}+\frac{0{,}1121521}{z^4}-\frac{0{,}2271080}{z^5}+\ldots,$$

$$S_1(2z)\equiv 1+\frac{0{,}375}{z}-\frac{0{,}1171875}{z^2}+\frac{0{,}10253906}{z^3}-\frac{0{,}1441956}{z^4}+\frac{0{,}2775764}{z^5}-\ldots$$

Тогда имеем:

$$H_\nu^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} S_\nu(-2iz) \qquad (-\pi<\arg z<2\pi),$$

$$H_\nu^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} S_\nu(2iz) \qquad (-2\pi<\arg z<\pi),$$

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) P_\nu(z) - \sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) Q_\nu(z)\right]$$
$$(-\pi<\arg z<\pi),$$

$$N_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) P_\nu(z) + \cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) Q_\nu(z)\right]$$
$$(-\pi<\arg z<\pi).$$

Эти представления надо понимать в асимптотическом смысле; если оборвать ряды S_ν, P_ν, Q_ν после члена с z^{-m}, то получим ошибку, абсолютная величина которой меньше $\text{const}\cdot|z|^{-m-1}$ и которая, следовательно, стремится к нулю при $z|\longrightarrow\infty$. Отсюда следует, что в указанных выше областях справедливо первое приближение

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$
$$N_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \qquad (|z|\gg 1,\ |z|\gg\nu).$$

Если порядок ν и аргумент $z=x$ действительны и положительны, то ошибка, получаемая при обрывании асимптотических рядов после n-го члена, по абсолютной величине будет меньше первого отброшенного члена (и имеет для рядов P_ν, Q_ν знак отброшенного члена), если только n выбрано таким, чтобы соответственно $2n>\nu-\frac{1}{2}$ в P_ν, $2n>\nu-\frac{3}{2}$ в Q_ν и $n>\nu-\frac{1}{2}$ в S_ν. Следовательно, в практических вычислениях имеет смысл продолжать ряды только до тех пор, пока их члены убывают.

Чтобы уменьшить ошибку вычислений, получающуюся при обрывании ряда перед членом с наименьшей абсолютной величиной, можно прибавить этот член, умноженный на $f=\frac{1}{2}+\varepsilon$ (ε — малая величина). Более точные выражения для множителей f даны Барнеттом*):

1) $z=re^{i\varphi}$, $m-1<r<m+1$, m — целое, $r=m+\nu$, $-\frac{\pi}{6}<\varphi+\frac{\pi}{6}$:

$$f=\frac{1+i\operatorname{tg}\varphi}{2}+\frac{\pm 1+4\nu-i2\operatorname{tg}\varphi}{8r\cos^2\varphi} \quad \text{для } P_\nu(z),\ Q_\nu(z)$$

2) $z=iy$, $m-1<2y<m+1$, m — целое, $2y=m+t$:

$$f=\frac{1}{2}+\frac{1+2t}{16y}-\frac{\nu^2-\frac{3}{8}+\frac{t}{4}+\frac{t^2}{2}}{(4y)^2}+\ldots \quad \text{для } S_\nu(2y).$$

*) D. Burnett, Proc. Cambridge Philos. Soc., т. 26 (1930), стр. 145—151.

Эти же множители f в удобной форме найдены Эри*) $\left(x, y \text{ целые, } u=\frac{1}{4x}, v=\frac{1}{4y}\right)$:

$$f=\frac{1}{2}+\frac{u}{2}-2u^2+\frac{15}{2}u^3-\frac{103}{4}u^4\ldots \quad \text{для } P_0(x),$$

$$f=\frac{1}{2}-\frac{u}{2}+\frac{9}{2}u^3-\frac{159}{4}u^4\ldots \quad \text{для } Q_0(x),$$

$$f=\frac{1}{2}+\frac{u}{2}+\frac{7}{2}u^3-\frac{151}{4}u^4\ldots \quad \text{для } P_1(x),$$

$$f=\frac{1}{2}-\frac{u}{2}+2u^2-\frac{15}{2}u^3+\frac{49}{4}u^4\ldots \quad \text{для } Q_1(x),$$

$$f=\frac{1}{2}+\frac{v}{2}-\frac{3}{2}v^2+\frac{1}{2}v^3+\frac{43}{8}v^4-\frac{81}{2}v^5\ldots \quad \text{для } S_0(2y),$$

$$f=\frac{1}{2}+\frac{v}{2}+\frac{5}{2}v^2-\frac{7}{2}v^3-\frac{29}{2}v^5\ldots \quad \text{для } S_1(2y).$$

Если x, y — не целые, то множители f из этих формул можно получить интерполированием

4.2. Ряды Дебая дают асимптотические представления бесселевых функций для больших значений порядка или аргумента. В следующих выражениях пусть ν везде будет положительной действительной величиной.

Через $\mathfrak{E}(w)$ обозначим формально построенный ряд

$$\mathfrak{E}(w)=1+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{w}-\frac{5\nu^2}{3w^3}\right)+\frac{1\cdot3}{8^2}\left(\frac{3}{2w^2}-\frac{77\nu^2}{9w^4}+\frac{385\nu^4}{54w^6}\right)+$$
$$+\frac{1\cdot3\cdot5}{8^3}\left(\frac{5}{2w^3}-\frac{1521\nu^2}{50w^5}+\frac{17017\nu^4}{270w^7}-\frac{17017\nu^6}{486w^9}\right)+\ldots$$

Если m-й член этого ряда записать в форме

$$\frac{1\cdot3\ldots(2m-1)}{(8w)^m}\sum_{n=0}^{m}C_{m,n}\left(\frac{i\nu}{w}\right)^{2n},$$

то имеется рекуррентная формула

$$C_{0,0}=1, \qquad C_{m,-1}=C_{m,m+1}=0,$$

$$C_{m+1,n+1}=\frac{2k+1}{(2m+1)(k+1)}\left[(2k-3)C_{m,n}+(2k+1)C_{m,n+1}\right], \qquad k=m+2n+2.$$

В практических вычислениях следующие ряды должны быть оборваны на том месте, начиная с которого их члены перестают убывать.

а) Пусть аргумент $z=x$ положителен, действителен и меньше, чем порядок ν. Если положить

$$s^2=\nu^2-x^2, \quad u=-\frac{s}{\nu}+\operatorname{Arth}\frac{s}{\nu}=\frac{s^3}{3\nu^3}+\frac{s^5}{5\nu^5}+\ldots,$$

то при $1\ll s<\nu$, $\nu^2\ll s^3$ (практически может быть $s>6$, $s>2$, $5\nu^{2/3}$)

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}s}\cdot\left\{\begin{matrix}2J_\nu(x)\\-N_\nu(x)\end{matrix}\right\}\approx e^{\mp\nu u}\,\mathfrak{E}(\pm s).$$

*) J. R. Airey, Arch. Math. Phys., т. 20 (1913), стр. 240—244; т. 22 (1914), стр. 213—225.

b) Пусть аргумент $z=x$ положителен, действителен и больше, чем порядок ν. Если положить

$$s^2=x^2-\nu^2, \qquad \varphi=s-\nu\operatorname{arctg}\frac{s}{\nu}-\frac{\pi}{4}, \qquad \mathfrak{E}(is)=\mathfrak{E}_1(s)-i\mathfrak{E}_2(s),$$

то получим для $1\ll s$, $\nu^2\ll s^3$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}s}\cdot J_\nu(x)\approx\mathfrak{E}_1(s)\cos\varphi+\mathfrak{E}_2(s)\sin\varphi,$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}s}\cdot N_\nu(x)\approx\mathfrak{E}_1(s)\sin\varphi-\mathfrak{E}_2(s)\cos\varphi.$$

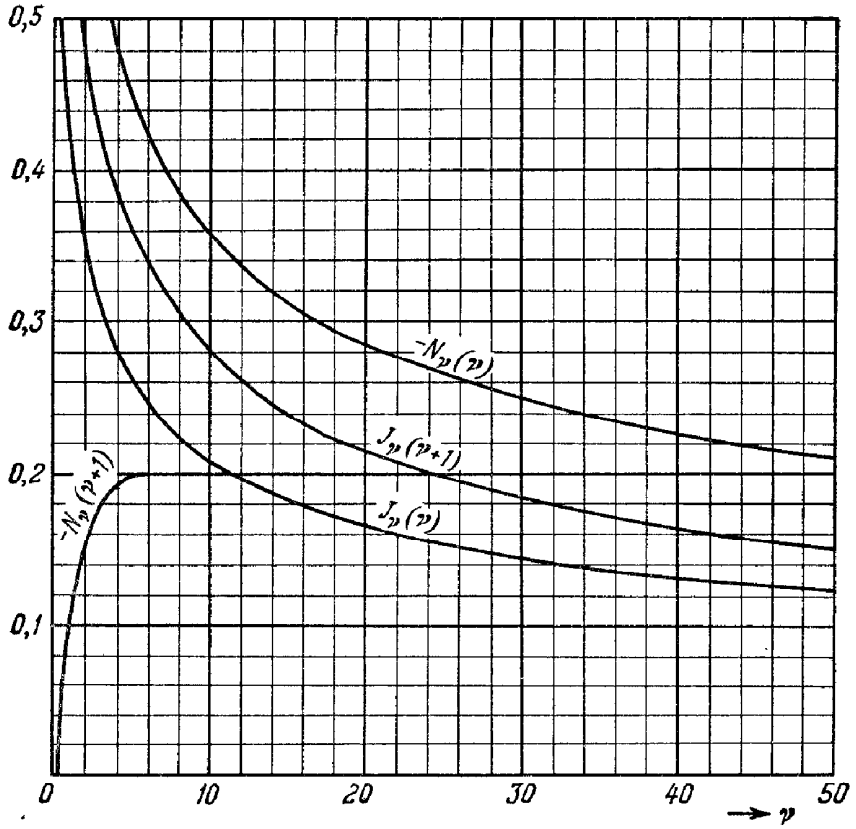


Рис. 122. Функции Бесселя и Неймана при $x=\nu$ и $x=\nu+1$.

c) Пусть аргумент $z=iy$ чисто мнимый и $y>0$. Если положить

$$s^2=\nu^2+y^2, \qquad u=\frac{s}{\nu}-\operatorname{arctg}\frac{\nu}{s},$$

то получим для $1\ll s$, $\nu^2\ll s^3$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}s}\,e^{-\frac{\nu\pi}{2}i}\,2J_\nu(iy)\approx e^{\nu u}\mathfrak{E}(s), \qquad \sqrt{\frac{\pi}{2}s}\,e^{\frac{(\nu+1)\pi}{2}i}\,H_\nu^{(1)}(iy)\approx e^{-\nu u}\mathfrak{E}(-s).$$

d) Пусть аргумент $z=re^{\frac{\pi}{4}i}$, где $r>0$. Если положить:

$$s^4=\nu^4+r^4, \quad \cos 2\sigma=\nu^2/s^2, \quad \text{откуда} \quad r^2=\nu^2\operatorname{tg}2\sigma=s^2\sin 2\sigma,$$

$$\cos 2\beta=\operatorname{tg}\sigma=\sqrt{\frac{s^2-\nu^2}{s^2+\nu^2}}, \qquad \operatorname{gd}2\alpha=2\beta, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{\operatorname{ch}2\alpha}=\cos 2\beta,$$

$$u=\operatorname{ch}2\alpha-\alpha, \qquad v=\operatorname{ctg}2\beta+\beta-\pi/2$$

($u=0$ при $\alpha=1{,}0327$ и $v=0$ при $\beta=0{,}3415$), то получим для $1\ll s$, $\nu^2\ll s^3$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}s}\begin{Bmatrix} Z_\nu\left(re^{\frac{\pi}{4}i}\right) \\ iH_\nu^{(1)}\left(re^{\frac{\pi}{4}i}\right)\end{Bmatrix}\approx e^{\pm\nu u+i\left(\frac{\sigma}{2}\mp\nu v\right)}\,\mathfrak{E}(\pm se^{-iv}).$$

Для $r<2\nu$ имеем $Z_\nu=2J_\nu$, для $r>2\nu$ имеем $Z_\nu=H_\nu^{(2)}\approx 2J_\nu$.

Если аргумент z мало отличается от порядка ν, в частности, если $z=x$ действительно и $|x-\nu|$ сравнимо с $\nu^{1/3}$, то указанные выше приближения

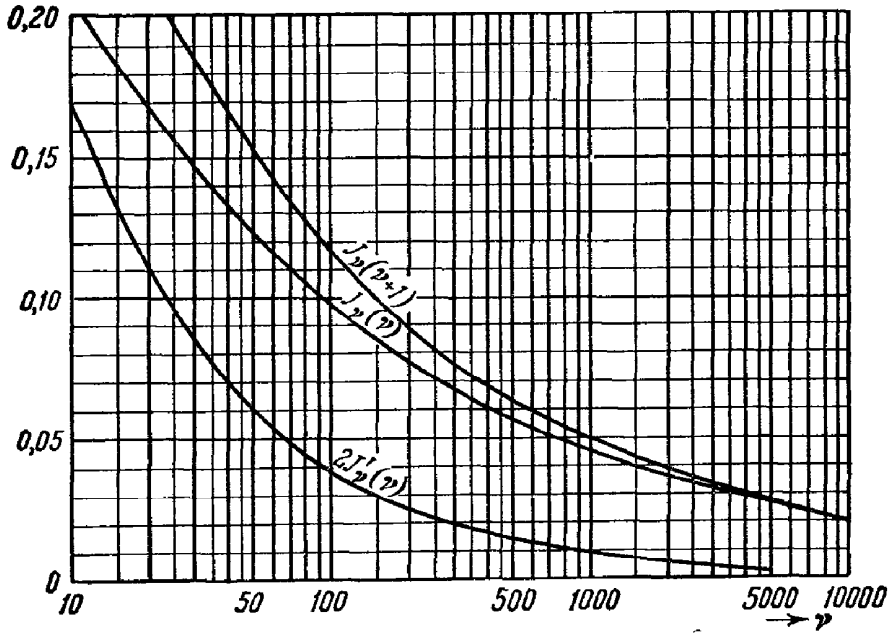


Рис. 123. Функции Бесселя при $x=\nu$ и $x=\nu+1$ для больших значений ν.

непригодны. Для случая $|x-\nu|/\nu^{1/3}\ll 1$ Дебай дал другие представления. При $x=\nu\gg 1$ имеем (рис. 122, 123):

$$H_\nu^{(1)}(\nu)\approx e^{\mp\frac{\pi}{3}i}\frac{0{,}8946146368}{\nu^{1/3}}\left(1-\frac{1}{225\nu^2}\right)+e^{\mp\frac{2\pi}{3}i}\frac{0{,}0117385770}{\nu^{5/3}}\left(1-\frac{1213}{14\,625\nu^2}\right),$$

$$J_\nu(\nu)\approx\frac{0{,}4473073184}{\nu^{1/3}}\left(1-\frac{1}{225\nu^2}\right)-\frac{0{,}0058692885}{\nu^{5/3}}\left(1-\frac{1213}{14\,625\nu^2}\right),$$

$$-N_\nu(\nu)\approx\frac{0{,}7747590021}{\nu^{1/3}}\left(1-\frac{1}{225\nu^2}\right)+\frac{0{,}0101659059}{\nu^{5/3}}\left(1-\frac{1213}{14\,625\nu^2}\right).$$

Так же получаем*) приближенные выражения для производных по аргументу z:

$$H_\nu^{(1)\prime}(\nu)\approx e^{\pm\frac{\pi}{3}i}\frac{0{,}8217003878}{\nu^{2/3}}\left(1+\frac{23}{3150\nu^2}\right)+e^{\pm\frac{2\pi}{3}i}\frac{0{,}1789229274}{\nu^{4/3}}\left(1-\frac{947}{69\,300\nu^2}\right),$$

$$J'_\nu(\nu)\approx\frac{0{,}4108501939}{\nu^{2/3}}\left(1+\frac{23}{3150\nu^2}\right)-\frac{0{,}0894614637}{\nu^{4/3}}\left(1-\frac{947}{69\,300\nu^2}\right),$$

$$N'_\nu(\nu)\approx\frac{0{,}7116134100}{\nu^{2/3}}\left(1+\frac{23}{3150\nu^2}\right)+\frac{0{,}1549518004}{\nu^{4/3}}\left(1-\frac{947}{69\,300\nu^2}\right).$$

*) Более подробно см. F. Emde, Z. Angew. Math. Mech., т. 17 (1937), стр. 324—340; т. 19 (1939), стр. 101—118; P. Beckmann und W. Franz, там же, т. 37 (1957), стр. 17—27.

4.3. Формулы Никольсона дают хорошие приближения для целого порядка $\nu = n \gg 1$ и положительного аргумента x при условии $\frac{|x-\nu|}{\nu^{1/3}} \approx 1$, а также для больших и произвольно малых $|x-\nu|$. Если положим (рис. 124, 125)

$$J_{-\frac{1}{3}}(x) \pm J_{\frac{1}{3}}(x) = \begin{cases} \mathfrak{S}(x) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\mathfrak{D}(x), \end{cases} \qquad e^{\frac{2\pi}{3}i} H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(ix) = \mathfrak{H}(x)$$

(где $\mathfrak{H}$ действительно), то получим *)

$$J_n(x) \approx \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon\mathfrak{H}(2(n-x)\varepsilon), \quad \text{где} \quad \varepsilon = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2(n-x)}{x}}, \quad \text{для} \quad n > x,$$

$$\left.\begin{aligned} J_n(x) &\approx \varepsilon\mathfrak{S}(2(x-n)\varepsilon), \\ -N_n(x) &\approx \varepsilon\mathfrak{D}(2(x-n)\varepsilon), \end{aligned}\right\} \quad \text{где} \quad \varepsilon = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2(x-n)}{x}}, \quad \text{для} \quad x > n.$$

4.4. Формулы Ватсона дают хорошие приближения для произвольного порядка $\nu \gg 1$ и положительного аргумента x в той же области, что и формулы Никольсона, но справедливы без ограничений на величину $|x-\nu|$. Употребляя те же обозначения, что и в 4.3, получим для $x < \nu$

$$J_\nu(x) \approx \frac{w}{2\sqrt{3}} e^{\Phi}\mathfrak{H}\left(\frac{\nu}{3}w^3\right), \quad \text{где} \quad w = \sqrt{1-\frac{x^2}{\nu^2}}, \quad \psi = \nu\left(w + \frac{w^3}{3} - \operatorname{Arth} w\right)$$

с ошибкой, не превосходящей $\frac{3}{\nu} e^{\nu(w - \operatorname{Arth} w)}$; и для $x > \nu$

$$J_\nu(x) \approx \frac{w}{3}\left[\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{3}w^3\right)\cos\varphi + \mathfrak{D}\left(\frac{\nu}{3}w^3\right)\sin\varphi\right],$$

$$N_\nu(x) \approx \frac{w}{3}\left[\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{3}w^3\right)\sin\varphi - \mathfrak{D}\left(\frac{\nu}{3}w^3\right)\cos\varphi\right],$$

$$H^{(1)}_\nu(x) \approx \frac{w}{3}\left[\mathfrak{S}\left(\frac{\nu}{3}w^3\right) \mp i\mathfrak{D}\left(\frac{\nu}{3}w^3\right)\right] e^{\pm i\varphi} \approx \frac{w}{\sqrt{3}} e^{\pm\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)i} H^{(1)}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{\nu}{3}w^3\right),$$

где $w = \sqrt{x^2/\nu^2 - 1}$, $\varphi = \nu(w - w^3/3 - \operatorname{arctg} w)$, с ошибкой $\leqslant 24/\nu$.

4.5. Формулы Лангера дают при произвольном $\nu \gg 1$ асимптотическое представление, которое выполняется равномерно в интервале $0 < x < \infty$.

Употребляя те же обозначения, что и в 4.3, и положив

$$I_{-\frac{1}{3}}(x) \pm I_{\frac{1}{3}}(x) = \begin{cases} \mathfrak{S}^*(x), \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathfrak{D}^*(x), \end{cases} \quad \text{где} \quad I_\nu(x) = e^{-\frac{\nu\pi}{2}i} J_\nu\left(e^{\frac{i\pi}{2}}x\right),$$

получим для $x < \nu$

$$J_\nu(x) \approx \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\,\mathfrak{D}^*(\nu w\lambda), \qquad -N_\nu(x) \approx \sqrt{\lambda}\,\mathfrak{S}^*(\nu w\lambda),$$

$$H^{(1)}_\nu(x) \approx \sqrt{\lambda}\, e^{-\frac{2\pi}{3}i} H^{(2)}_{\frac{1}{3}}\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\nu w\lambda\right),$$

где

$$w = \sqrt{1-\frac{x^2}{\nu^2}}, \qquad \lambda = \frac{1}{w}\operatorname{Arth} w - 1 = \frac{w^2}{3} + \frac{w^4}{5} + \frac{w^6}{7} + \ldots,$$

*) См. также W. Schöbe, Acta math., т. 92 (1954), стр. 265—307.

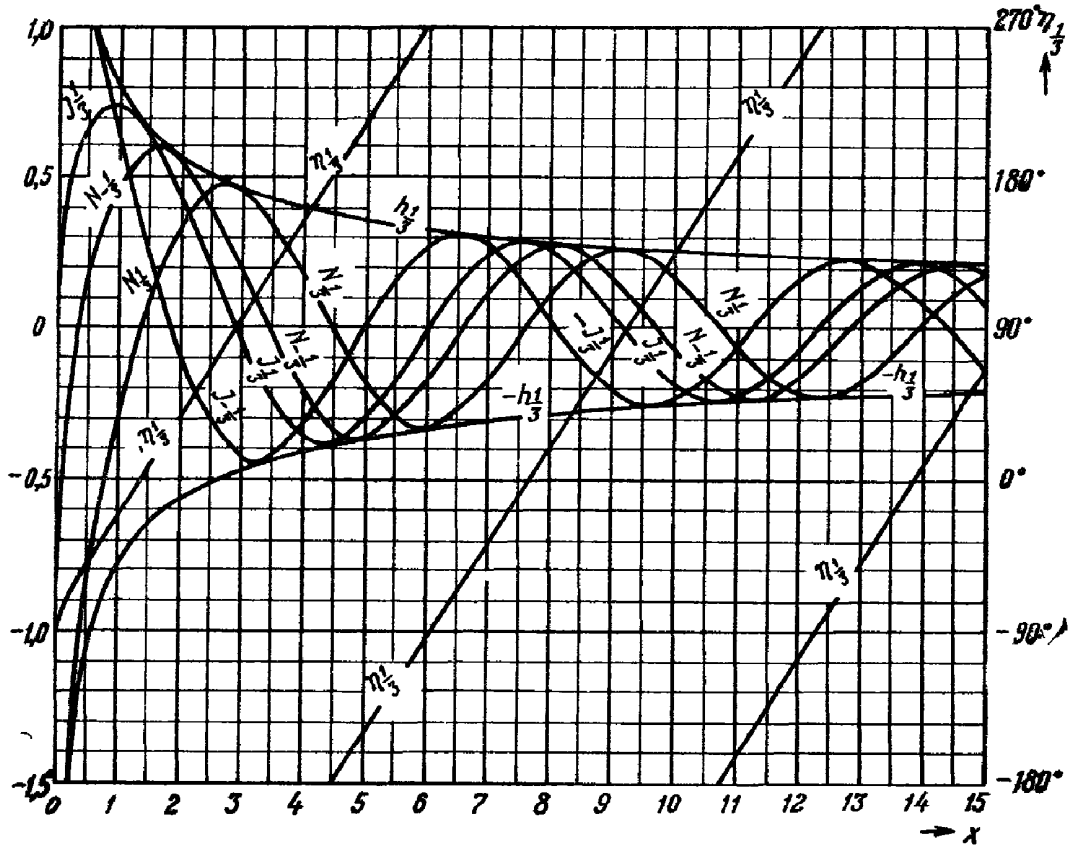


Рис 124 Функции Бесселя $J_{\pm\frac{1}{3}}(x)$, $N_{\pm\frac{1}{3}}(x)$, $H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(x)=h_{\frac{1}{3}}e^{\pi\eta_{\frac{1}{3}}}$

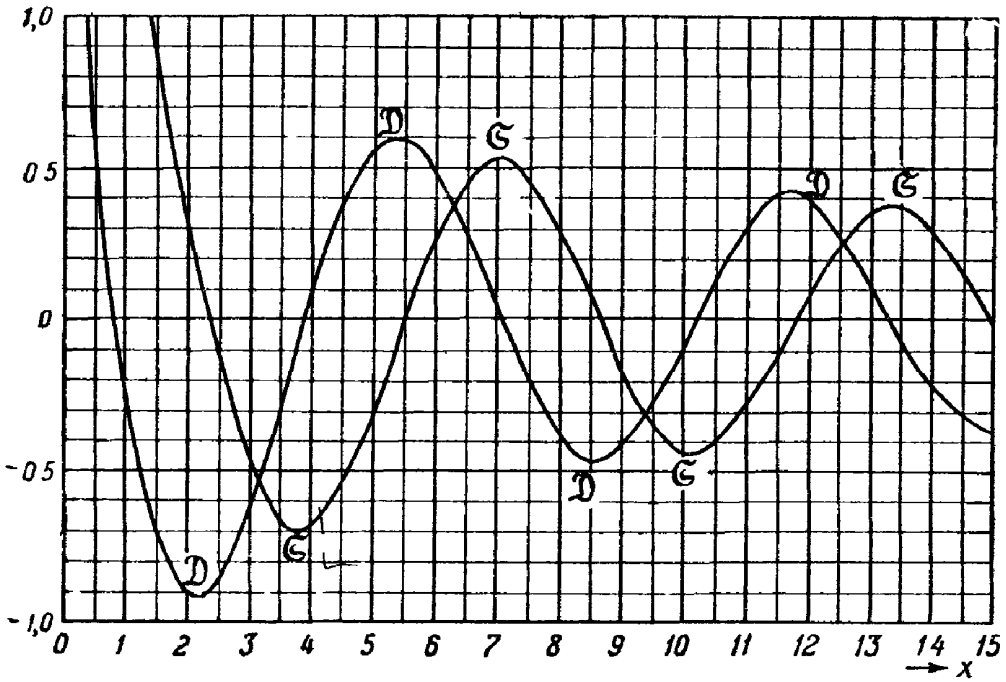


Рис. 125. Функции $\mathfrak{S}=J_{-\frac{1}{3}}(x)+J_{\frac{1}{3}}(x)$ и $\mathfrak{D}=\sqrt{3}(J_{-\frac{1}{3}}(x)-J_{\frac{1}{3}}(x))$.

и для $x > \nu$

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\mu}{3}}\,\mathfrak{S}(\nu w\mu), \qquad -N_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\mu}{3}}\,\mathfrak{D}(\nu w\mu),$$

$$H_\nu^{(1)}(x) \approx \sqrt{\mu}\, e^{\frac{\pi}{6} i} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(\nu w\mu),$$

где

$$w = \sqrt{\frac{x^2}{\nu^2} - 1}, \qquad \mu = 1 - \frac{1}{w}\operatorname{arctg} w = \frac{w^2}{3} - \frac{w^4}{5} + \frac{w^6}{7} - \ldots$$

Ошибка будет порядка $\frac{1}{\nu \sqrt[3]{\nu}}$.

5. Нули

5.1. Нули бесселевых функций, за исключением может быть $z = 0$, все простые.

Функция $J_\nu(z)$ имеет для произвольного действительного порядка ν бесконечно много действительных нулей, которые расположены симметрично

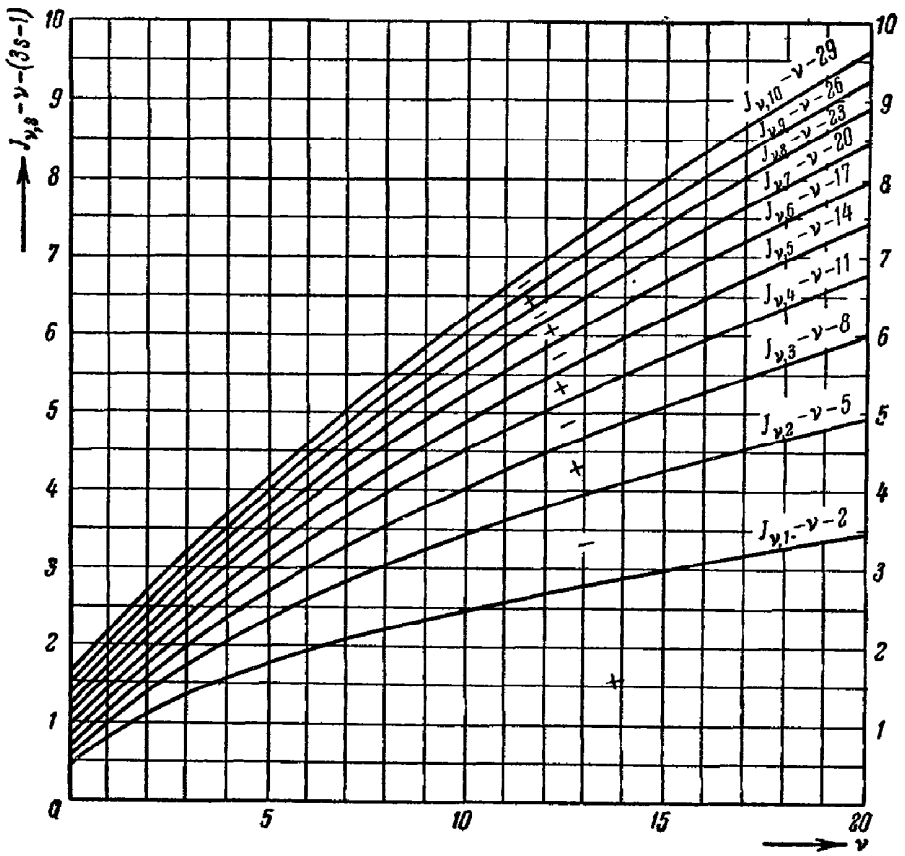


Рис. 126. Нули $j_{\nu,s}$ функций $J_\nu(x)$: величина $j_{\nu,s} - \nu$ как функция ν.

относительно $z = 0$. Положительные нули, расположенные в порядке возрастания, обозначают через

$$j_{\nu,1},\ j_{\nu,2},\ \ldots,\ j_{\nu,s},\ \ldots$$

Для $\nu > -1$ все нули будут действительны (рис. 126—128, таблицы 48—51).

Бесконечную последовательность положительных нулей функции $J'_\nu(z)$, расположенных в порядке возрастания, обозначают

$$j'_{\nu,1},\ j'_{\nu,2},\ \ldots,\ j'_{\nu,s},\ \ldots$$

Для $\nu > 0$ имеем $j_{0,1} > j'_{\nu,1} > \nu$. Если $\nu > -1$ и a, b, c, d — действительные числа, причем $ad - bc \neq 0$, то положительные нули функций $aJ_\nu(z) + bzJ'_\nu(z)$

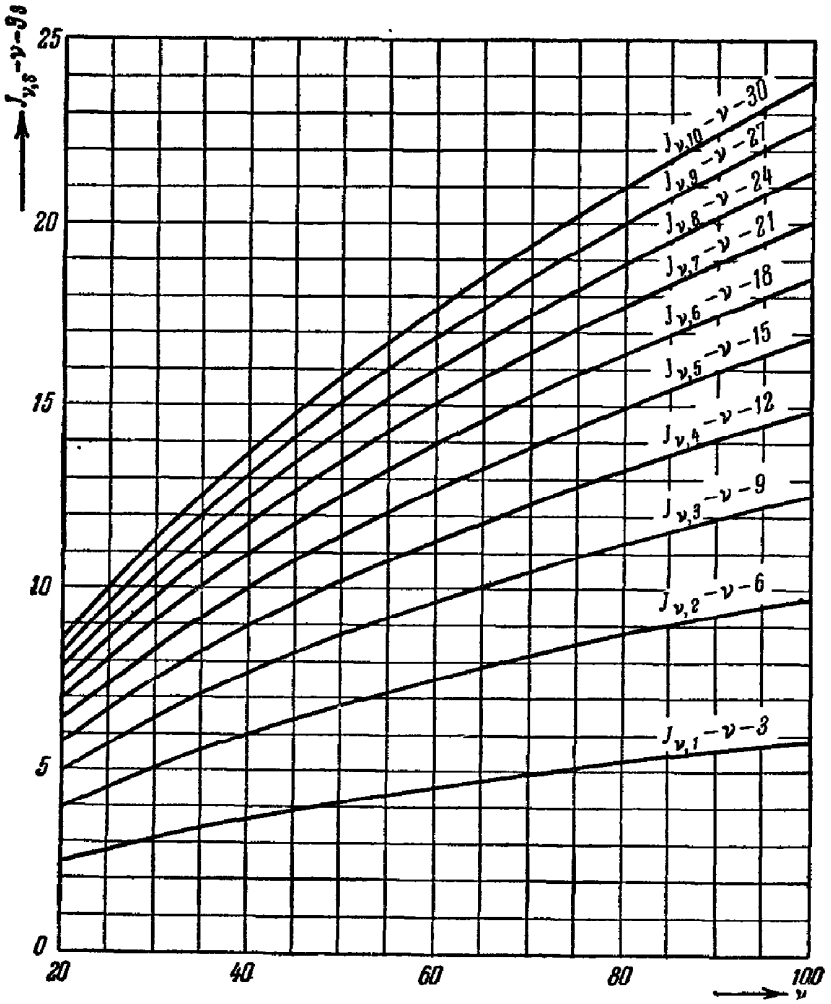


Рис. 127. Нули $j_{\nu,s}$ функций $J_\nu(x)$: величина $j_{\nu,s} - \nu$ как функция ν.

и $cJ_\nu(z) + dzJ'_\nu(z)$ разделяют друг друга. При $\nu > -1$ положительные нули функций $J_\nu(z)$ и $J_{\nu+1}(z)$ также разделяют друг друга.

Для действительного ν действительная функция $N_\nu(x)$ имеет бесконечно много положительных нулей, которые, будучи расположены в порядке возрастания, обозначаются через

$$y_{\nu,1},\ y_{\nu,2},\ \ldots,\ y_{\nu,s},\ \ldots$$

(рис. 129). Положительные нули функций $N_\nu(x)$ и $N_{\nu+1}(x)$ разделяют друг друга. Далее имеем $j_{\nu,1} > y_{\nu,1} > j'_{\nu,1}$. Для действительного ν и действительных a, b, c, d $(ad - bc \neq 0)$ положительные нули функций $aJ_\nu(z) + bN_\nu(z)$ и $cJ_\nu(z) + dN_\nu(z)$ разделяют друг друга.

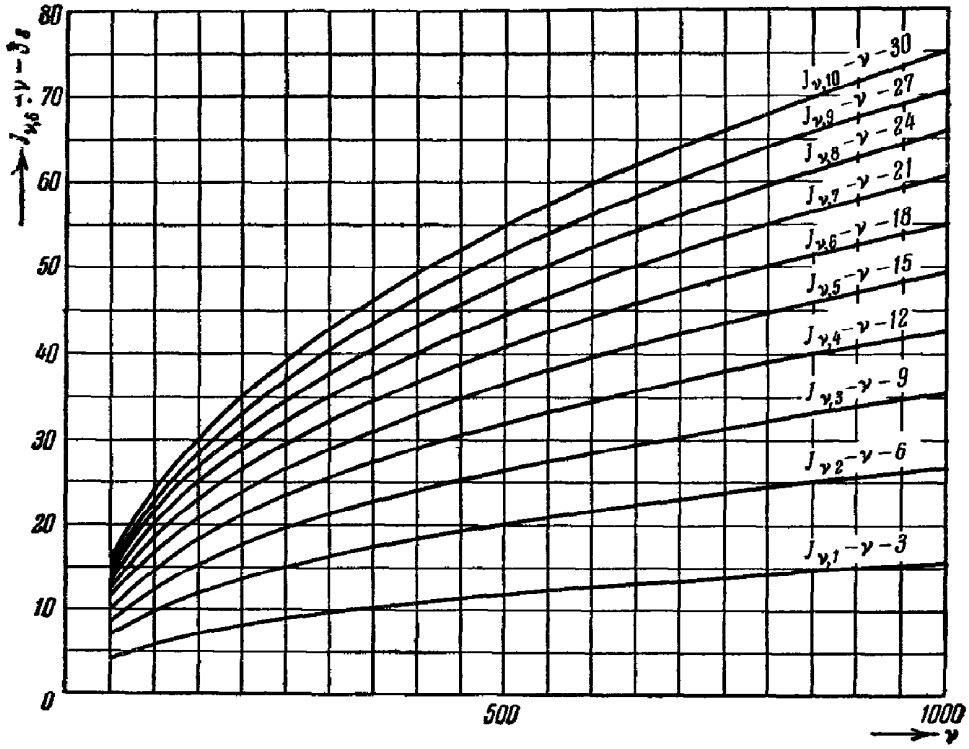


Рис. 128. Нули $j_{\nu,s}$ функций $J_\nu(x)$: величина $j_{\nu,s}-\nu$ как функция ν.

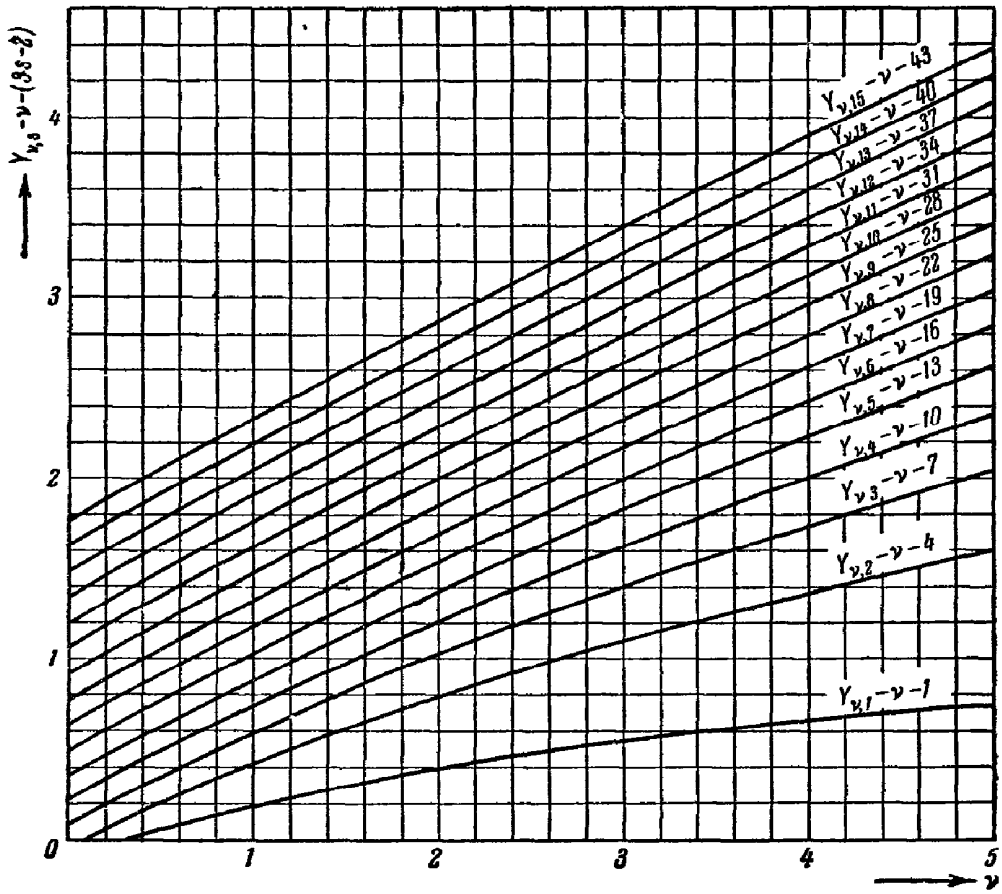


Рис. 129. Нули $y_{\nu,s}$ функций $N_\nu(x)$: величина $y_{\nu,s}-\nu$ как функция ν.

Таблица 48. Нули $j_{0,s}$ функции $J_0(x)$ и соответствующие значения функции $J_1(x)$

s	$j_{0,s}$	$J_1(j_{0,s})$	s	$j_{0,s}$	$J_1(j_{0,s})$	s	$j_{0,s}$	$J_1(j_{0,s})$
1	2,4048	+ 0,5191	21	65,1900	+ 0,09882	41	128,0209	+ 0,07052
2	5,5201	— 0,3403	22	68,3315	— 0,09652	42	131,1624	— 0,06967
3	8,6537	+ 0,2715	23	71,4730	+ 0,09438	43	134,3040	+ 0,06885
4	11,7915	— 0,2325	24	74,6145	— 0,09237	44	137,4456	— 0,06806
5	14,9309	+ 0,2065	25	77,7560	+ 0,09049	45	140,5872	+ 0,06729
6	18,0711	— 0,1877	26	80,8976	— 0,08871	46	143,7287	— 0,06655
7	21,2116	+ 0,1733	27	84,0391	+ 0,08704	47	146,8703	+ 0,06584
8	24,3525	— 0,1617	28	87,1806	— 0,08545	48	150,0119	— 0,06514
9	27,4935	+ 0,1522	29	90,3222	+ 0,08395	49	153,1535	+ 0,06447
10	30,6346	— 0,1442	30	93,4637	— 0,08253	50	156,2950	— 0,06382
11	33,7758	+ 0,1373	31	96,6053	+ 0,08118	51	159,4366	+ 0,06319
12	36,9171	— 0,1313	32	99,7468	— 0,07989	52	162,5782	— 0,06258
13	40,0584	+ 0,1261	33	102,8884	+ 0,07866	53	165,7198	+ 0,06198
14	43,1998	— 0,1214	34	106,0299	— 0,07749	54	168,8613	— 0,06140
15	46,3412	+ 0,1172	35	109,1715	+ 0,07636	55	172,0029	+ 0,06084
16	49,4826	— 0,1134	36	112,3131	— 0,07529	56	175,1445	— 0,06029
17	52,6241	+ 0,1100	37	115,4546	+ 0,07426	57	178,2861	+ 0,05976
18	55,7655	— 0,1068	38	118,5962	— 0,07327	58	181,4277	— 0,05924
19	58,9070	+ 0,1040	39	121,7377	+ 0,07232	59	184,5692	+ 0,05873
20	62,0485	— 0,1013	40	124,8793	— 0,07140	60	187,7108	— 0,05824

Таблица 49. Нули $j_{1,s}$ функции $J_1(x)$ и экстремумы функции $J_0(x)$

s	$j_{1,s}$	$J_0(j_{1,s}) = \frac{\min}{\max}$	s	$j_{1,s}$	$J_0(j_{1,s}) = \frac{\min}{\max}$	s	$j_{1,s}$	$J_0(j_{1,s}) = \frac{\min}{\max}$
1	3,8317	— 0,4028	21	66,7532	— 0,09765	41	129,5878	— 0,07009
2	7,0156	+ 0,3001	22	69,8951	+ 0,09543	42	132,7295	+ 0,06926
3	10,1735	— 0,2497	23	73,0369	— 0,09336	43	135,8711	— 0,06845
4	13,3237	+ 0,2184	24	76,1787	+ 0,09141	44	139,0128	+ 0,06767
5	16,4706	— 0,1965	25	79,3205	— 0,08958	45	142,1544	— 0,06692
6	19,6159	+ 0,1801	26	82,4623	+ 0,08786	46	145,2961	+ 0,06619
7	22,7601	— 0,1672	27	85,6040	— 0,08623	47	148,4377	— 0,06549
8	25,9037	+ 0,1567	28	88,7458	+ 0,08469	48	151,5794	+ 0,06481
9	29,0468	— 0,1480	29	91,8875	— 0,08323	49	154,7210	— 0,06414
10	32,1897	+ 0,1406	30	95,0292	+ 0,08185	50	157,8627	+ 0,06350
11	35,3323	— 0,1342	31	98,1710	— 0,08053	51	161,0043	— 0,06288
12	38,4748	+ 0,1286	32	101,3127	+ 0,07927	52	164,1459	+ 0,06228
13	41,6171	— 0,1237	33	104,4544	— 0,07807	53	167,2876	— 0,06169
14	44,7593	+ 0,1192	34	107,5961	+ 0,07692	54	170,4292	+ 0,06112
15	47,9015	— 0,1153	35	110,7378	— 0,07582	55	173,5708	— 0,06056
16	51,0435	+ 0,1117	36	113,8794	+ 0,07477	56	176,7125	+ 0,06002
17	54,1856	— 0,1084	37	117,0211	— 0,07376	57	179,8541	— 0,05949
18	57,3275	+ 0,1054	38	120,1628	+ 0,07279	58	182,9957	+ 0,05898
19	60,4695	— 0,1026	39	123,3045	— 0,07185	59	186,1374	— 0,05848
20	63,6114	+ 0,1000	40	126,4461	+ 0,07095	60	189,2790	+ 0,05799

Таблица 50. Нули $j_{n,s}$ функций $J_n(x)$

s	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
1	2,405	3,832	5,136	6,380	7,588	8,771
2	5,520	7,016	8,417	9,761	11,065	12,339
3	8,654	10,173	11,620	13,015	14,373	15,700
4	11,792	13,324	14,796	16,223	17,616	18,980
5	14,931	16,471	17,960	19,409	20,827	22,218
6	18,071	19,616	21,117	22,583	24,019	25,430
7	21,212	22,760	24,270	25,748	27,199	28,627
8	24,352	25,904	27,421	28,908	30,371	31,812
9	27,493	29,047	30,569	32,065	33,537	34,989

Таблица 51. Два первых нуля $j_{\nu,1}$ и $j_{\nu,2}$ функций $J_\nu(x)$

ν	$j_{\nu,1}$		$j_{\nu,2}$		ν	$j_{\nu,1}$		$j_{\nu,2}$		ν	$j_{\nu,1}$		$j_{\nu,2}$		ν	$j_{\nu,1}$	
	1,		4,			2,		5,			3,		6,			3,	
−0,50	5708	+184	7124	+167	0,00	4048	+154	5200	+156	0,50	1416	+142	2832	+149	1,00	8317	+135
49	5892	184	7291	167	01	4202	154	5356	157	51	1558	141	2981	149	01	8452	135
48	6076	182	7458	166	02	4356	154	5513	156	52	1699	142	3130	148	02	8587	134
47	6258	181	7624	167	03	4510	153	5669	156	53	1841	141	3278	149	03	8721	135
46	6439	181	7791	167	04	4663	152	5825	156	54	1982	141	3427	149	04	8856	134
−0,45	6620	+180	7958	+166	0,05	4815	+153	5981	+155	0,55	2123	+140	3576	+148	1,05	8990	+134
44	6800	179	8124	165	06	4968	152	6136	155	56	2263	141	3724	149	06	9124	134
43	6979	178	8289	166	07	5120	152	6291	156	57	2404	140	3873	148	07	9258	134
42	7157	176	8455	165	08	5272	151	6447	155	58	2544	140	4021	149	08	9392	134
41	7333	176	8620	165	09	5423	151	6602	155	59	2684	141	4170	148	09	9526	134
−0,40	7509	+175	8785	+164	0,10	5574	+151	6757	+154	0,60	2825	+140	4318	+148	1,10	9660	+134
39	7684	175	8949	165	11	5725	151	6911	155	61	2965	140	4466	148	11	9794	133
38	7859	174	9114	164	12	5876	150	7066	154	62	3105	140	4614	148	12	9927	134
37	8033	173	9278	164	13	6026	150	7220	155	63	3245	140	4762	147	13	*0061	133
36	8206	172	9442	164	14	6176	150	7375	154	64	3385	139	4909	148	14	0194	133
−0,35	8378	+171	9606	+163	0,15	6326	+149	7529	+154	0,65	3524	+139	5057	+147	1,15	0327	+133
34	8549	171	9769	163	16	6475	150	7683	153	66	3663	139	5204	147	16	0460	133
33	8720	170	9932	163	17	6625	148	7836	154	67	3802	139	5351	147	17	0593	133
32	8890	169	*0095	163	18	6773	149	7990	153	68	3941	139	5498	148	18	0726	133
31	9059	169	0258	163	19	6922	148	8143	154	69	4080	139	5646	147	19	0859	133
−0,30	9228	+168	0421	+162	0,20	7070	+148	8297	+153	0,70	4219	+139	5793	+147	1,20	0992	+133
29	9396	167	0583	163	21	7218	148	8450	153	71	4358	138	5940	147	21	1125	132
28	9563	168	0746	161	22	7366	148	8603	152	72	4496	138	6087	146	22	1257	133
27	9731	166	0907	161	23	7514	148	8755	153	73	4634	138	6233	147	23	1390	132
26	9897	166	1068	162	24	7662	147	8908	153	74	4772	138	6380	146	24	1522	133
−0,25	*0063	+165	1230	+161	0,25	7809	+146	9061	+152	0,75	4910	+138	6526	+146	1,25	1655	+132
24	0228	165	1391	161	26	7955	147	9213	153	76	5048	137	6672	147	26	1787	132
23	0393	164	1552	161	27	8102	146	9366	152	77	5185	138	6819	146	27	1919	132
22	0557	163	1713	161	28	8248	147	9518	152	78	5323	137	6965	146	28	2051	132
21	0720	163	1874	160	29	8395	146	9670	152	79	5460	137	7111	146	29	2183	132
−0,20	0883	+162	2034	+160	0,30	8541	+146	9822	+152	0,80	5597	+137	7257	+146	1,30	2315	+131
19	1045	162	2194	160	31	8687	145	9974	151	81	5734	137	7403	145	31	2446	132
18	1207	162	2354	160	32	8832	146	*0125	152	82	5871	137	7548	146	32	2578	132
17	1369	161	2514	159	33	8978	144	0277	151	83	6008	137	7694	145	33	2710	131
16	1530	160	2673	160	34	9122	145	0428	151	84	6145	137	7839	146	34	2841	131
−0,15	1690	+161	2833	+159	0,35	9267	+145	0579	+151	0,85	6282	+137	7985	+145	1,35	2972	+132
14	1851	159	2992	159	36	9412	144	0730	151	86	6419	136	8130	145	36	3104	131
13	2010	159	3151	159	37	9556	144	0881	151	87	6555	136	8275	146	37	3235	131
12	2169	159	3310	159	38	9700	144	1032	151	88	6691	136	8421	145	38	3366	131
11	2328	158	3469	158	39	9844	144	1183	150	89	6827	136	8566	145	39	3497	131
−0,10	2486	+158	3627	+158	0,40	9988	+144	1333	+150	0,90	6963	+136	8711	+145	1,40	3628	+131
09	2644	157	3785	158	41	*0132	143	1483	151	91	7099	135	8856	145	41	3759	131
08	2801	158	3943	158	42	0275	143	1634	150	92	7234	136	9001	144	42	3890	131
07	2959	156	4101	157	43	0418	143	1784	150	93	7370	135	9145	145	43	4021	131
06	3115	157	4258	158	44	0561	143	1934	150	94	7505	136	9290	145	44	4152	130
−0,05	3272	+156	4416	+157	0,45	0704	+143	2084	+150	0,95	7641	+135	9435	+144	1,45	4282	+131
04	3428	155	4573	157	46	0847	143	2234	149	96	7776	135	9579	144	46	4413	130
03	3583	156	4730	157	47	0990	142	2383	150	97	7911	136	9723	144	47	4543	130
02	3739	154	4887	157	48	1132	142	2533	149	98	8047	134	9867	144	48	4673	131
01	3893	155	5044	156	49	1274	142	2682	150	99	8181	136	*0011	145	49	4804	130
0,00	4048		5200		0,50	1416		2832		1,00	8317		0156		1,50	4934	
	2,		5,			3,		6,			3,		7,			4,	

5.2. Для большого s положительные нули $x_{\nu, s}$ функции

$$Z_\nu(x) = J_\nu(x)\cos\alpha - N_\nu(x)\sin\alpha$$

допускают асимптотическое представление

$$x_{\nu, s} \approx \beta - \frac{\mu-1}{8\beta}\left(1 + \frac{P_1}{3(4\beta)^2} + \frac{2P_2}{15(4\beta)^4} + \frac{P_3}{105(4\beta)^6} + \dots\right),$$

где $\mu = 4\nu^2$, $\beta = (\nu - 1/2 + 2s)\pi/2 - \alpha$, $P_1 = 7\mu - 31$, $P_2 = 83\mu^2 - 982\mu + 3779$, $P_3 = 6949\mu^3 - 153\,855\mu^2 + 1\,585\,743\mu - 6\,277\,237$. В частности,

$$\frac{1}{\pi} j_{0, s} \approx s - \frac{1}{4} + \frac{0{,}050661}{4s-1} - \frac{0{,}053041}{(4s-1)^3} + \frac{0{,}262051}{(4s-1)^5} - \dots,$$

$$\frac{1}{\pi} j_{1, s} \approx s + \frac{1}{4} - \frac{0.151982}{4s+1} + \frac{0{,}015399}{(4s+1)^3} - \frac{0{,}245270}{(4s+1)^5} + \dots$$

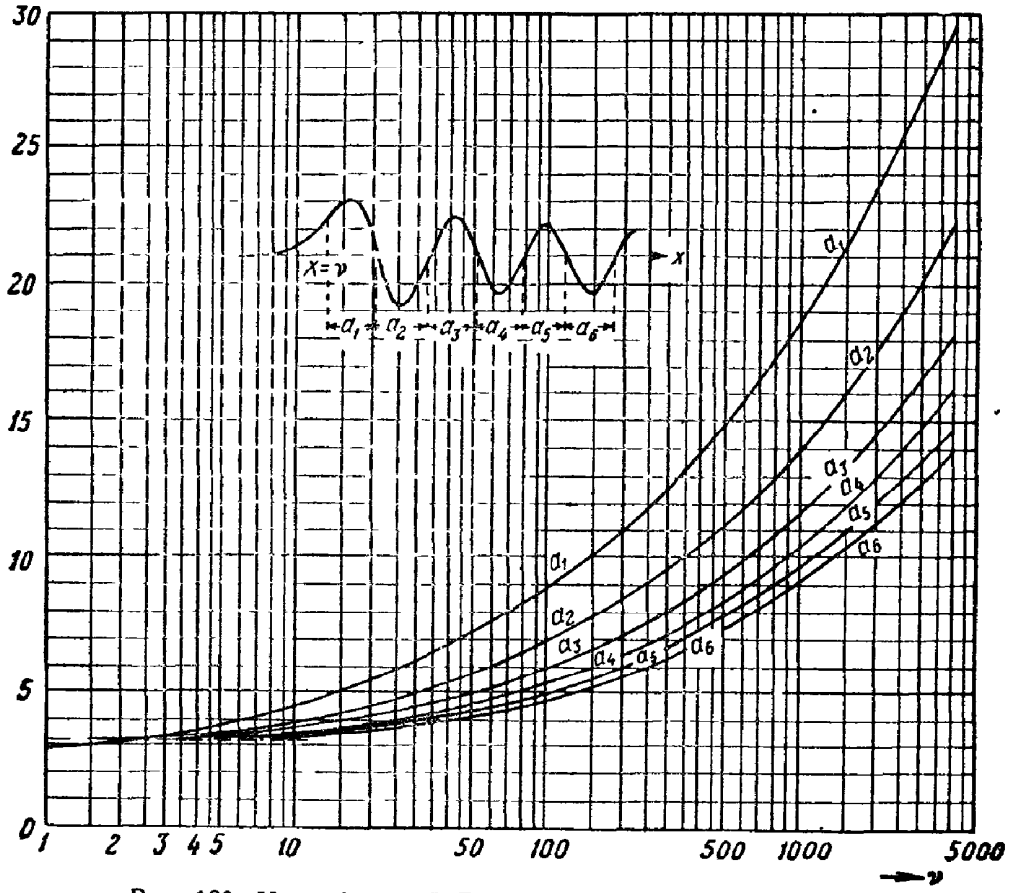


Рис. 130. Нули функций Бесселя $J_\nu(x)$ высокого порядка.

Для положительных нулей $x'_{\nu, s}$ функции $Z'_\nu(x)$ при больших s получается представление

$$x'_{\nu, s} \approx \gamma - \frac{\mu+3}{8\gamma} - \frac{Q_1}{6(4\gamma)^3} - \frac{Q_2}{15(4\gamma)^5} - \dots,$$

где

$$\mu = 4\nu^2, \quad \gamma = \left(\nu + \frac{1}{2} + 2s\right)\frac{\pi}{2} - \alpha,$$

$$Q_1 = 7\mu^2 + 82\mu - 9, \qquad Q_2 = 83\mu^3 + 2075\mu^2 - 3039\mu + 3537.$$

5.3. Для первых положительных нулей функции $J_\nu(x)$ при большом порядке $\nu \gg 1$ имеем приближенные выражения (рис. 130—133):

$$j_{\nu,1} \approx \nu + 1{,}855757\nu^{\frac{1}{3}} + 1{,}03315\nu^{-\frac{1}{3}} - 0{,}00403\nu^{-1} - 0{,}09083\nu^{-\frac{5}{3}} + 0{,}0448\nu^{-\frac{7}{3}} \ldots,$$

$$j_{\nu,2} \approx \nu + 3{,}2447\nu^{\frac{1}{3}} + 3{,}1584\nu^{-\frac{1}{3}} \ldots, \quad j_{\nu,3} \approx \nu + 4{,}3817\nu^{\frac{1}{3}} + 5{,}7598\nu^{-\frac{1}{3}} \ldots$$

Так же получаем асимптотические представления для первых положительных нулей $j_{-\nu,s}$ функций $J_{-\nu}(x)$, порядок которых $\nu = n + \frac{1}{2} \gg 1$:

$$j_{-\nu,1} \approx \nu + 0{,}951\nu^{\frac{1}{3}} + 0{,}271\nu^{-\frac{1}{3}} \ldots,$$

$$j_{-\nu,2} \approx \nu + 2{,}596\nu^{\frac{1}{3}} + 2{,}022\nu^{-\frac{1}{3}}, \ldots, \quad j_{-\nu,3} \approx \nu + 3{,}834\nu^{\frac{1}{3}} + 4{,}410\nu^{-\frac{1}{3}} \ldots$$

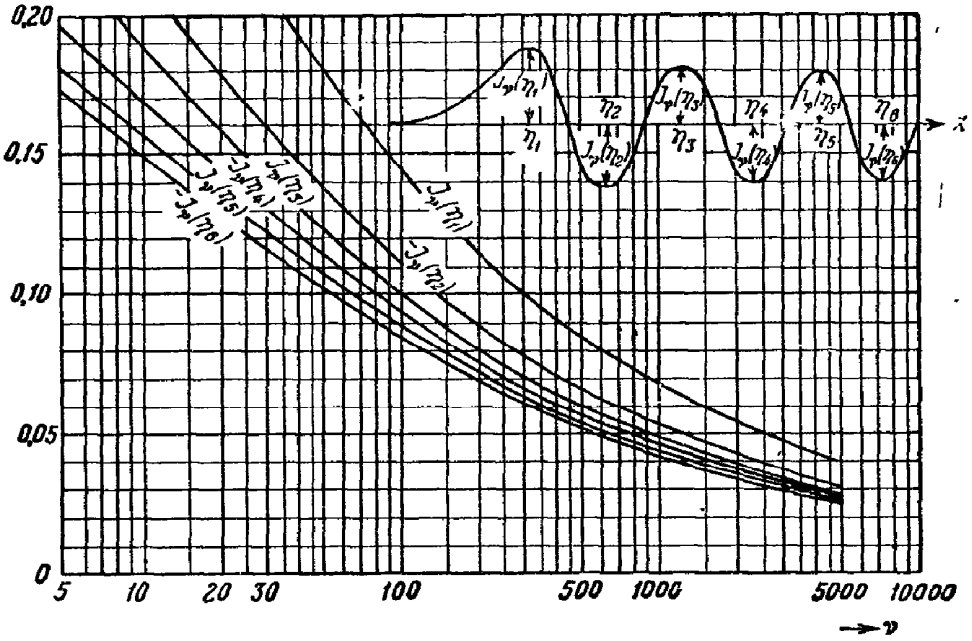


Рис. 131. Экстремальные значения функций Бесселя $J_\nu(x)$ высокого порядка.

Для наименьшего положительного нуля функции $J'_\nu(x)$ получим при $\nu \gg 1$

$$j'_{\nu,1} \approx \nu + 0{,}808618\nu^{\frac{1}{3}} + \ldots$$

В точке $j'_{\nu,1}$ функция $J_\nu(x)$ имеет максимум.

Для наименьшего положительного нуля функции $N_\nu(x)$ получим при $\nu \gg 1$

$$y_{\nu,1} \approx \nu + 0{,}931577\nu^{\frac{1}{3}} + 0{,}26035\nu^{-\frac{1}{3}} + \ldots$$

5.4. Для $n = 1, 2, \ldots$ имеем:

$$J_{-n+\frac{\varepsilon_n}{6}}\left(n - \frac{\varepsilon_n}{6}\right) = 0,$$

где $0 < \varepsilon_n < 1$, и для больших n

$$\varepsilon_n \approx 1 - 6\frac{0{,}03944}{(6n-1)^{4/3}}.$$

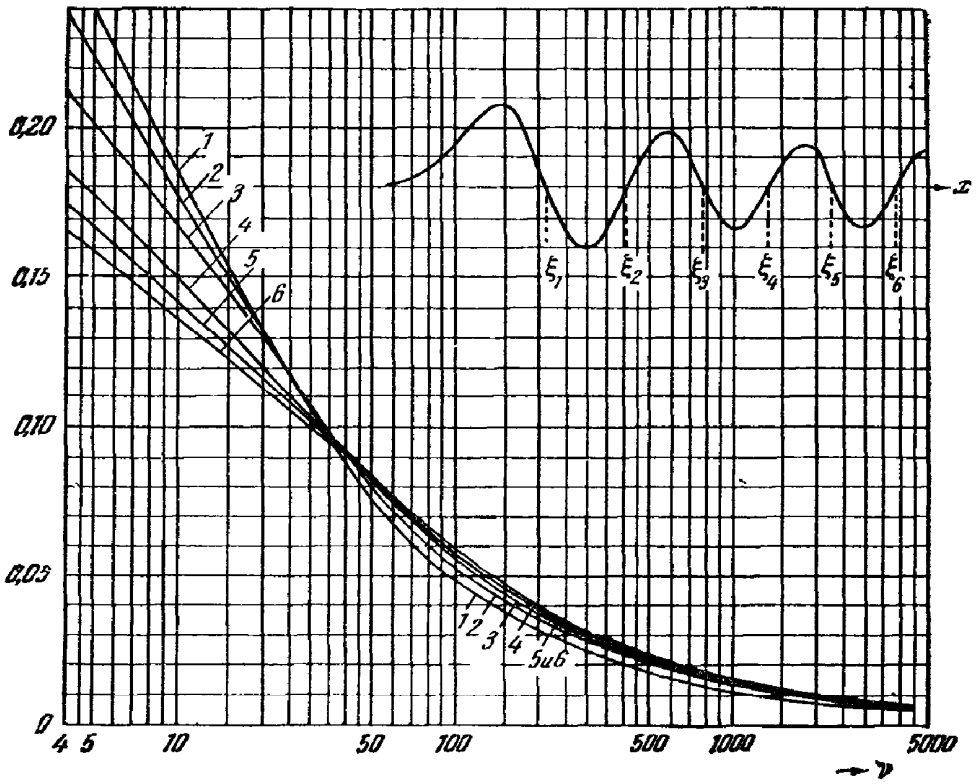


Рис. 132. Модуль производной в нулях функций Бесселя $J_\nu(x)$ высокого порядка.

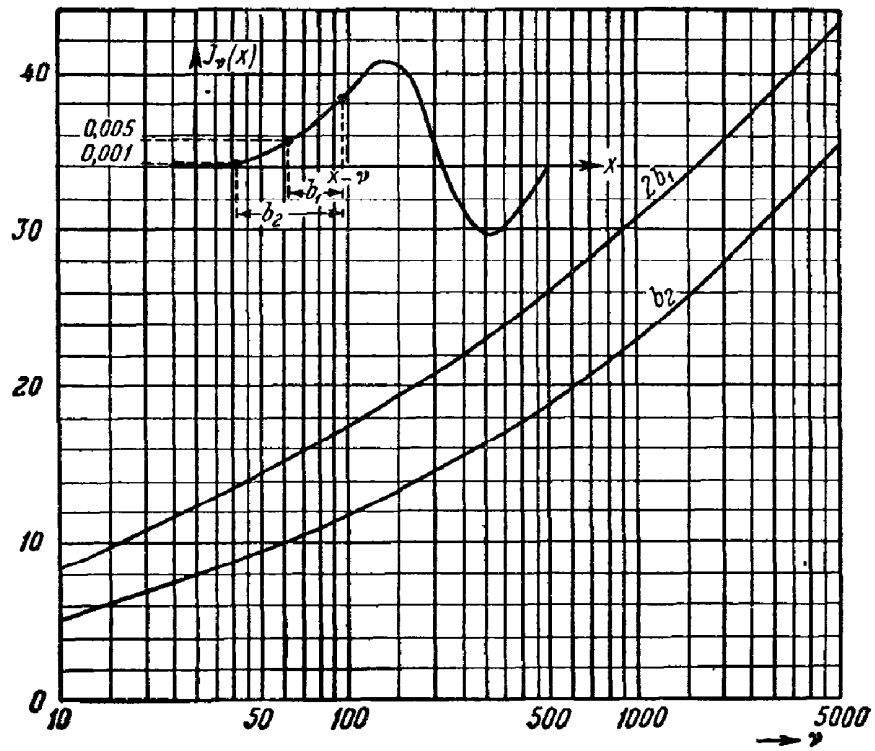


Рис. 133. Первые корни уравнений $J_\nu(x)=0{,}001$ и $J_\nu(x)=0{,}005$ при больших значениях ν.

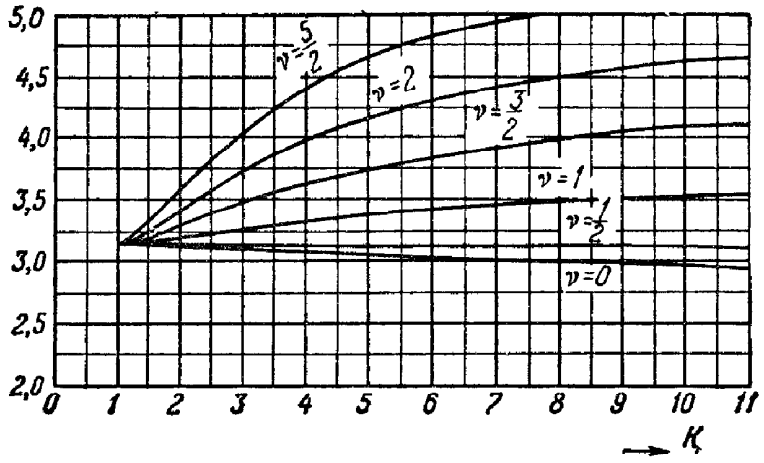


Рис. 134. Первый корень $x_{\nu,1}$ уравнения $\frac{J_\nu(x)}{N_\nu(x)}=\frac{J_\nu(kx)}{N_\nu(kx)}$: величина $(k-1)\,x_{\nu,1}$ как функция k.

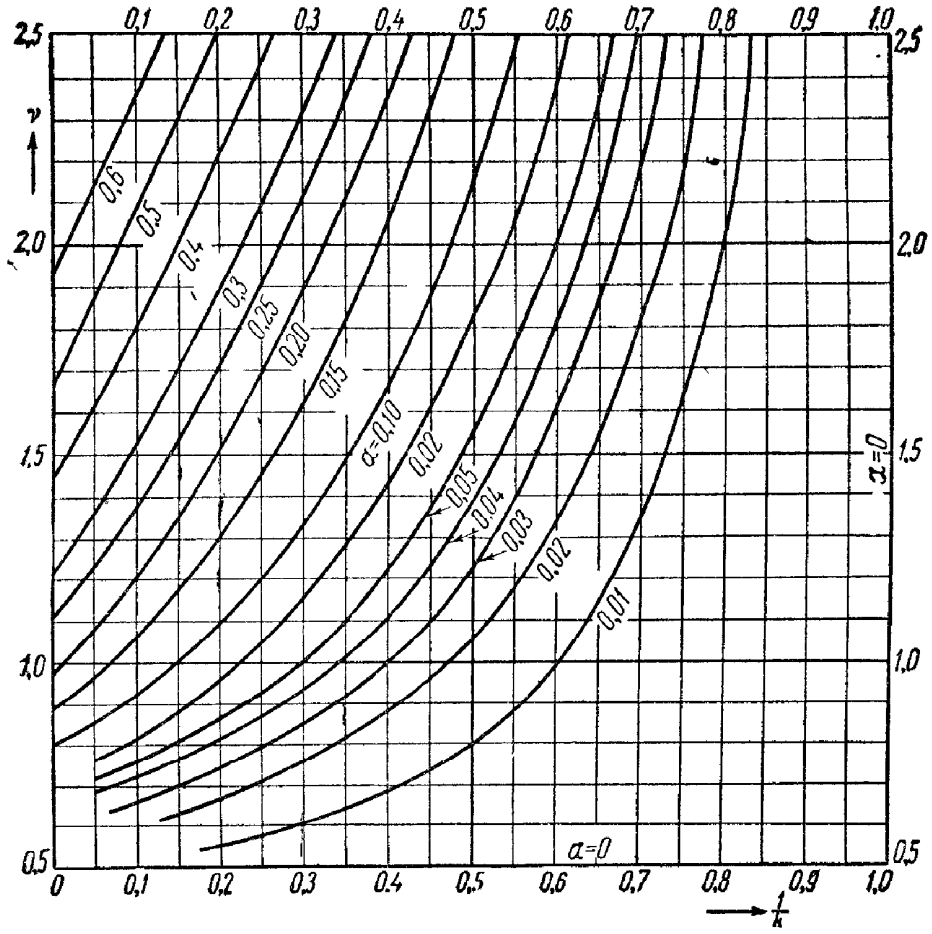
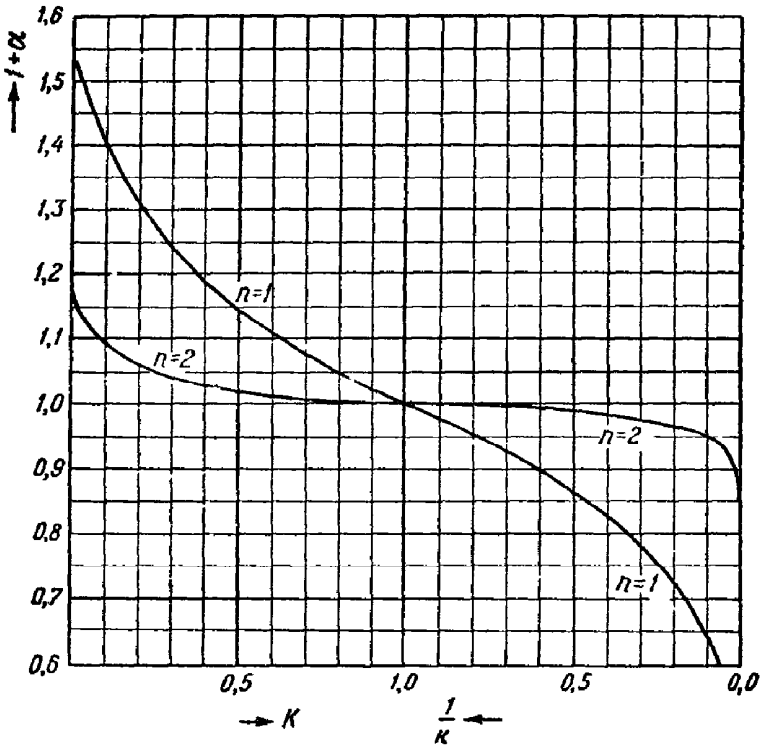


Рис. 135. Первый корень $x_{\nu,1}=\frac{\pi}{k-1}(1+\alpha)$ уравнения $\frac{J_\nu(x)}{N_\nu(x)}=\frac{J_\nu(kx)}{N_\nu(kx)}$.



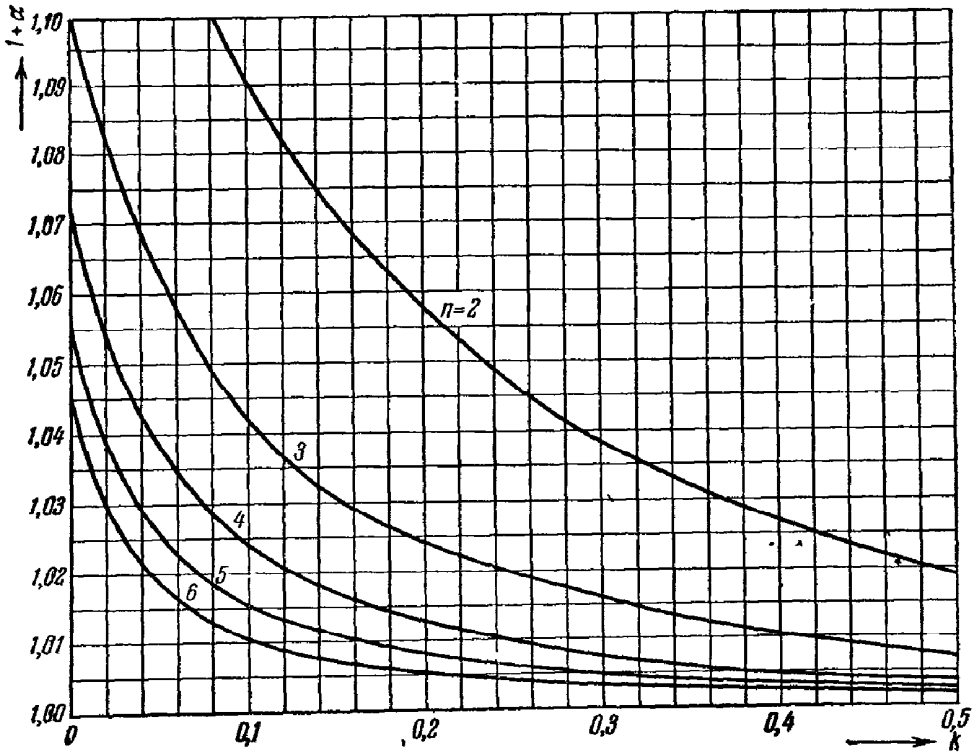
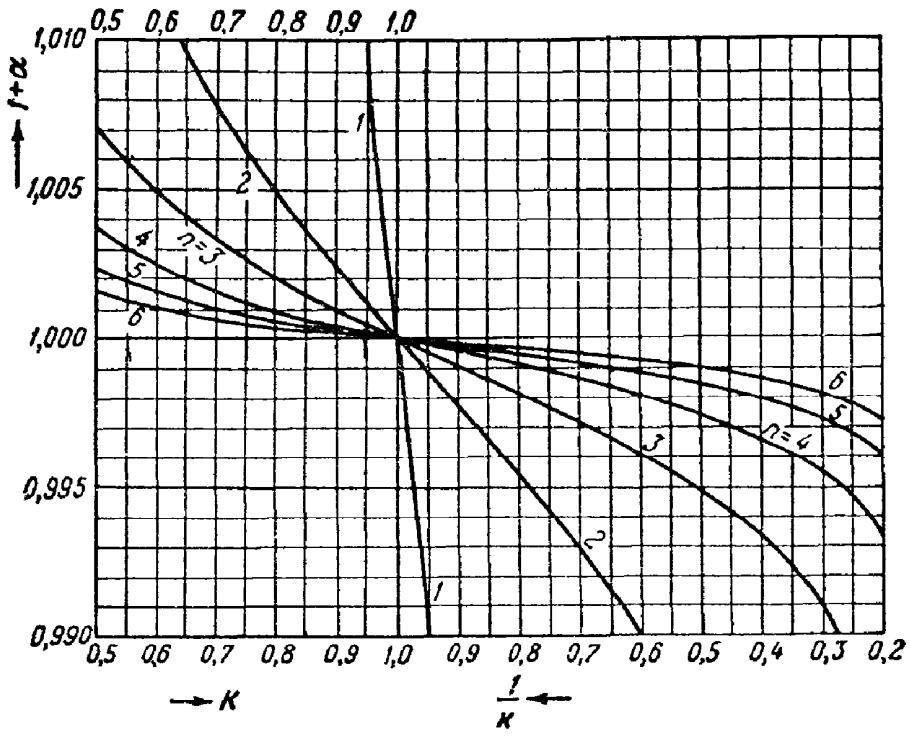


Рис. 136 и 137. Первые шесть корней $x_n = \pi \frac{n-0,5}{k-1}(1+\alpha)$ уравнения $\frac{J_0(x)}{N_0(x)} = \frac{J_1(kx)}{N_1(kx)}$.



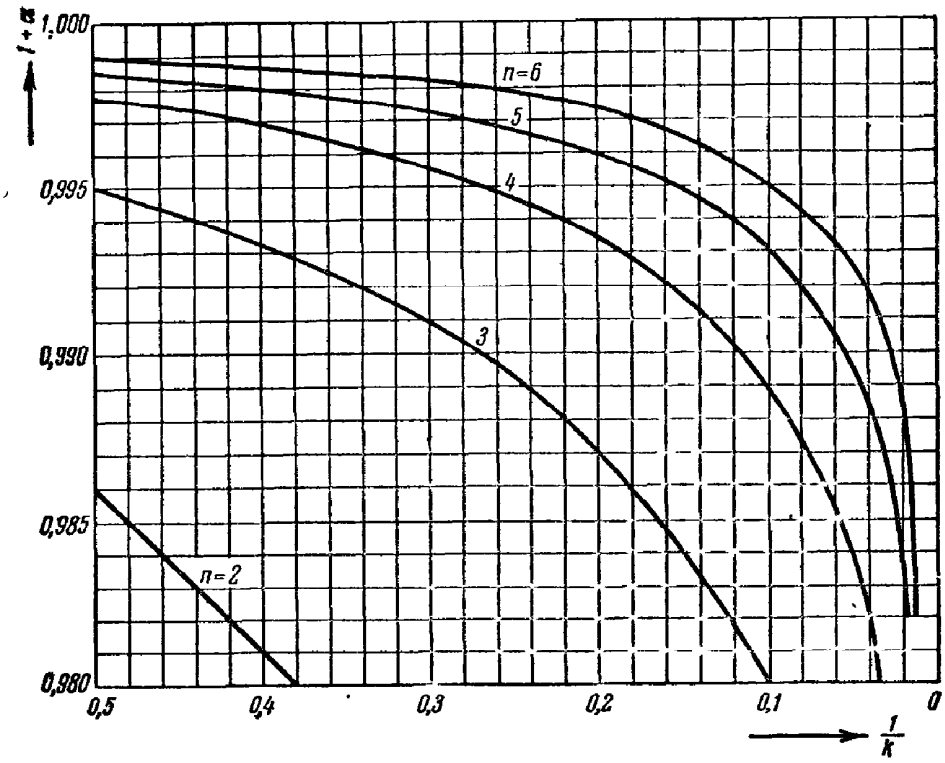


Рис. 138 и 139. Первые шесть корней $x_n = \pi \frac{n-0,5}{k-1}(1+\alpha)$ уравнения $\frac{J_0(x)}{N_0(x)} = \frac{J_1(kx)}{N_1(kx)}$.

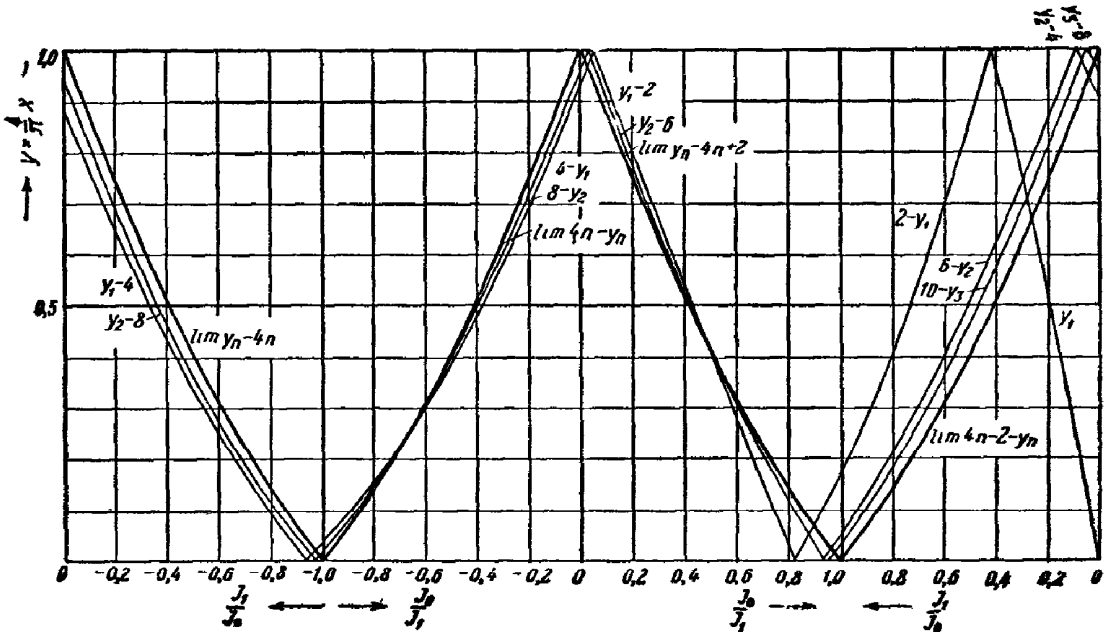


Рис. 140. Функция, обратная к $\dfrac{J_0\left(\frac{1}{4}\pi y\right)}{J_1\left(\frac{1}{4}\pi y\right)}$.

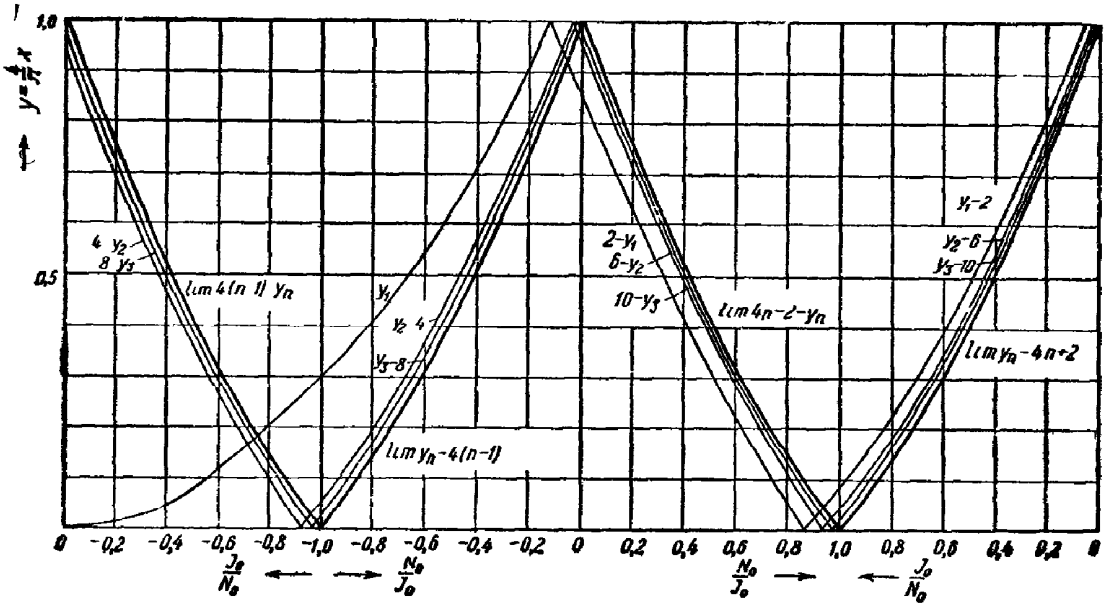


Рис. 141. Функция, обратная к $\dfrac{N_0\left(\frac{1}{4}\pi y\right)}{J_0\left(\frac{1}{4}\pi y\right)}$.

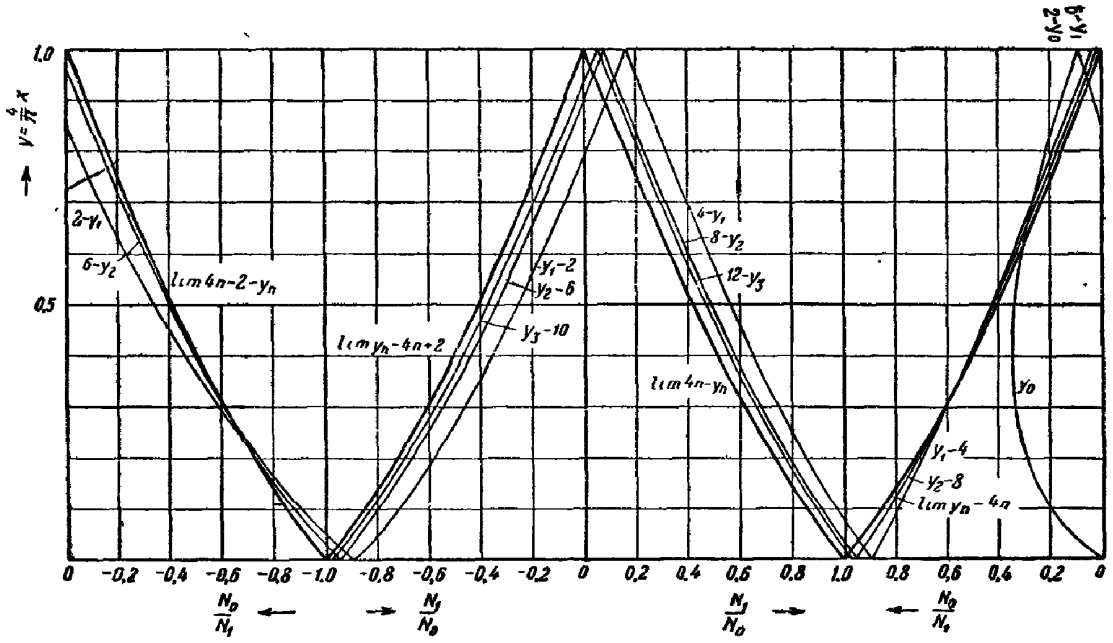


Рис. 142. Функция, обратная к $\dfrac{N_1\left(\frac{1}{4}\pi y\right)}{N_0\left(\frac{1}{4}\pi y\right)}$.

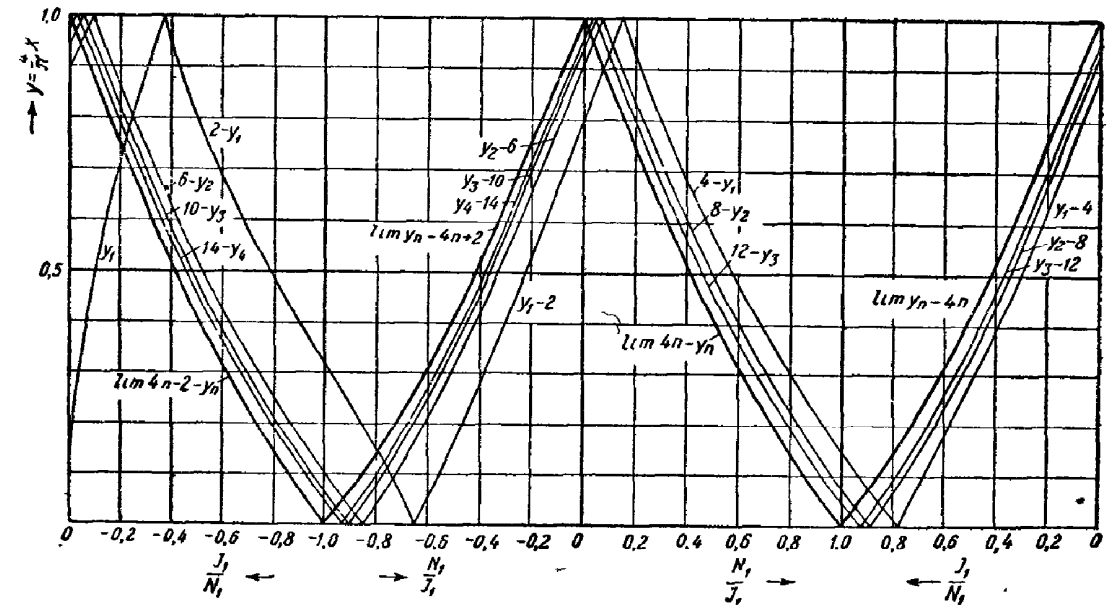


Рис. 143. Функция, обратная к $\dfrac{N_1\left(\frac{1}{4}\pi y\right)}{J_1\left(\frac{1}{4}\pi y\right)}$.

5.5. Для корней $x_{\nu, s}$ уравнений

$$\frac{J_\nu(x)}{N_\nu(x)} = \frac{J_\nu(kx)}{N_\nu(kx)} \quad \text{и} \quad \frac{J_0(x)}{N_0(x)} = \frac{J_1(kx)}{N_1(kx)}$$

(рис. 134—143) составлена *) таблица 52. Величины $(k-1)\,x_{\nu, s}$, содержащиеся в таблице, совпадают с величинами $(r_2-r_1)\,\tau_{\nu, s}$, где $\tau_{\nu, s}$—корни уравнения

$$J_\nu(r_1\tau)\,N_\nu(r_2\tau) - J_\nu(r_2\tau)\,N_\nu(r_1\tau) = 0,$$

причем $\frac{r_2}{r_1} = k$.

Таблица 52. **Первые шесть корней $x_{\nu, s}$ уравнения** $J(x)N(kx) - J(kx)N(x) = 0$

k	$x_{\nu,1}$	$x_{\nu,2}$	$x_{\nu,3}$	$x_{\nu,4}$	$x_{\nu,5}$	$x_{\nu,6}$	ν
1,2	15,7014	31,4126	47,1217	62,8302	78,5385	94,2467	
1,5	6,2702	12,5598	18,8451	25,1294	31,4133	37,6969	$\nu = 0$
2,0	3,1230	6,2734	9,4182	12,5614	15,7040	18,8462	
1,2	15,7080	31,4159	47,1239	62,8319	78,5398	94,2478	
1,5	6,2832	12,5664	18,8496	25,1327	31,4159	37,6991	$\nu = 1/2$
2,0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	
1,2	15,7277	31,4259	47,1305	62,8368	78,5438	94,2511	
1,5	6,3219	12,5861	18,8628	25,1427	31,4239	37,7057	$\nu = 1$
2,0	3,1966	6,3123	9,4445	12,5812	15,7199	18,8595	
1,2	15,7607	31,4424	47,1416	62,8451	78,5504	94,2566	
1,5	6,3858	12,6190	18,8848	25,1592	31,4371	37,7168	$\nu = 3/2$
2,0	3,2860	6,3607	9,4772	12,6059	15,7397	18,8760	
1,2	15,8066	31,4656	47,1570	62,8567	78,5597	94,2644	
1,5	6,4742	12,6648	18,9156	25,1823	31,4556	37,7322	$\nu = 2$
2,0	3,4069	6,4278	9,5229	12,6404	15,7673	18,8991	
1,2	15,8655	31,4953	47,1769	62,8716	78,5716	94,2743	
1,5	6,5861	12,7235	18,9551	25,2121	31,4795	37,7521	$\nu = 5/2$
2,0	3,5558	6,5131	9,5813	12,6846	15,8029	18,9288	

k	$(k-1)\,x_{\nu,1}$	$(k-1)\,x_{\nu,2}$	$(k-1)\,x_{\nu,3}$	$(k-1)\,x_{\nu,4}$	$(k-1)\,x_{\nu,5}$	$(k-1)\,x_{\nu,6}$	ν
1,2	3,1403	6,2826	9,4243	12,5660	15,7077	18,8493	
1,5	3,1351	6,2799	9,4226	12,5647	15,7066	18,8485	
2,0	3,1230	6,2734	9,4182	12,5614	15,7040	18,8462	$\nu = 0$
∞	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711	
1,2	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	
1,5	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	
2,0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	$\nu = 1/2$
∞	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	
1,2	3,1455	6,2852	9,4261	12,5674	15,7088	18,8502	
1,5	3,1609	6,2931	9,4314	12,5713	15,7119	18,8529	
2,0	3,1966	6,3123	9,4445	12,5812	15 7199	18,8595	$\nu = 1$
∞	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706	19,6159	
1,2	3,1521	6,2885	9,4283	12,5690	15,7101	18,8513	
1,5	3,1929	6,3095	9,4424	12,5796	15,7186	18,8584	
2,0	3,2860	6,3607	9,4772	12,6059	15,7397	18,8760	$\nu = 3/2$
∞	4,4934	7,7253	10,9041	14,0662	17,2208	20,3713	
1,2	3,1613	6,2931	9,4314	12,5713	15,7119	18,8529	
1,5	3,2371	6,3324	9,4578	12,5912	15,7278	18,8661	
2,0	3,4069	6,4278	9,5229	12,6404	15,7673	18,8991	$\nu = 2$
∞	5,1356	8,4172	11,6198	14,7960	17,9598	21,1170	
1,2	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143	18,8549	
1,5	3,2931	6,3618	9,4776	12,6060	15,7397	18,8760	
2,0	3,5558	6,5131	9,5813	12,6846	15,8029	18,9288	$\nu = 5/2$
∞	5,7635	9,0950	12,3229	15,5146	18,6890	21,8539	

*) См., например, A. N. Lowan and A. Hillman, J. Math. Physics, т. 22 (1943), стр 208—209; S. Chandrasekhar and D. Elbert, Proc. Cambridge Philos Soc., т. 50 (1954), стр. 266—268.

Продолжение табл. 52

k	$(k-1)\,x_{\nu,1}$	$(k-1)\,x_{\nu,2}$	$(k-1)\,x_{\nu,3}$	$(k-1)\,x_{\nu,4}$	ν
1,0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	
1	3,1412	6,2830	9,4247	12,5663	
2	3,1403	6,2825	9,4243	12,5660	
3	3,1389	6,2818	9,4239	12,5657	
4	3,1371	6,2809	9,4233	12,5652	
5	3,1351	6,2799	9,4226	12,5647	
6	3,1329	6,2787	9,4218	12,5641	
7	3,1306	6,2775	9,4210	12,5635	
8	3,1281	6,2762	9,4201	12,5628	$\nu = 0$
9	3,1256	6,2748	9,4192	12,5621	
2,0	3,1230	6,2734	9,4182	12,5614	
2,5	3,110	6,266	9,413	12,558	
3,0	3,097	6,258	9,408	12,553	
3,5	3,085	6,250	9,402	12,549	
4,0	3,073	6,243	9,397	12,545	
4,5	3,063	6,235	9,391	12,540	
5,0	3,053	6,228	9,386	12,536	
1,0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	
1	3,1427	6,2837	9,4251	12,5666	
2	3,1455	6,2852	9,4261	12,5674	
3	3,1498	6,2873	9 4275	12,5686	
4	3,1550	6,2900	9,4293	12,5698	
1,5	3,1609	6,2931	9,4314	12,5713	
6	3,1675	6,2965	9,4337	12,5731	$\nu = 1$
7	3,1744	6,3002	9,4362	12,5749	
8	3,1816	6,3041	9,4388	12,5769	
9	3,1890	6,3081	9,4416	12,5790	
2,0	3,1966	6,3123	9,4445	12,5812	
2,5	3,235	6,335	9,460	12,593	
3,0	3,271	6,358	9,476	12,605	

$(k-1)\,x_{\nu,1}$

k	$\nu = 0$	$\nu = 1/4$	$\nu = 1$	$\nu = 3/4$	$\nu = 2$	$\nu = 5/4$
1	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416
1,2	3,1403	3,1416	3,1455	3,1521	3,1613	3,1731
1,5	3,1351	3,1416	3,1609	3,1929	3,2371	3,2931
2	3,1230	3,1416	3,1966	3,2860	3,4069	3,5558
3	3,097	3,1416	3,271	3,474	3,736	4,041
4	3,073	3,1416	3,336	3,629	3,990	4,393
5	3,053	3,1416	3,389	3,749	4,177	4,640
6	3,035	3,1416	3,432	3,844	4,317	4,816
7	3,019	3,1416	3,468	3,918	4,424	4,947
8	3,006	3,1416	3,499	3,979	4,507	5,047
9	2,994	3,1416	3,525	4,029	4,574	5,125
10	2,983	3,1416	3,547	4,070	4,628	5,188
11	2,973	3,1416	3,566	4,105	4,673	5,240
19	2,92	3,1416	3,66	4,26	4,87	5,46
39	2,85	3,1416	3,74	4,38	5,00	5,62
∞	2,4048	3,1416	3,8317	4,4934	5,1356	5,7635

6. Функциональные уравнения

В дальнейшем $Z_\nu(z)$ и $\overline{Z}_\nu(z)$ означают любую из функций $J_\nu(z)$, $N_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ или линейную комбинацию этих функций с постоянными (не зависящими от индекса ν) коэффициентами.

6.1. Для $Z_\nu(z)$ при различных значениях порядка выполняются соотношения

$$zZ_{\nu-1}(z)+zZ_{\nu+1}(z)=2\nu Z_\nu(z),\quad Z_{\nu-1}(z)-Z_{\nu+1}(z)=2Z'_\nu(z).$$

Согласно Н. Нильсену, каждое аналитическое по переменным z, ν решение этих уравнений называется *цилиндрической функцией* $\mathfrak{Z}_\nu(z)$; оно является также и

решением дифференциального уравнения Бесселя. Функции $J_\nu(z)$, $N_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ являются цилиндрическими функциями $\mathfrak{C}_\nu(z)$ в смысле Нильсена. Однако решение $J_{-\nu}(z)$ дифференциального уравнения Бесселя, также соответствующее параметру ν, должно быть обозначено не через $\mathfrak{C}_\nu(z)$, а через $\mathfrak{C}_{-\nu}(z)$.

Справедливы следующие формулы дифференцирования:

$$Z'_\nu(z) = -\frac{\nu}{z} Z_\nu(z) + Z_{\nu-1}(z) = \frac{\nu}{z} Z_\nu(z) - Z_{\nu+1}(z),$$

$$Z'_0(z) = -Z_1(z), \qquad Z'_1(z) = Z_0(z) - \frac{1}{z} Z_1(z),$$

$$\frac{d}{dz}[z^\nu Z_\nu(\alpha z)] = \alpha z^\nu Z_{\nu-1}(\alpha z), \qquad \frac{d}{dz}[z^{-\nu} Z_\nu(\alpha z)] = -\alpha z^{-\nu} Z_{\nu+1}(\alpha z),$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{\frac{\nu}{2}} Z_\nu(\sqrt{\alpha z})\right] = \frac{\sqrt{\alpha}}{2} z^{\frac{\nu-1}{2}} Z_{\nu-1}(\sqrt{\alpha z}),$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-\frac{\nu}{2}} Z_\nu(\sqrt{\alpha z})\right] = -\frac{\sqrt{\alpha}}{2} z^{-\frac{\nu+1}{2}} Z_{\nu+1}(\sqrt{\alpha z}).$$

6.2. Между функциями J, N и H существуют соотношения

$$J_\nu(z) J_{-\nu+1}(z) + J_{\nu-1}(z) J_{-\nu}(z) = \frac{2 \sin \nu\pi}{\pi z}, \qquad N_{\nu-1}(z) J_\nu(z) - N_\nu(z) J_{\nu-1}(z) = \frac{2}{\pi z},$$

$$J_{\nu-1}(z) H_\nu^{(1)}(z) - J_\nu(z) H_{\nu-1}^{(1)}(z) = \frac{2}{\pi i z}, \qquad H_{\nu-1}^{(2)}(z) J_\nu(z) - H_\nu^{(2)}(z) J_{\nu-1}(z) = \frac{2}{\pi i z}.$$

6.3. Теорема сложения. Пусть a, b, c — стороны и α, β, γ — углы треугольника, так что

$$ce^{i\beta} = a - be^{-i\gamma},$$

или же комплексные величины, в которые эти шесть действительных величин можно непрерывно преобразовать таким образом, чтобы выполнялось указанное выше соотношение. Тогда имеем:

$$Z_\nu(c) e^{i\nu\beta} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z_{\nu+k}(a) J_k(b) e^{ik\gamma} \qquad \text{для} \qquad |be^{\pm i\gamma}| < |a|.$$

При $\beta = 0$, $\gamma = \pi$, $|b| < |a|$ имеем:

$$Z_\nu(a+b) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z_{\nu-k}(a) J_k(b),$$

а при

$$\gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \sqrt{a^2+b^2} = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{b}{\sin\beta}, \quad |b| < |a|$$

справедливы равенства:

$$Z_\nu(\sqrt{a^2+b^2}) \cos\nu\beta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k Z_{\nu+2k}(a) J_{2k}(b),$$

$$Z_\nu(\sqrt{a^2+b^2}) \sin\nu\beta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k Z_{\nu+2k+1}(a) J_{2k+1}(b).$$

В частности,

$$J_\nu(z+w) = \left(1+\frac{w}{z}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k w^k}{k!} \left(1+\frac{w}{2z}\right)^k J_{\nu+k}(z).$$

6.4. Теорема умножения:

$$Z_\nu(\lambda z)=\lambda^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Z_{\nu+k}(z)}{k!}\left(\frac{1-\lambda^2}{2}z\right)^k.$$

В случае, когда $Z_\nu=J_\nu$, λ может быть произвольным; во всех остальных случаях должно быть $|1-\lambda^2|<1$.

6.5. Формулы интегрирования:

$$\int J_\nu(z)\,dz=2\sum_{k=0}^{\infty}J_{\nu+2k+1}(z),$$

$$\int z^{\nu+1}Z_\nu(z)\,dz=z^{\nu+1}Z_{\nu+1}(z),\qquad \int z^{-\nu+1}Z_\nu(z)\,dz=-z^{-\nu+1}Z_{\nu-1}(z),$$

$$\int Z_1(z)\,dz=-Z_0(z),\qquad \int zZ_0(z)\,dz=zZ_1(z),$$

$$\int\left[(\alpha^2-\beta^2)z-\frac{\mu^2-\nu^2}{z}\right]Z_\mu(\alpha z)\overline{Z}_\nu(\beta z)\,dz=$$

$$=\beta z\,Z_\mu(\alpha z)\overline{Z}_{\nu-1}(\beta z)-\alpha z\,Z_{\mu-1}(\alpha z)\overline{Z}_\nu(\beta z)+(\mu-\nu)Z_\mu(\alpha z)\overline{Z}_\nu(\beta z),$$

$$\int zZ_\mu(\alpha z)\overline{Z}_\mu(\beta z)\,dz=\frac{\beta zZ_\mu(\alpha z)\overline{Z}_{\mu-1}(\beta z)-\alpha zZ_{\mu-1}(\alpha z)\overline{Z}_\mu(\beta z)}{\alpha^2-\beta^2},$$

$$\int z[Z_\mu(\alpha z)]^2\,dz=\frac{z^2}{2}\{[Z_\mu(\alpha z)]^2-Z_{\mu-1}(\alpha z)Z_{\mu+1}(\alpha z)\},$$

$$\int\frac{1}{z}Z_\mu(\alpha z)\overline{Z}_\nu(\alpha z)\,dz=\alpha z\frac{Z_{\mu-1}(\alpha z)\overline{Z}_\nu(\alpha z)-Z_\mu(\alpha z)\overline{Z}_{\nu-1}(\alpha z)}{\mu^2-\nu^2}-\frac{Z_\mu(\alpha z)\overline{Z}_\nu(\alpha z)}{\mu+\nu}.$$

7. Некоторые обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешимые в функциях Бесселя*).

$$w''+\frac{1-2\alpha}{z}w'+\left[(\beta\gamma z^{\gamma-1})^2+\frac{\alpha^2-\nu^2\gamma^2}{z^2}\right]w=0,\qquad w=z^\alpha Z_\nu(\beta z^\gamma);$$

$$w''+\left[(\beta\gamma z^{\gamma-1})^2-\frac{4\nu^2\gamma^2-1}{4z^2}\right]w=0,\qquad w=\sqrt{z}\,Z_\nu(\beta z^\gamma);$$

$$w''+\left(\beta^2-\frac{4\nu^2-1}{4z^2}\right)w=0,\qquad w=\sqrt{z}\,Z_\nu(\beta z);$$

$$w''+\frac{1-2\alpha}{z}w'+\left(\beta^2+\frac{\alpha^2-\nu^2}{z^2}\right)w=0,\qquad w=z^\alpha Z_\nu(\beta z);$$

$$w''+\frac{1}{z}w'+\left[(\beta\gamma z^{\gamma-1})^2-\left(\frac{\nu\gamma}{z}\right)^2\right]=0,\qquad w=Z_\nu(\beta z^\gamma);$$

$$w''+\frac{1}{z}w'+\left(\beta^2-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0,\qquad w=Z_\nu(\beta z);$$

$$w''+\frac{1}{z}w'+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0,\qquad w=Z_\nu(z);$$

$$w''+\frac{1}{z}w'-\left(1+\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0,\qquad w=Z_\nu(iz);$$

$$w''+\frac{1}{z}w'+\left(i-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0,\qquad w=Z_\nu(z\sqrt{i});$$

$$w''+\frac{1}{z}w'-\left(i+\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0,\qquad w=Z_\nu(z\sqrt{-i});$$

*) Более подробный список уравнений, разрешимых в бесселевых функциях, можно найти в книге Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Физматгиз, 1961.— *Прим. ред.*

$$w'' + \frac{1}{z} w' - \left[\frac{1}{z} + \left(\frac{\nu}{2z}\right)^2\right] w = 0, \qquad w = Z_\nu(2i\sqrt{z});$$

$$w'' + \frac{1}{z} w' + me^{i\mu} w = 0, \qquad w = Z_0(\sqrt{m} z e^{i\frac{\mu}{2}});$$

$$w'' + \left(me^{i\mu} + \frac{1}{4z^2}\right) w = 0, \qquad w = \sqrt{z} Z_0(\sqrt{m} z e^{i\frac{\mu}{2}});$$

$$w'' + bz^m w = 0, \qquad w = \sqrt{z} Z_{\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2} z^{\frac{m+2}{2}}\right);$$

$$w'' + bzw = 0, \quad w = \sqrt{z} Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2\sqrt{b}}{3}\sqrt{z^3}\right); \quad w'' + bz^2 w = 0, \quad w = \sqrt{z} Z_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{b}}{2} z^2\right);$$

$$w'' + \left(\frac{1-2\alpha}{z} \mp 2\beta\gamma i z^{\gamma-1}\right) w' + \left[\frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2}{z^2} \mp \beta\gamma(\gamma - 2\alpha) i z^{\gamma-2}\right] w = 0,$$

$$w = z^\alpha e^{\pm i\beta z^\gamma} Z_\nu(\beta z^\gamma);$$

$$w'' + \left(\frac{1}{z} \mp 2i\right) w' - \left(\frac{\nu^2}{z^2} \pm \frac{i}{z}\right) w = 0, \qquad w = e^{\pm iz} Z_\nu(z);$$

$$w'' + w' + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{z^2} w = 0, \qquad w = \sqrt{z} e^{-\frac{z}{2}} Z_\nu\left(\frac{iz}{2}\right);$$

$$w'' + \left(\frac{2\nu+1}{z} - k\right) w' - \frac{2\nu-1}{2z} kw = 0, \qquad w = \frac{e^{\frac{kz}{2}}}{z^\nu} Z_\nu\left(\frac{ikz}{2}\right);$$

$$w'' + \left(\frac{1}{z} - 2\operatorname{tg} z\right) w' - \left(\frac{\nu^2}{z^2} + \frac{\operatorname{tg} z}{z}\right) w = 0, \qquad w = \frac{1}{\cos z} Z_\nu(z);$$

$$w'' + \left(\frac{1}{z} + 2\operatorname{ctg} z\right) w' - \left(\frac{\nu^2}{z^2} - \frac{\operatorname{ctg} z}{z}\right) w = 0, \qquad w = \frac{1}{\sin z} Z_\nu(z);$$

$$w'' + \left(\frac{1}{z} - 2u\right) w' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2} + u^2 - u' - \frac{u}{z}\right) w = 0, \qquad w = e^{\int u\,dz} Z_\nu(z);$$

$$w''' + \frac{3}{2} w'' + \left(4 + \frac{1-4\nu^2}{z^2}\right) w' + \frac{4}{z} w = 0,$$

$$w = A[J_\nu(z)]^2 + BJ_\nu(z) N_\nu(z) + C[N_\nu(z)]^2 \equiv Q_\nu(z);$$

$$w''' + \frac{3(1-\alpha)}{z} w'' + \left(\frac{1 - 4\nu^2\gamma^2 + 3\alpha(\alpha-1)}{z^2} + 4\beta^2\gamma^2 z^{2\gamma-2}\right) w' +$$

$$+ \left(\frac{\alpha(4\nu^2\gamma^2 - \alpha^2)}{z^3} + 4\beta^2\gamma^2(\gamma - \alpha) z^{2\gamma-3}\right) w = 0, \qquad w = z^\alpha Q_\nu(\beta z^\gamma);$$

$$w''' + z^{2\gamma-2} w' + (\gamma - 1) z^{2\gamma-3} w = 0, \qquad w = zQ_{\frac{1}{2\gamma}}\left(\frac{z^\gamma}{2\gamma}\right);$$

$$w^{IV} + \frac{4-2\nu}{z} w''' + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{z^2} w'' - \frac{b^4}{16z^2} w = 0, \quad w = z^{\frac{\nu}{2}}[Z_\nu(b\sqrt{z}) + \overline{Z}_\nu(ib\sqrt{z})];$$

$$w^{IV} + \frac{4\nu-2}{\nu z} w''' + \frac{(\nu-1)(2\nu-1)}{\nu^2 z^2} w'' - \frac{b^4}{16\nu^4} z^{\frac{2}{\nu}-4} w = 0,$$

$$w = \sqrt{z}\,[Z_\nu(bz^{\frac{1}{2\nu}}) + \overline{Z}_\nu(ibz^{\frac{1}{2\nu}})];$$

$$w^{IV} + \frac{6}{z} w''' + \left(4 + \frac{7 - 2\nu^2 - 2\mu^2}{z^2}\right) w'' + \left(\frac{16}{z} + \frac{1 - 2\nu^2 - 2\mu^2}{z^3}\right) w' +$$

$$+ \left(\frac{8}{z^2} + \frac{(\nu^2 - \mu^2)^2}{z^4}\right) w = 0, \qquad w = Z_\nu(z)\overline{Z}_\mu(z).$$

В. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

1. Определения и обозначения

В приложениях часто играют роль бесселевы функции, рассматриваемые вдоль прямых, проходящих через нулевую точку ($\arg z = \text{const}$). Поэтому выгодно «видоизменить» эти функции поворотом системы координат так, чтобы действительная ось совпала с вышеупомянутой прямой. Два наиболее важных случая соответствуют поворотам на 90° и 135°; для соответствующих *модифицированных (видоизмененных) функций* употребляют специальные обозначения.

При повороте на 90° получаем бесселевы функции $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$; при повороте на 135° получаем *функции Кельвина* $\mathrm{ber}_\nu(z)$, $\mathrm{bei}_\nu(z)$, $\mathrm{her}_\nu(z)$, $\mathrm{hei}_\nu(z)$, $\mathrm{ker}_\nu(z)$, $\mathrm{kei}_\nu(z)$.

2. Функции $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$

2.1. Повороту на 90° соответствуют функции Бесселя $Z_\nu(iz)$. Они являются решениями дифференциального уравнения

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}-(z^2+\nu^2)\,w=0.$$

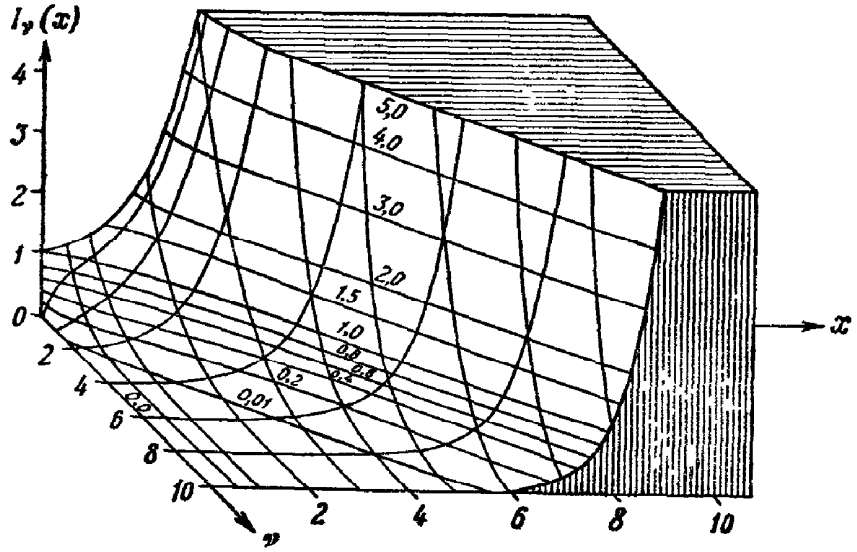


Рис. 144. Поверхность модифицированной функции Бесселя $I_\nu(x)$ над плоскостью действительных переменных ν, x.

Исходя из функций $J_\nu(z)$ и $H_\nu^{(1)}(z)$, определяют модифицированные функции Бесселя *)

$$I_\nu(z)=e^{-\nu\frac{\pi}{2}i}J_\nu\left(ze^{\frac{\pi}{2}i}\right)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)},$$

$$K_\nu(z)=\frac{\pi i}{2}e^{\nu\frac{\pi}{2}i}H_\nu^{(1)}\left(ze^{\frac{\pi}{2}i}\right)=-\frac{\pi i}{2}e^{-\nu\frac{\pi}{2}i}H_\nu^{(2)}\left(ze^{-\frac{\pi}{2}i}\right).$$

При этом $I_{-n}(z)=I_n(z)$, $K_{-\nu}(z)=K_\nu(z)$ и для нецелых ν

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)\right].$$

*) Первую из них иногда называют *функцией Бесселя мнимого аргумента*, а вторую — *функцией Макдональда* или *модифицированной функцией Ганкеля*. — *Прим. ред.*

Разложение в ряды для $K_\nu(z)$ при нецелочисленном порядке ν получается из разложения для $I_\nu(z)$. В случае целого $\nu = n$ имеем:

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z) \ln\left(\frac{\gamma z}{2}\right) + \frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!} \left(\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{n+k} \frac{1}{l}\right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

(γ — константа Эйлера).

Если порядок действителен и аргумент $z = x > 0$, то обе функции принимают действительные значения (рис. 144—149, таблицы 53—56). При $0 < x \ll 1$ их поведение описывается формулами

$$I_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu; \quad K_0(x) \approx \ln\frac{2}{\gamma x}; \quad K_n(x) \approx \frac{1}{2}\Gamma(n)\left(\frac{2}{x}\right)^n, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

При $x \gg 1$ функция $I_\nu(x)$ возрастает по показательному закону, а $K_\nu(x)$ убывает по показательному закону.

2.2. Дальнейшие представления и свойства функций $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ получаются из представлений и свойств $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$ на основании определений.

Обе функции, $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$, многозначны и после m обходов вокруг точки ветвления $z = 0$ получаются значения

$$I_\nu(e^{m\pi i} z) = e^{m\nu\pi i} I_\nu(z),$$
$$K_\nu(e^{m\pi i} z) = e^{-m\nu\pi i} K_\nu(z) - i\pi \frac{\sin m\nu\pi}{\sin \nu\pi} I_\nu(z) \qquad (m \text{ — целое});$$

в частности, $I_n(-z) = (-1)^n I_n(z)$.

Справедливы формулы:

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_\nu(z),$$
$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z),$$
$$2I'_\nu(z) = I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z),$$
$$-2K'_\nu(z) = K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z),$$
$$I'_0(z) = I_1(z), \qquad K'_0(z) = -K_1(z),$$
$$I_\nu(z) K_{\nu+1}(z) + I_{\nu+1}(z) K_\nu(z) = \frac{1}{z}.$$

О нулях этих функций см. рис. 150—154, таблицу 57.

Корень уравнения $H_1^{(2)\prime}(z) = 0$ или $H_1^{(2)}(z) = zH_0^{(2)}(z)$ равен

$$z = 0{,}5012 + i0{,}6435 = re^{i\varphi},$$

где $r = 0{,}8156$, $\varphi = 52^\circ{,}085 = 0{,}9091$ радиана.

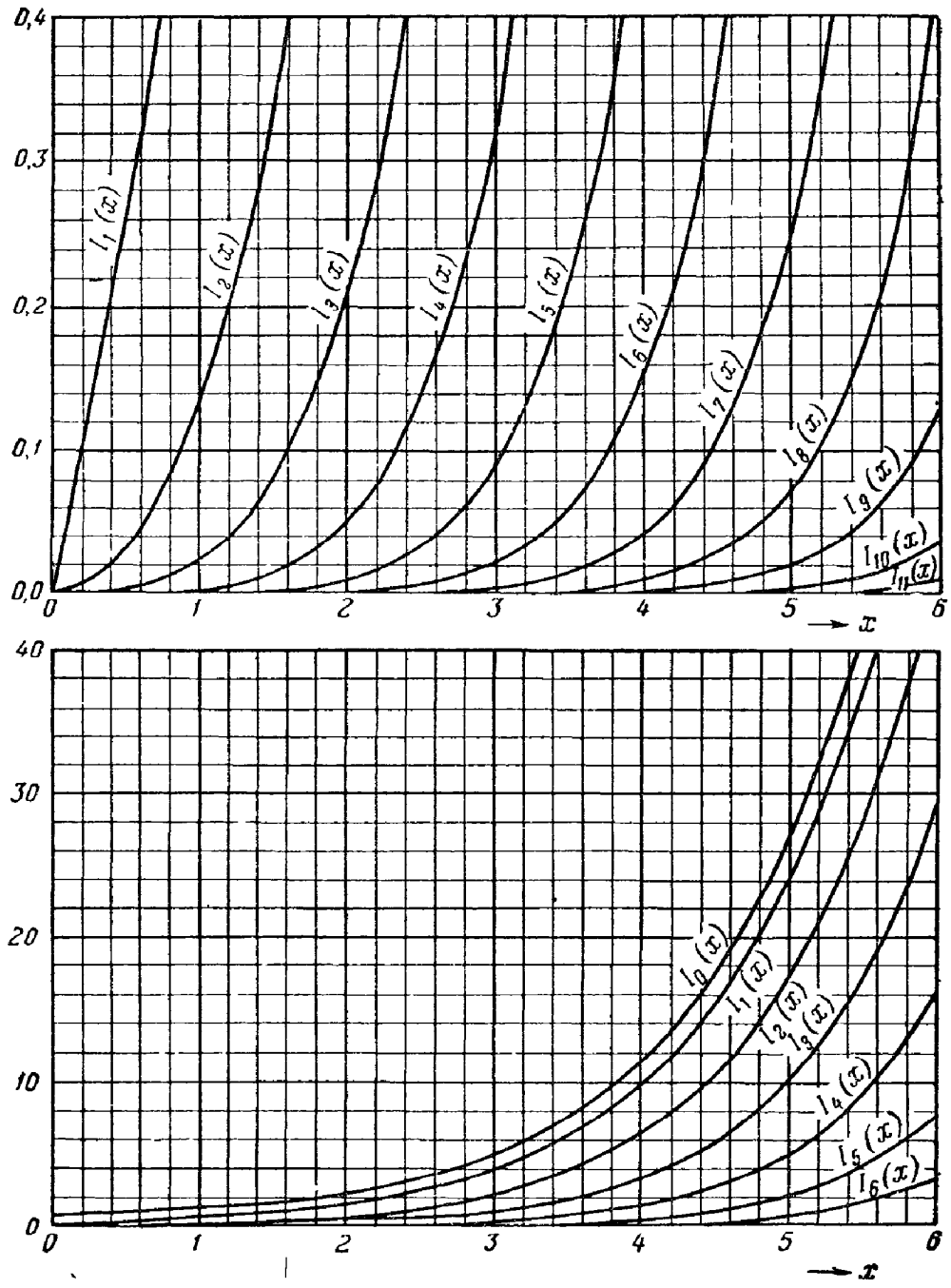
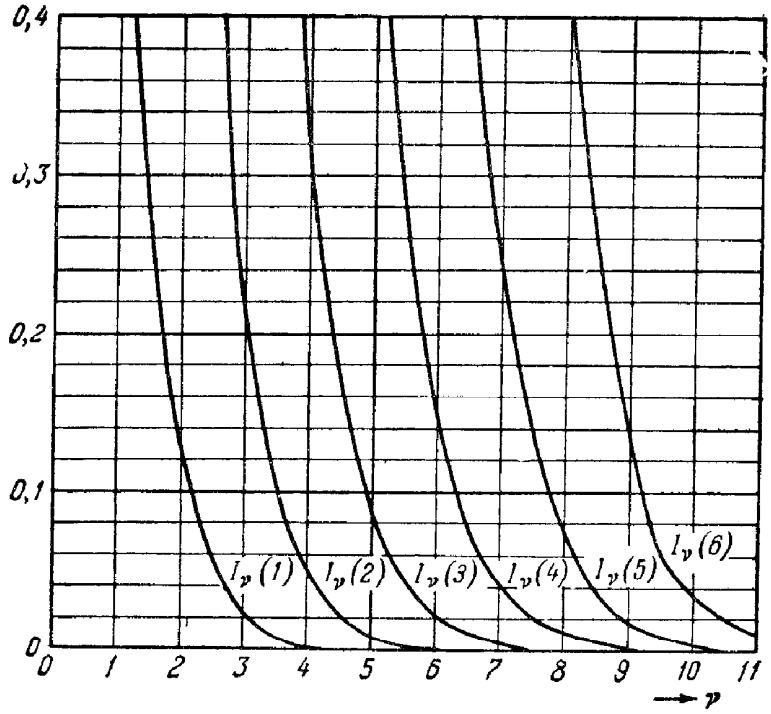


Рис. 145 и 146. Модифицированные функции Бесселя $I_n(x)$.



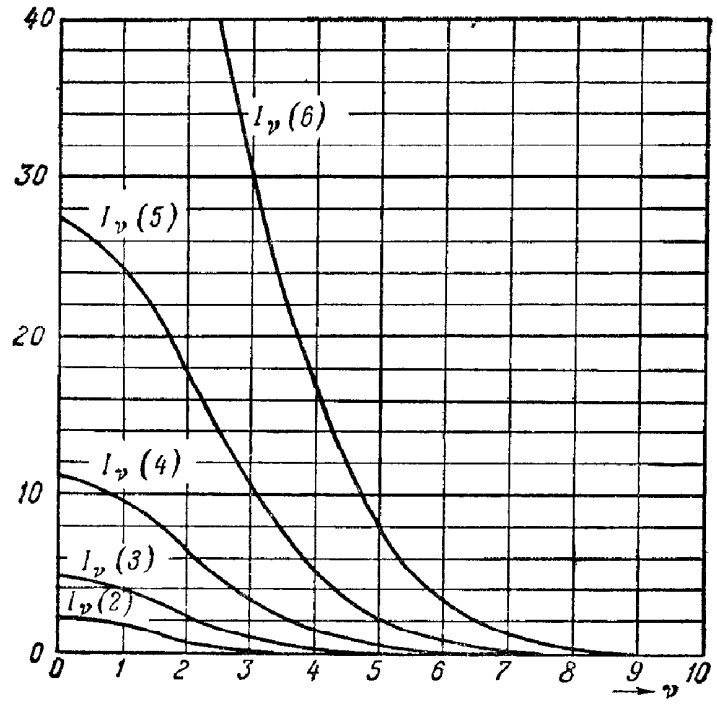


Рис 147 и 148. Модифицированные функции Бесселя $I_\nu(n)$ при постоянном аргументе и переменном порядке.

Таблица 53. Модифицированные функции Бесселя $I_0(x)$ и $I_1(x)$

x	$I_0(x)$		$I_1(x)$		x	$I_0(x)$		$I_1(x)$		x	$I_0(x)$		$I_1(x)$	
	1,		0,			1,		0,						
0,00	0000	+ 0,5	0000	+ 50	1,00	2661	+ 57	5652	+ 70,5	2,00	2,280	+ 16	1,5906	+ 150
02	0001	1,5	0100	50	02	2775	58,5	5793	71	02	2,312	16	1,6206	152
04	0004	2,5	0200	50	04	2892	60,5	5935	72,5	04	2,344	17	1,6510	155
06	0009	3,5	0300	50	06	3013	61,5	6080	73,5	06	2,378	17	1,6820	157,5
08	0016	4,5	0400	50,5	08	3136	63	6227	74	08	2,412	17	1,7135	160
0,10	0025	+ 5,5	0501	+ 50	1,10	3262	+ 64,5	6375	+ 75	2,10	2,446	+ 18	1,745	+ 16,5
12	0036	6,5	0601	50,5	12	3391	66	6525	76	12	2,482	17,5	1,778	16,5
14	0049	7,5	0702	50,5	14	3523	67,5	6677	77,5	14	2,517	18,5	1,811	17
16	0064	8,5	0803	50,5	16	3658	69	6832	78	16	2,554	18 5	1,845	17
18	0081	9,5	0904	50,5	18	3796	70,5	6988	79,5	18	2,591	19	1,879	17,5
0,20	0100	+ 10,5	1005	+ 51	1,20	3937	+ 72,5	7147	+ 80,5	2,20	2,629	+ 19,5	1,914	+ 18
22	0121	12	1107	51	22	4082	74	7308	81	22	2,668	19,5	1,950	18
24	0145	12,5	1209	51	24	4230	75,5	7470	83	24	2,707	20	1,986	18
26	0170	13,5	1311	51,5	26	4381	77	763б	83,5	26	2,747	20,5	2,022	19
28	0197	14,5	1414	51,5	28	4535	79	7803	85	28	2,788	21	2,060	19
0,30	0226	+ 16	1517	+ 52	1,30	4693	+ 80,5	7973	+ 86,5	2,30	2,830	+ 21	2,098	+ 19
32	0258	16,5	1621	52	32	4854	82,5	8146	87,5	32	2,873	21,5	2,136	20
34	0291	18	1725	52	34	5019	84	8321	88,5	34	2,915	22	2,176	20
36	0327	18,5	1829	53	36	5187	86	8498	90	36	2,959	22,5	2,216	20,5
38	0364	20	1935	52,5	38	5359	87,5	8678	91,5	38	3,004	22,5	2,257	20 5
0,40	0404	+ 21	2040	+ 53,5	1,40	5534	+ 89,5	8861	+ 92,5	2,40	3,049	+ 23,5	2,298	+ 21
42	0446	22	2147	53,5	42	5713	91,5	9046	94,5	42	3,096	23,5	2,340	21,5
44	0490	23	2254	53,5	44	5896	93	9235	95,5	44	3,143	24	2,383	22
46	0536	24	2361	54,5	46	6082	95,5	9426	97	46	3,191	24,5	2,427	22
48	0584	25,5	2470	54,5	48	6273	97	9620	98,5	48	3,240	25	2,471	23
0,50	0635	+ 26,5	2579	+ 55	1,50	6467	+ 99,5	9817	+ 100	2,50	3,290	+ 25,5	2,517	+ 23
52	0688	27	2689	55,5	52	6666	101	*0017	101,5	52	3,341	25,5	2,563	23,5
54	0742	29	2800	55,5	54	6868	103	0220	103	54	3,392	26,5	2,610	23,5
56	0800	29,5	2911	56,5	56	7074	105,5	0426	104,5	56	3,445	27	2,657	24,5
58	0859	30,5	3024	56,5	58	7285	107,5	0635	106,5	58	3,499	27	2,706	24,5
0,60	0920	+ 32	3137	+ 57	1,60	7500	+ 109,5	0848	+ 108	2,60	3,553	+ 28	2,755	+ 25,5
62	0984	33,5	3251	58	62	7719	111,5	1064	110	62	3,609	28,5	2,806	25,5
64	1051	34	3367	58	64	7942	114	1284	111,5	64	3,666	28,5	2,857	26
66	1119	35,5	3483	58,5	66	8170	116,5	1507	113	66	3,723	29,5	2,909	26,5
68	1190	36,5	3600	59,5	68	8403	118,5	1733	115	68	3,782	30	2,962	27
0,70	1263	+ 38	3719	+ 59,5	1,70	864	+ 12	1963	+ 117	2,70	3,842	+ 30,5	3,016	+ 27,5
72	1339	39	3838	60,5	72	888	12,5	2197	119	72	3,903	31	3,071	28
74	1417	40	3959	61	74	913	12,5	2435	121	74	3,965	31,5	3,127	28,5
76	1497	41,5	4081	61,5	76	938	12,5	2677	122,5	76	4,028	32	3,184	29
78	1580	42,5	4204	62,5	78	963	13,5	2922	125	78	4,092	32,5	3,242	29 5
0,80	1665	+ 44	4329	+ 62,5	1,80	990	+ 13	3172	+ 126,5	2,80	4,157	+ 33,5	3,301	+ 30
82	1753	45	4454	63,5	82	*016	13,5	3425	129	82	4,224	34	3,361	30,5
84	1843	46,5	4581	64,5	84	043	14	3683	131	84	4,292	34,5	3,422	31,5
86	1936	48	4710	65	86	071	14	3945	133,5	86	4,361	35	3,485	31,5
88	2032	49	4840	65,5	88	099	14,5	4212	135	88	4,431	36	3,548	32,5
0,90	2130	+ 50,5	4971	+ 66,5	1,90	128	+ 14,5	4482	+ 138	2,90	4,503	+ 36,5	3,613	+ 32,5
92	2231	51,5	5104	67,5	92	157	15	4758	140	92	4,576	37	3,678	33,5
94	2334	53	5239	68	94	187	15	5038	142,5	94	4,650	37,5	3,745	34
96	2440	54,5	5375	68,5	96	217	15,5	5323	144,5	96	4,725	38,5	3,813	35
98	2549	56	5512	70	98	248	16	5612	147	98	4,802	39,5	3,883	35
1,00	2661		5652		2,00	280		5906		3,00	4,881		3,953	
	1,		0,			2,		1,						

Продолжение табл. 53

x	$I_0(x)$		$I_1(x)$		x	$I_0(x)$		$I_1(x)$		x	$I_0(x)$		$I_1(x)$	
3,00	4,881	+ 40	3,953	+ 36	4,00	11,302	+ 98,5	9,759	+ 89,5	5,00	27,24	+ 24,5	24,34	+ 22,5
02	4,961	40,5	4,025	36,5	02	11,499	100	9,938	91,5	02	27,73	25	24,79	23
04	5,042	41,5	4,098	37,5	04	11,699	102,5	10,121	92,5	04	28,23	25,5	25,25	23,5
06	5,125	42	4,173	38	06	11,904	104	10,306	94,5	06	28,74	26	25,72	23,5
08	5,209	42,5	4,249	38,5	08	12,112	106	10,495	96,5	08	29,26	26,5	26,19	24,5
3,10	5,294	+ 44	4,326	+ 39,5	4,10	12,324	+ 107,5	10,688	+ 98	5,10	29,79	+ 27	26,68	+ 25
12	5,382	44,5	4,405	40	12	12,539	110	10,884	100	12	30,33	27,5	27,18	25
14	5,471	45	4,485	41	14	12,759	112	11,084	101,5	14	30,88	27,5	27,68	26
16	5,561	46	4,567	41,5	16	12,983	113,5	11,287	103,5	16	31,43	28,5	28,20	26
18	5,653	47	4,650	42	18	13,210	116	11,494	106	18	32,00	29	28,72	26,5
3,20	5,747	+ 48	4,734	+ 43	4,20	13,442	+ 118,5	11,706	+ 107,5	5,20	32,58	+ 29,5	29,25	+ 27,5
22	5,843	48,5	4,820	44	22	13,679	120	11,921	109,5	22	33,17	30,5	29,80	27,5
24	5,940	49,5	4,908	44,5	24	13,919	122,5	12,140	111,5	24	33,78	30,5	30,35	28,5
26	6,039	50,5	4,997	45,5	26	14,164	125	12,363	113,5	26	34,39	31	30,92	28,5
28	6,140	51,5	5,088	46,5	28	14,414	127	12,590	116	28	35,01	32	31,49	29,5
3,30	6,243	+ 52	5,181	+ 47	4,30	14,668	+ 129,5	12,822	+ 118	5,30	35,65	+ 32,5	32,08	+ 30
32	6,347	53,5	5,275	48	32	14,927	131,5	13,058	120	32	36,30	33	32,68	30,5
34	6,454	54	5,371	49	34	15,190	134,5	13,298	122,5	34	36,96	33,5	33,29	31
36	6,562	55	5,469	50	36	15,459	136,5	13,543	124,5	36	37,63	34	33,91	31,5
38	6,672	56,5	5,569	50,5	38	15,732	139	13,792	127	38	38,31	35	34,54	32
3,40	6,785	+ 57	5,670	+ 51,5	4,40	16,010	+ 142	14,046	+ 129,5	5,40	39,01	+ 35,5	35,18	+ 33
42	6,899	58,5	5,773	53	42	16,294	144,5	14,305	132	42	39,72	36	35,84	33,5
44	7,016	59	5,879	53,5	44	16,583	147	14,569	134	44	40,44	37	36,51	34
46	7,134	60,5	5,986	54,5	46	16,877	149,5	14,837	137	46	41,18	37,5	37,19	34,5
48	7,255	61,5	6,095	55,5	48	17,176	152,5	15,111	139	48	41,93	38	37,88	35,5
3,50	7,378	+ 62,5	6,206	+ 56,5	4,50	17,48	+ 15,5	15,389	+ 142	5,50	42,69	+ 39	38,59	+ 36
52	7,503	64	6,319	57,5	52	17,79	16	15,673	144,5	52	43,47	40	39,31	36,5
54	7,631	65	6,434	59	54	18,11	16	15,962	147,5	54	44,27	40,5	40,04	37,5
56	7,761	66	6,552	59,5	56	18,43	16,5	16,257	150	56	45,08	41	40,79	38
58	7,893	67,5	6,671	61	58	18,76	16,5	16,557	153	58	45,90	42	41,55	39
3,60	8,028	+ 68,5	6,793	+ 62	4,60	19,09	+ 17	16,86	+ 15,5	5,60	46,74	+ 42,5	42,33	+ 39,5
62	8,165	69,5	6,917	63	62	19,43	17,5	17,17	16	62	47,59	43,5	43,12	40,5
64	8,304	71,5	7,043	64	64	19,78	17,5	17,49	16	64	48,46	44,5	43,93	41
66	8,447	72	7,171	65,5	66	20,13	18	17,81	16,5	66	49,35	45	44,75	41,5
68	8,591	74	7,302	67	68	20,49	18,5	18,14	17	68	50,25	46	45,58	43
3,70	8,739	+ 75	7,436	+ 68	4,70	20,86	+ 18,5	18,48	+ 17	5,70	51,17	+ 47	46,44	+ 43
72	8,889	76	7,572	69	72	21,23	19	18,82	17,5	72	52,11	47,5	47,30	44,5
74	9,041	78	7,710	70,5	74	21,61	19,5	19,17	17,5	74	53,06	49	48,19	45
76	9,197	79,5	7,851	71,5	76	22,00	19,5	19,52	18	76	54,04	49,5	49,09	46
78	9,356	80,5	7,994	73	78	22,39	20	19,88	18,5	78	55,03	50,5	50,01	47
3,80	9,517	+ 82	8,140	+ 74,5	4,80	22,79	+ 20,5	20,25	+ 19	5,80	56,04	+ 51,5	50,95	+ 47,5
82	9,681	83,5	8,289	76	82	23,20	21	20,63	19	82	57,07	52	51,90	48,5
84	9,848	85,5	8,441	77	84	23,62	21	21,01	19,5	84	58,11	53,5	52,87	49,5
86	10,019	86,5	8,595	79	86	24,04	21,5	21,40	20	86	59,18	54,5	53,86	50,5
88	10,192	88,5	8,753	80	88	24,47	22	21,80	20	88	60,27	55,5	54,87	51,5
3,90	10,369	+ 90	8,913	+ 81,5	4,90	24,91	+ 22,5	22,20	+ 20,5	5,90	61,38	+ 56,5	55,90	+ 52,5
92	10,549	91,5	9,076	83	92	25,36	23	22,61	21	92	62,51	57	56,95	53,5
94	10,732	93,5	9,242	84,5	94	25,82	23	23,03	21,5	94	63,65	59	58,02	54
96	10,919	94,5	9,411	86,5	96	26,28	24	23,46	21,5	96	64,83	59,5	59,10	55,5
98	11,108	97	9,584	87,5	98	26,76	24	23,89	22,5	98	66,02	60,5	60,21	56,5
4,00	11,302		9,759		5,00	27,24		24,34		6,00	67,23		61,34	

Продолжение табл. 53

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	x	$I_0(x)$	$I_1(x)$
6,00	67,23 + 62	61,34 + 57,5	7,00	168,6 + 15,5	156,04 + 147,5	8,00	427,6 + 49	399,9 + 38
02	68,47 63	62,49 59	02	171,7 16,5	158,99 150 5	02	435,6 41,5	407,5 39
04	69,73 64,5	63,67 59,5	04	175,0 16	162,00 153,5	04	443,9 41,5	415,3 39,5
06	71,02 65,5	64,86 61	06	178,2 17	165,07 156,5	06	452,2 43	423,2 40,5
08	72,33 66,5	66,08 62	08	181,6 17	168,20 159	08	460,8 43,5	431,3 41
6,10	73,66 + 68	67,32 + 63	7,10	185,0 + 17	171,4 + 16	8,10	469,5 + 44,5	439,5 + 42
12	75,02 69,5	68,58 64,5	12	188,4 17,5	174,6 16 5	12	478,4 45	447,9 42,5
14	76,41 70,5	69,87 65,5	14	191,9 18	177,9 17	14	487,4 46	456,4 43,5
16	77,82 71,5	71,18 67	16	195,5 18,5	181,3 17	16	496,6 47	465,1 44,5
18	79,25 73,5	72,52 68 5	18	199,2 18 5	184,7 18	18	506,0 48	474,0 45
6,20	80,72 + 74,5	73,89 + 69	7,20	202,9 + 19	188,3 + 17,5	8,20	515,6 + 48,5	483,0 + 46,5
22	82,21 76	75,27 71	22	206,7 19,5	191 8 18,5	22	525,3 50	492,3 47
24	83,73 77,5	76,69 72	24	210,6 19,5	195 5 18 5	24	535,3 50,5	501,7 47,5
26	85,28 78,5	78,13 73,5	26	214,5 20 5	199,2 18 5	26	545,4 51,5	511,2 49
28	86,85 80,5	79,60 75	28	218,6 20 5	202,9 19 5	28	555,7 53	521,0 50
6,30	88,46 + 82	81,10 + 76,5	7,30	222,7 + 20,5	206,8 + 19 5	8,30	566,3 + 53,5	531,0 + 50,5
32	90,10 83,5	82,63 77,5	32	226,8 21,5	210,7 20	32	577,0 54,5	541,1 51,5
34	91,77 85	84,18 79,5	34	231,1 21,5	214,7 20,5	34	587,9 55,5	551,4 53
36	93,47 86 5	85,77 80 5	36	235,4 22	218,8 20 5	36	599,0 57	562,0 53,5
38	95,20 88	87,38 82 5	38	239,8 22,5	222,9 21 5	38	610,4 57 5	572,7 55
6,40	96,96 + 90	89,03 + 83,5	7,40	244,3 + 23	227,2 + 21,5	8,40	621,9 + 59	583,7 + 55 5
42	98,76 91 5	90,70 85 5	42	248,9 23 5	231 5 22	42	633,7 60	594,8 57
44	100,59 93,5	92,41 87	44	253,6 24	235,9 22 5	44	645,7 61,5	606,2 58
46	102,46 95	94,15 89	46	258,4 24	240,4 22 5	46	658,0 62,5	617,8 59
48	104,36 96,5	95,93 90,5	48	263,2 25	244,9 23 5	48	670,5 63,5	629,6 60
6,50	106,29 + 99	97,74 + 92	7,50	268,2 + 25	249,6 + 23 5	8,50	683,2 + 64,5	641,6 + 61,5
52	108,27 100,5	99,58 93 5	52	273,2 25 5	254 3 24 5	52	696 1 66	653,9 62,5
54	110,28 102	101,45 96	54	278,3 26 5	259,2 24 5	54	709,3 67,5	666,4 63,5
56	112,32 104,5	103,37 97,5	56	283,6 26 5	264,1 25	56	722,8 68,5	679,1 65
58	114,41 106,5	105,32 99	58	288,9 27	269,1 25 5	58	736,5 70	691,1 66,5
6,60	116,54 + 108	107,30 + 101 5	7,60	294,3 + 28	274 2 + 26	8,60	750,5 + 71	705,4 + 67,5
62	118,70 110 5	109,33 103	62	299,9 28	279,4 27	62	764,7 72 5	718,9 68,5
64	120,91 112 5	111,39 105	64	305,5 29	284,8 27	64	779,2 74	732,6 70,5
66	123,16 114,5	113,49 107 5	66	311,3 29	290,2 27,5	66	794,0 75,5	746,7 71
68	125,45 117	115,64 109	68	317,1 30	295,7 28	68	809,1 76,5	760,9 73
6,70	127,79 + 118,5	117,82 + 111 5	7,70	323,1 + 30 5	301,3 + 28 5	8,70	824,4 + 78,5	775,5 + 74,5
72	130,16 121,5	120,05 113	72	329,2 31	307,0 29,5	72	840,1 80	790,4 75,5
74	132,59 123,5	122,31 115,5	74	335,4 31,5	312,9 29,5	74	856,1 81	805,5 77
76	135,06 125,5	124,62 118	76	341,7 32	318,8 30,5	76	872,3 83	820,9 78,5
78	137,57 128,5	126,98 120	78	348,1 33	324,9 31	78	888,9 84,5	836,6 80,5
6,80	140,14 + 130,5	129,38 + 122	7,80	354,7 + 33,5	331,1 + 31,5	8,80	905,8 + 86	852,7 + 81,5
82	142,75 133	131,82 124,5	82	361,4 34	337,4 32	82	923,0 88	869,0 83
84	145,41 135,5	134,31 127	84	368,2 34,5	343,8 33	84	940,6 89	885,6 85
86	148,12 138	136,85 129,5	86	375,1 35,5	350,4 33,5	86	958,4 91,5	902,6 86,5
88	150,88 141	139,44 132	88	382,2 36	357,1 34	88	976,7 92,5	919,9 88
6,90	153,70 + 143,5	142,08 + 134,5	7,90	389,4 + 37	363,9 + 34,5	8,90	995,2 + 95	937,5 + 90
92	156,57 146	144,77 137	92	396,8 37	370,8 35,5	92	1014,2 96,5	955,5 91,5
94	159,49 149	147,51 139,5	94	404,2 38,5	377,9 36	94	1033,5 98	973,8 93,5
96	162,47 151,5	150,30 142	96	411,9 38,5	385,1 36,5	96	1053,1 100,5	992,5 95
98	165,50 154,5	153,14 145	98	419,6 40	392,4 37,5	98	1073,2 102	1011,5 97
7,00	168,59	156,04	8,00	427,6	399,9	9,00	1093,6	1030,9

Продолжение табл. 53

x	$I_0(x)$		$I_1(x)$		x	$I_0(x)$		$I_1(x)$		x	$I_0(x)$		$I_1(x)$	
9,00	1093,6	+ 104	1030,9	+ 99	9,40	1595	+ 15,5	1508	+ 14,5	9,80	2329	+ 22,5	2207	+ 21,5
02	1114,4	106	1050,7	100,5	42	1626	15,5	1537	14,5	82	2374	22,5	2250	21,5
04	1135,6	108	1070,8	103	44	1657	15,5	1566	15	84	2419	23,5	2293	22
06	1157,2	110,5	1091,4	104,5	46	1688	16,5	1596	15,5	86	2466	23,5	2337	22,5
08	1179,3	112	1112,3	106,5	48	1721	16	1627	15,5	88	2513	24	2382	23
9,10	1201,7	+ 114,5	1133,6	+ 109	9,50	1753	+ 17	1658	+ 16	9,90	2561	+ 24,5	2428	+ 23,5
12	1224,6	117	1155,4	111	52	1787	17	1690	16,5	92	2610	25	2475	23,5
14	1248,0	118,5	1177,6	113	54	1821	17,5	1723	16,5	94	2660	25,5	2522	24,5
16	1271,7	121,5	1200,2	115	56	1856	17,5	1756	17	96	2711	26	2571	25
18	1296,0	123,5	1223,2	117,5	58	1891	18	1790	17	98	2763	26,5	2621	25
9,20	1320,7	+ 125,5	1246,7	+ 119,5	9,60	1927	+ 18,5	1824	+ 17,5	10,00	2816		2671	
22	1345,8	128,5	1270,6	122	62	1964	19	1859	18					
24	1371,5	130,5	1295,0	124,5	64	2002	19	1895	18					
26	1397,6	133,5	1319,9	126,5	66	2040	19,5	1931	19					
28	1424,3	135,5	1345,2	129	68	2079	20	1969	18,5					
9,30	1451,4	+ 138,5	1371,0	+ 132	9,70	2119	+ 20	2006	+ 19,5					
32	1479,1	141	1397,4	134	72	2159	21	2045	19,5					
34	1507,3	144	1424,2	137	74	2201	21	2084	20,5					
36	1536,1	146,5	1451,6	139,5	76	2243	21,5	2125	20					
38	1565,4	149,5	1479,5	142	78	2286	21,5	2165	21					
9,40	1595,3		1507,9		9,80	2329		2207						

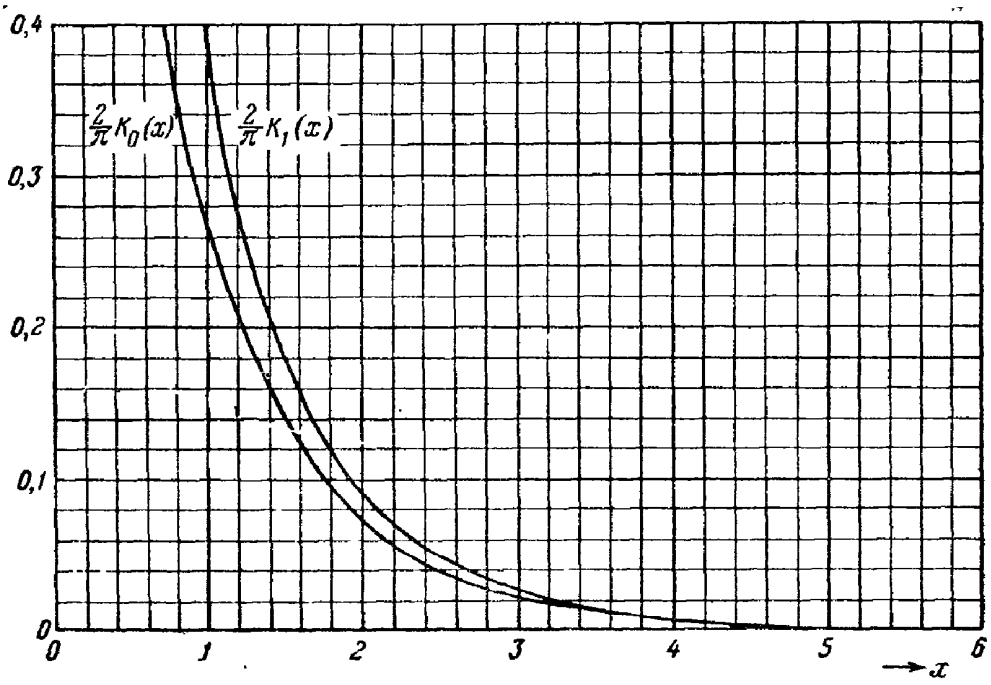


Рис. 149. Модифицированные функции Бесселя $\frac{2}{\pi}K_0(x)$ и $\frac{2}{\pi}K_1(x)$.

Таблица 54. Модифицированные функции Бесселя $I_n(x)$

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$I_2(x)$	$I_3(x)$	$I_4(x)$	$I_5(x)$
0,0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	1,0100	0,1005	0,5017 (— 2)	0,1671 (— 3)	0,4175 (— 5)	0,8347 (— 7)
0,4	1,0404	0,2040	0,2027 (— 1)	0,1347 (— 2)	0,6720 (— 4)	0,2684 (— 5)
0,6	1,0920	0,3137	0,4637 (— 1)	0,4602 (— 2)	0,3436 (— 3)	0,2056 (— 4)
0,8	1,1665	0,4329	0,8435 (— 1)	0,1110 (— 1)	0,1101 (— 2)	0,8764 (— 4)
1,0	1,2661	0,5652	0,1357	0,2217 (— 1)	0,2737 (— 2)	0,2715 (— 3)
1,2	1,3937	0,7147	0,2026	0,3936 (— 1)	0,5801 (— 2)	0,6879 (— 3)
1,4	1,5534	0,8861	0,2875	0,6452 (— 1)	0,1103 (— 1)	0,1519 (— 2)
1,6	1,7500	1,0848	0,3940	0,9989 (— 1)	0,1937 (— 1)	0,3036 (— 2)
1,8	1,9896	1,3172	0,5260	0,1482	0,3208 (— 1)	0,5625 (— 2)
2,0	2,2796	1,5906	0,6889	0,2127	0,5073 (— 1)	0,9826 (— 2)
2,2	2,6291	1,9141	0,8891	0,2976	0,7734 (— 1)	0,1637 (— 1)
2,4	3,0493	2,2981	1,1342	0,4079	0,1145	0,2626 (— 1)
2,6	3,5533	2,7554	1,4337	0,5496	0,1654	0,4079 (— 1)
2,8	4,1573	3,3011	1,7994	0,7305	0,2341	0,6169 (— 1)
3,0	4,8808	3,9534	2,2452	0,9598	0,3257	0,9121 (— 1)
3,2	5,7472	4,7343	2,7883	1,2489	0,4466	0,1323
3,4	6,7848	5,6701	3,4495	1,6119	0,6049	0,1886
3,6	8,0277	6,7927	4,2540	2,0661	0,8105	0,2651
3,8	9,5169	8,1404	5,2325	2,6326	1,0758	0,3678
4,0	11,3019	9,7595	6,4222	3,3373	1,4163	0,5047
4,2	13,4425	11,7056	7,8684	4,2120	1,8513	0,6857
4,4	16,0104	14,0462	9,6258	5,2955	2,4046	0,9234
4,6	19,0926	16,8626	11,7611	6,6355	3,1060	1,2338
4,8	22,7937	20,2528	14,3550	8,2903	3,9921	1,6369
5,0	27,2399	24,3356	17,5056	10,3312	5,1082	2,1580
5,2	32,5836	29,2543	21,3319	12,8451	6,5106	2,8288
5,4	39,0088	35,1821	25,9784	15,9388	8,2686	3,6890
5,6	46,7376	42,3283	31,6203	19,7424	10,4678	4,7884
5,8	56,0381	50,9462	38,4704	24,4148	13,2137	6,1890
6,0	67,2344	61,3419	46,7871	30,1505	16,6366	7,9685

x	$I_6(x)$	$I_7(x)$	$I_8(x)$	$I_9(x)$	$I_{10}(x)$	$I_{11}(x)$
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	0,1391 (— 8)	0,1987 (— 10)	0,2483 (— 12)	0,2758 (— 14)	0,2758 (— 16)	0,2507 (— 18)
0,4	0,8940 (— 7)	0,2552 (— 8)	0,6377 (— 10)	0,1417 (— 11)	0,2832 (— 13)	0,5148 (— 15)
0,6	0,1026 (— 5)	0,4388 (— 7)	0,1644 (— 8)	0,5473 (— 10)	0,1641 (— 11)	0,4471 (— 13)
0,8	0,5820 (— 5)	0,3316 (— 6)	0,1655 (— 7)	0,7340 (— 9)	0,2932 (— 10)	0,1065 (— 11)
1,0	0,2249 (— 4)	0,1599 (— 5)	0,9961 (— 7)	0,5518 (— 8)	0,2753 (— 9)	0,1249 (— 10)
1,2	0,6821 (— 4)	0,5809 (— 5)	0,4335 (— 6)	0,2879 (— 7)	0,1722 (— 8)	0,9365 (— 10)
1,4	0,1752 (— 3)	0,1737 (— 4)	0,1510 (— 5)	0,1168 (— 6)	0,8138 (— 8)	0,5160 (— 9)
1,6	0,3987 (— 3)	0,4506 (— 4)	0,4467 (— 5)	0,3942 (— 6)	0,3136 (— 7)	0,2270 (— 8)
1,8	0,8280 (— 3)	0,1050 (— 3)	0,1168 (— 4)	0,1157 (— 5)	0,1034 (— 6)	0,8409 (— 8)
2,0	0,1600 (— 2)	0,2246 (— 3)	0,2770 (— 4)	0,3044 (— 5)	0,3017 (— 6)	0,2722 (— 7)
2,2	0,2919 (— 2)	0,4492 (— 3)	0,6076 (— 4)	0,7329 (— 5)	0,7975 (— 6)	0,7903 (— 7)
2,4	0,5081 (— 2)	0,8497 (— 3)	0,1250 (— 3)	0,1641 (— 4)	0,1944 (— 5)	0,2098 (— 6)
2,6	0,8505 (— 2)	0,1534 (— 2)	0,2437 (— 3)	0,3456 (— 4)	0,4426 (— 5)	0,5165 (— 6)
2,8	0,1377 (— 1)	0,2664 (— 2)	0,4540 (— 3)	0,6915 (— 4)	0,9513 (— 5)	0,1193 (— 5)
3,0	0,2168 (— 1)	0,4472 (— 2)	0,8137 (— 3)	0,1324 (— 3)	0,1946 (— 4)	0,2610 (— 5)
3,2	0,3332 (— 1)	0,7295 (— 2)	0,1410 (— 2)	0,2439 (— 3)	0,3816 (— 4)	0,5446 (— 5)
3,4	0,5015 (— 1)	0,1160 (— 1)	0,2373 (— 2)	0,4347 (— 3)	0,7205 (— 4)	0,1090 (— 4)
3,6	0,7411 (— 1)	0,1806 (— 1)	0,3893 (— 2)	0,7523 (— 3)	0,1316 (— 3)	0,2103 (— 4)
3,8	0,1078	0,2755 (— 1)	0,6243 (— 2)	0,1269 (— 2)	0,2336 (— 3)	0,3929 (— 4)
4,0	0,1545	0,4133 (— 1)	0,9810 (— 2)	0,2090 (— 2)	0,4038 (— 3)	0,7131 (— 4)
4,2	0,2186	0,6105 (— 1)	0,1514 (— 1)	0,3373 (— 2)	0,6819 (— 3)	0,1261 (— 3)
4,4	0,3060	0,8894 (— 1)	0,2299 (— 1)	0,5344 (— 2)	0,1128 (— 2)	0,2178 (— 3)
4,6	0,4239	0,1280	0,3440 (— 1)	0,8324 (— 2)	0,1830 (— 2)	0,3683 (— 3)
4,8	0,5819	0,1821	0,5080 (— 1)	0,1277 (— 1)	0,2918 (— 2)	0,6109 (— 3)
5,0	0,7923	0,2565	0,7412 (— 1)	0,1932 (— 1)	0,4580 (— 2)	0,9955 (— 3)
5,2	1,0707	0,3580	0,1070	0,2885 (— 1)	0,7086 (— 2)	0,1596 (— 2)
5,4	1,4371	0,4954	0,1528	0,4260 (— 1)	0,1082 (— 1)	0,2523 (— 2)
5,6	1,9171	0,6803	0,2163	0,6222 (— 1)	0,1632 (— 1)	0,3932 (— 2)
5,8	2,5430	0,9277	0,3037	0,9000 (— 1)	0,2435 (— 1)	0,6052 (— 2)
6,0	3,3558	1,2569	0,4230	0,1290	0,3594 (— 1)	0,9207 (— 2)

Таблица 55. Модифицированные функции Бесселя $\frac{2}{\pi}K_0(x)$ и $\frac{2}{\pi}K_1(x)$

$$\frac{2}{\pi}K_0(x) = iH_0^{(1)}(ix) = -iH_0^{(2)}(-ix), \quad \frac{2}{\pi}K_1(x) = -H_1^{(1)}(ix) = -H_1^{(2)}(-ix)$$

x	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$		$\frac{2}{\pi}K_1(x)$		x	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$		$\frac{2}{\pi}K_1(x)$		x	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$		$\frac{2}{\pi}K_1(x)$	
						0,		0,			0,0		0,0	
0,00	∞		∞		1,00	2680	— 37 5	3832	— 64	2,00	7251	— 88	8904	— 115 5
02	+ 2,565		+ 31,802		02	2605	36 5	3704	61	02	7075	85 5	8673	112
04	2,124		15,867		04	2532	35	3582	58,5	04	6904	83 5	8449	108 5
06	1,867		10,545		06	2462	34,5	3465	56	06	6737	81 5	8232	106
08	1,685		7,878		08	2393	33	3353	54	08	6574	79	8020	103
0,10	+ 1,5451	+ 249	+ 6,273		1,10	2327	— 31 5	3245	— 51 5	2,10	6416	— 77	7814	— 100
12	1,4310	176	5,200		12	2264	31	3142	50	12	6262	75 5	7614	97
14	1,3351	130	4,432		14	2202	30	3042	47 5	14	6111	73	7420	94 5
16	1,2525	100	3,854		16	2142	29	2947	46	16	5965	71 5	7231	91,5
18	1,1801	80	3,403		18	2084	28	2855	44	18	5822	69 5	7048	89 5
0,20	+ 1,1158	+ 65	+ 3,0405	+ 634	1,20	2028	— 27 5	2767	— 42,5	2,20	5683	— 68	6869	— 87
22	1,0581	54	2,7433	479	22	1973	26,5	2682	41	22	5547	66	6695	84 5
24	1,0057	45	2,4950	370	24	1920	25,5	2600	39,5	24	5415	64 5	6526	82
26	0,9580	39	2,2842	292	26	1869	24,5	2521	38	26	5286	62,5	6362	80
28	0,9142	34	2,1030	235	28	1820	24,5	2445	36,5	28	5161	61 5	6202	77,5
0,30	+ 0,8737	+ 29	+ 1,9455	+ 191	1,30	1771	— 23	2372	— 35,5	2 30	5038	— 59 5	6047	— 75,5
32	0,8362	26	1,8074	158	32	1725	23	2301	34	32	4919	58 5	5896	74
34	0,8013	23	1,6852	132	34	1679	22	2233	33	34	4802	56 5	5748	71 5
36	0,7687	21	1,5763	112	36	1635	21	2167	31,5	36	4689	55 5	5605	69 5
38	0,7382	18	1,4786	95	38	1593	21	2104	30,5	38	4578	54	5466	68
0,40	+ 0,7095	+ 17	+ 1,3906	+ 82	1,40	15512	— 201,5	2043	— 30	2,40	4470	— 52 5	5330	— 66
42	0,6825	15	1,3108	71	42	15109	195,5	1983	28,5	42	4365	51,5	5198	64
44	0,6571	14	1,2381	62	44	14718	190	1926	27,5	44	4262	50	5070	63
46	0,6330	13	1,1717	54	46	14338	184	1871	26,5	46	4162	49	4944	60 5
48	0,6101	+ 12	1,1107	48	48	13970	179,5	1818	26	48	4064	47 5	4823	59,5
0,50	+ 0,5885	+ 11	+ 1,0545	+ 43	1,50	13611	— 174	1766	— 25	2,50	3969	— 46 5	4704	— 57,5
52	0,5679	— 103	1,0026	38	52	13263	169	1716	24	52	3876	45	4589	56,5
54	0,5484	97 5	0,9545	34	54	12925	164,5	1668	23 5	54	3786	44,5	4476	54,5
56	0,5297	93,5	0,9099	31	56	12596	160	1621	22,5	56	3697	43	4367	53,5
58	0,5120	88,5	0,8683	28	58	12276	155	1576	22	58	3611	42	4260	52
0,60	+ 0,4950	— 81	+ 0,8294	+ 25	1,60	11966	— 151 5	15319	— 212	2,60	3527	— 41	4156	— 50,5
62	0,4788	78	0,7931	23	62	11663	146,5	14895	205	62	3445	40	4055	49 5
64	0,4632	74	0,7590	21	64	11370	143	14485	199	64	3365	39,5	3956	48
66	0,4484	71	0,7270	19	66	11084	139	14087	192,5	66	3286	38	3860	46 5
68	0,4342	68,5	0,6970	17	68	10806	135	13702	187	68	3210	37	3767	45 5
0,70	+ 0,4205	— 65 5	+ 0,6686	+ 16	1,70	10536	— 131,5	13328	— 180 5	2,70	3136	— 36,5	3676	— 44 5
72	0,4074	63	0,6419	— 133,5	72	10273	128	12967	175 5	72	3063	35 5	3587	43 5
74	0,3948	60,5	0,6166	126,5	74	10017	124,5	12616	170	74	2992	34 5	3500	42
76	0,3827	58	0,5927	119,5	76	09768	121	12276	165	76	2923	33 5	3416	41
78	0,3711	56	0,5701	113	78	09526	118	11946	160	78	2856	33	3334	40
0,80	+ 0,3599	— 54	+ 0,5486	107 5	1,80	09290	— 114,5	11626	— 155	2,80	2790	— 32 5	3254	— 39
82	0,3491	51,5	0,5282	— 102	82	09061	111 5	11316	150 5	82	2725	31	3176	38
84	0,3388	50	0,5089	96,5	84	08838	109	11015	146	84	2663	31	3100	37
86	0,3288	48	0,4904	92,5	86	08620	105 5	10723	142	86	2601	29 5	3026	36 5
88	0,3192	46 5	0,4729	87,5	88	08409	103	10439	137,5	88	2542	29 5	2953	35
0,90	+ 0,3099	— 45	+ 0,4562	83,5	1,90	08203	— 100 5	10164	— 133,5	2,90	2483	— 28 5	2883	— 34 5
92	0,3009	43,5	0,4402	— 80	92	08002	97 5	09897	129 5	92	2426	27 5	2814	33 5
94	0,2922	41 5	0 4250	76	94	07807	95 5	09638	126	94	2371	27 5	2747	32,5
96	0,2839	40 5	0,4104	73	96	07616	92 5	09386	122	96	2316	26 5	2682	32
98	0,2758	39	0,3965	69 5	98	07431	90	09142	119	98	2263	25 5	2618	31
1,00	+ 0,2680		+ 0,3832	66,5	2,00	07251		08904		3,00	2212		2556	
						0,		0,			0,0		0,0	

Продолжение табл. 55

x	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$		$\frac{2}{\pi}K_1(x)$		x	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$		$\frac{2}{\pi}K_1(x)$		x	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$		$\frac{2}{\pi}K_1(x)$	
	0,0		0,0			$10^{-2}\times$ 0,		$10^{-2}\times$ 0,			$10^{-2}\times$ 0,		$10^{-2}\times$ 0,	
3,00	2212	— 25,5	2556	— 30	4,00	7104	— 78,5	7947	— 89,5	5,00	2350	— 25,5	2575	— 28,5
02	2161	24,5	2496	29,5	02	6947	76,5	7768	88	02	2299	25	2518	27,5
04	2112	24	2437	29	04	6794	75	7592	85,5	04	2249	24,5	2463	27
06	2064	23,5	2379	28	06	6644	73,5	7421	84	06	2200	23,5	2409	26,5
08	2017	23	2323	27	08	6497	72	7253	81,5	08	2153	23,5	2356	26
3,10	1971	— 22,5	2269	— 27	4,10	6353	— 70	7090	— 80	5,10	2106	— 22,5	2304	— 25,5
12	1926	22	2215	26	12	6213	68,5	6930	78	12	2061	22,5	2253	24,5
14	1882	21,5	2163	25,5	14	6076	67	6774	76,5	14	2016	22	2204	24
16	1839	20,5	2112	24,5	16	5942	65,5	6621	74,5	16	1972	21	2156	24
18	1798	20,5	2063	24,5	18	5811	64	6472	72,5	18	1930	21	2108	23
3,20	17568	— 199,5	2014	— 23,5	4,20	5683	— 62,5	6327	— 71	5,20	1888	— 20,5	2062	— 22,5
22	17169	194	1967	23	22	5558	61	6185	69,5	22	1847	20	2017	22
24	16781	190	1921	22,5	24	5436	60	6046	68	24	1807	19,5	1973	21,5
26	16401	185 5	1876	21,5	26	5316	58	5910	66	26	1768	19	1930	21,5
28	16030	181	1833	21,5	28	5200	57,5	5778	65	28	1730	18,5	1887	20,5
3,30	15668	— 177	17900	— 208,5	4,30	5085	— 55,5	5648	— 63	5,30	16928	— 182,5	1846	— 20
32	15314	173	17483	203	32	4974	55	5522	62	32	16563	178,5	1806	20
34	14968	168,5	17077	198,5	34	4864	53	5398	60,5	34	16206	174,5	1766	19
36	14631	165	16680	193,5	36	4758	52,5	5277	59	36	15857	171	1728	19
38	14301	161	16293	189	38	4653	51	5159	57,5	38	15515	167	1690	18,5
3,40	13979	— 157,5	15915	— 184,5	4,40	4551	— 49,5	5044	— 56,5	5,40	15181	— 163,5	16531	— 180,5
42	13664	153 5	15546	180	42	4452	49	4931	55	42	14854	160	16170	176,5
44	13357	150	15186	175,5	44	4354	47,5	4821	53,5	44	14534	156,5	15817	172,5
46	13057	146,5	14835	171	46	4259	47	4714	52,5	46	14221	153	15472	168,5
48	12764	143,5	14493	167,5	48	4165	45,5	4609	51,5	48	13915	150	15135	165
3,50	12477	— 140	14158	— 163	4,50	4074	— 44,5	4506	— 50	5,50	13615	— 146	14805	— 161
52	12197	136,5	13832	159,5	52	3985	43,5	4406	49	52	13323	143,5	14483	158
54	11924	133,5	13513	155,5	54	3898	42,5	4308	48	54	13036	140	14167	154
56	11657	130,5	13202	152	56	3813	41,5	4212	47	56	12756	137	13859	151
58	11396	127,5	12898	148	58	3730	41	4118	45,5	58	12482	134	13557	147,5
3,60	11141	— 125	12602	— 144,5	4,60	3648	— 40	4027	— 45	5,60	12214	— 131,5	13262	— 144
62	10891	121,5	12313	141,5	62	3568	38,5	3937	43,5	62	11951	128	12974	141
64	10648	119	12030	138	64	3491	38,5	3850	43	64	11695	126	12692	138
66	10410	116	11754	134,5	66	3414	37	3764	41,5	66	11443	122,5	12416	135
68	10178	113,5	11485	131,5	68	3340	36,5	3681	41	68	11198	120	12146	132
3,70	09951	— 111	11222	— 128	4,70	3267	— 35,5	3599	— 39,5	5,70	10958	— 117,5	11882	— 128,5
72	09729	108,5	10966	125,5	72	3196	35	3520	39	72	10723	115	11625	126,5
74	09512	106	10715	122	74	3126	34	3442	38,5	74	10493	112,5	11372	123
76	09300	103,5	10471	119,5	76	3058	33	3365	37	76	10268	110,5	11126	121
78	09093	101	10232	116,5	78	2992	32,5	3291	36,5	78	10047	107,5	10884	118
3,80	08891	— 99	09999	— 114	4,80	2927	— 32	3218	— 35,5	5,80	09832	— 105	10648	— 115,5
82	08693	96,5	09771	111,5	82	2863	31	3147	34,5	82	09622	103,5	10417	112,5
84	08500	94,5	09548	108,5	84	2801	30,5	3078	34	84	09415	100,5	10192	110,5
86	08311	92	09331	106	86	2740	30	3010	33,5	86	09214	98,5	09971	108
88	08127	90,5	09119	103,5	88	2680	29	2943	32,5	88	09017	96,5	09755	105,5
3,90	07946	— 88	08912	— 101	4,90	2622	— 28,5	2878	— 31,5	5,90	08824	— 94,5	09544	— 103,5
92	07770	86	08710	99	92	2565	27,5	2815	31	92	08635	92,5	09337	101
94	07598	84	08512	96	94	2510	27,5	2753	30,5	94	08450	90,5	09135	98,5
96	07430	82,5	08320	94,5	96	2455	26,5	2692	29,5	96	08269	88	08938	96,5
98	07265	80,5	08131	92	98	2402	26	2633	29	98	08093	86,5	08745	94,5
4,00	07104		07947		5,00	2350		2575		6,00	07920		08556	
	0,0		0,0			$10^{-2}\times$ 0,		$10^{-2}\times$ 0,			$10^{-2}\times$ 0,		$10^{-2}\times$ 0,	

Продолжение табл. 55

x	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$		$\frac{2}{\pi}K_1(x)$		x	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$		$\frac{2}{\pi}K_1(x)$		x	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$		$\frac{2}{\pi}K_1(x)$	
	$10^{-3}\times 0,$		$10^{-3}\times 0,$			$10^{-3}\times 0,$		$10^{-3}\times 0,$			$10^{-4}\times 0,$		$10^{-4}\times 0,$	
6,00	7920	— 85	8556	— 92 5	7,00	2704	— 28,5	2891	— 30,5	8,00	9325	— 98	9891	— 104,5
02	7750	82,5	8371	90,5	02	2647	28	2830	30 5	02	9129	96	9682	102
04	7585	81	8190	88,5	04	2591	27 5	2769	29 5	04	8937	93 5	9478	100,5
06	7423	79 5	8013	86 5	06	2536	26 5	2710	28 5	06	8750	92	9277	97,5
08	7264	77 5	7840	84 5	08	2483	26,5	2653	28 5	08	8566	90	9082	96
6,10	7109	— 76	7671	— 83	7,10	2430	— 25 5	2596	— 27 5	8,10	8386	— 87,5	8890	— 94
12	6957	74	7505	80,5	12	2379	25	2541	27	12	8211	86 5	8702	91 5
14	6809	73	7344	79,5	14	2329	25	2487	26,5	14	8038	84	8519	90
16	6663	71	7185	77 5	16	2279	24	2434	26	16	7870	82,5	8339	88
18	6521	69,5	7030	75,5	18	2231	23,5	2382	25 5	18	7705	81	8163	86
6,20	6382	— 68	6879	— 74	7,20	2184	— 23	2331	— 24 5	8,20	7543	— 79	7991	— 84 5
22	6246	66 5	6731	72,5	22	2138	22 5	2282	24 5	22	7385	77,5	7822	82 5
24	6113	65	6586	71	24	2093	22	2233	24	24	7230	75 5	7657	80,5
26	5983	64	6444	69,5	26	2049	22	2185	23	26	7079	74,5	7496	79
28	5855	62,5	6305	67,5	28	2005	21	2139	23	28	6930	72,5	7338	77,5
6,30	5730	— 61	6170	— 66,5	7,30	1963	— 20,5	2093	— 22	8,30	6785	— 71	7183	— 75,5
32	5608	59 5	6037	65	32	1922	20,5	2049	22	32	6643	69,5	7032	74,5
34	5489	58,5	5907	63,5	34	1881	20	2005	21	34	6504	68	6883	72,5
36	5372	57	5780	62	36	1841	19	1963	21	36	6368	67	6738	71
38	5258	56	5656	61	38	1803	19	1921	20,5	38	6234	65	6596	69
6,40	5146	— 55	5534	— 59,5	7,40	17646	— 186	1880	— 20	8,40	6104	— 64	6458	— 68
42	5036	53 5	5415	58	42	17274	182	1840	19,5	42	5976	62 5	6322	67
44	4929	52,5	5299	57	44	16910	178,5	1801	19	44	5851	61	6188	65
46	4824	51	5185	55 5	46	16553	174	1763	18,5	46	5729	60	6058	63,5
48	4722	50,5	5074	54,5	48	16205	171	1726	18,5	48	5609	59	5931	62,5
6,50	4621	— 49	4965	— 53,5	7,50	15863	— 167	16889	— 179	8,50	5491	— 57,5	5806	— 61
52	4523	48	4858	52	52	15529	163,5	16531	175,5	52	5376	56	5684	60
54	4427	47	4754	51	54	15202	160	16180	171,5	54	5264	55	5564	58,5
56	4333	46	4652	49,5	56	14882	157	15837	168	56	5154	54	5447	57,5
58	4241	45	4553	49	58	14568	153	15501	164,5	58	5046	52,5	5332	56
6,60	4151	— 44	4455	— 48	7,60	14262	— 150,5	15172	— 160,5	8,60	4941	— 52	5220	— 55
62	4063	43	4359	46,5	62	13961	146,5	14851	157,5	62	4837	50,5	5110	53,5
64	3977	42,5	4266	45,5	64	13668	144	14536	154	64	4736	49,5	5003	52,5
66	3892	41	4175	45	66	13380	141	14228	151	66	4637	48,5	4898	51,5
68	3810	40,5	4085	43,5	68	13098	137,5	13926	147,5	68	4540	47,5	4795	50 5
6,70	3729	— 39,5	3998	— 43	7,70	12823	— 135	13631	— 144	8,70	4445	— 46,5	4694	— 49
72	3650	39	3912	41,5	72	12553	132	13343	141 5	72	4352	45,5	4596	48,5
74	3572	38	3829	41	74	12289	129	13060	138	74	4261	44,5	4499	47,5
76	3496	37	3747	40	76	12031	126,5	12784	135 5	76	4172	43,5	4404	46
78	3422	36	3667	39,5	78	11778	124	12513	132,5	78	4085	42,5	4312	45,5
6,80	3350	— 35,5	3588	— 38,5	7,80	11530	— 121	12248	— 129,5	8,80	4000	— 42	4221	— 44
82	3279	35	3511	37,5	82	11288	119	11989	127	82	3916	40,5	4133	43,5
84	3209	34	3436	36,5	84	11050	116	11735	124	84	3835	40	4046	42,5
86	3141	33	3363	36	86	10818	113,5	11487	121,5	86	3755	39,5	3961	41,5
88	3075	32,5	3291	35	88	10591	111,5	11244	119	88	3676	38,5	3878	40,5
6,90	3010	— 32	3221	— 34,5	7,90	10368	— 108,5	11006	— 116,5	8,90	3599	— 37,5	3797	— 40
92	2946	31	3152	33,5	92	10151	106,5	10773	113,5	92	3524	36,5	3717	39
94	2884	30,5	3085	33	94	09938	104,5	10546	111,5	94	3451	36	3639	38
96	2823	30	3019	32,5	96	09729	102	10323	109	96	3379	35,5	3563	37,5
98	2763	29,5	2954	31,5	98	09525	100	10105	107	98	3308	34,5	3488	36,5
7,00	2704		2891		8,00	09325		09891		9,00	3239		3415	
	$10^{-3}\times 0,$		$10^{-3}\times 0,$			$10^{-3}\times 0,$		$10^{-3}\times 0,$			$10^{-4}\times 0,$		$10^{-4}\times 0,$	

Продолжение табл. 55

x	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$		$\frac{2}{\pi}K_1(x)$		x	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$		$\frac{2}{\pi}K_1(x)$		x	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$		$\frac{2}{\pi}K_1(x)$	
	$10^{-4}\times 0,$		$10^{-4}\times 0,$			$10^{-4}\times 0,$		$10^{-4}\times 0,$			$10^{-5}\times 0,$		$10^{-5}\times 0,$	
9,00	3239	— 33,5	3415	— 36	10,00	11319	— 117,5	11872	— 123,5	11,00	3974	— 41	4151	— 43
02	3172	33,5	3343	35	02	11084	115	11625	121,5	02	3892	40	4065	42
04	3105	32	3273	34,5	04	10854	112,5	11382	118,5	04	3812	39,5	3981	41,5
06	3041	32	3204	33,5	06	10629	110,5	11145	116	06	3733	38,5	3898	40,5
08	2977	31	3137	33	08	10408	108	10913	114	08	3656	38	3817	39,5
9,10	2915	— 30,5	3071	— 32	10,10	10192	— 105,5	10685	— 111	11,10	3580	— 37	3738	— 38,5
12	2854	29,5	3007	31,5	12	09981	103,5	10463	109	12	3506	36	3661	38
14	2795	29	2944	31	14	09774	101,5	10245	107	14	3434	35,5	3585	37,5
16	2737	28,5	2882	30	16	09571	99,5	10031	104,5	16	3363	35	3510	36
18	2680	28	2822	29,5	18	09372	97	09822	102	18	3293	34	3438	36
9,20	2624	— 27,5	2763	— 29	10,20	09178	— 95	09618	— 100	11,20	3225	— 33	3366	— 34,5
22	2569	26,5	2705	28,5	22	08988	93,5	09418	98,5	22	3159	32,5	3297	34,5
24	2516	26,5	2648	27,5	24	08801	91	09221	96	24	3094	32	3228	33,5
26	2463	25,5	2593	27	26	08619	89,5	09029	93,5	26	3030	31,5	3161	32,5
28	2412	25	2539	27	28	08440	87,5	08842	92,5	28	2967	30,5	3096	32
9,30	2362	— 25	2485	— 26	10,30	08265	— 85,5	08657	— 90	11,30	2906	— 30	3032	— 31,5
32	2312	24	2433	25	32	08094	84	08477	88	32	2846	29,5	2969	31
34	2264	23,5	2383	25	34	07926	82	08301	86,5	34	2787	29	2907	30
36	2217	23	2333	24,5	36	07762	80,5	08128	84,5	36	2729	28	2847	29,5
38	2171	22,5	2284	24	38	07601	79	07959	83	38	2673	27,5	2788	29
9,40	2126	— 22,5	2236	— 23,5	10,40	07443	— 77	07793	— 81	11,40	2618	— 27	2730	— 28
42	2081	21,5	2189	22,5	42	07289	75,5	07631	79,5	42	2564	26,5	2674	27,5
44	2038	21	2144	22,5	44	07138	74	07472	77,5	44	2511	26	2619	27,5
46	1996	21	2099	22	46	06990	72,5	07317	76	46	2459	25,5	2564	26,5
48	1954	20	2055	21,5	48	06845	70,5	07165	74,5	48	2408	24,5	2511	26
9,50	1914	— 20	2012	— 21	10,50	06704	— 69,5	07016	— 73	11,50	2359	— 24,5	2459	— 25,5
52	1874	19,5	1970	20,5	52	06565	68	06870	71,5	52	2310	24	2408	25
54	1835	19	1929	20,5	54	06429	66,5	06727	70	54	2262	23	2358	24
56	1797	19	1888	19,5	56	06296	65,5	06587	68,5	56	2216	23	2310	24
58	1759	18	1849	19,5	58	06165	63,5	06450	67	58	2170	22,5	2262	23,5
9,60	17226	— 179	1810	— 19	10,60	06038	— 62,5	06316	— 65,5	11,60	2125	— 22	2215	— 23
62	16868	175,5	1772	18,5	62	05843	61,5	06185	64,5	62	2081	21,5	2169	22,5
64	16517	171,5	1735	18	64	05790	60	06056	62,5	64	2038	21	2124	22
66	16174	168,5	1699	17,5	66	05670	58,5	05931	62	66	1996	20,5	2080	21,5
68	15837	164,5	1664	17,5	68	05553	57,5	05807	60	68	1955	20	2037	21
9,70	15508	— 161	16289	— 170	10,70	05438	— 56,5	05687	— 59	11,70	1915	— 20	1995	— 20,5
72	15186	158	15949	166,5	72	05325	55	05569	58	72	1875	19	1954	20,5
74	14870	154,5	15616	163	74	05215	54	05453	56,5	74	1837	19	1913	19,5
76	14561	151	15290	159,5	76	05107	52,5	05340	55,5	76	1799	18,5	1874	19,5
78	14259	148,5	14971	156,5	78	05002	52	05229	54,5	78	1762	18,5	1835	19
9,80	13962	— 145	14658	— 153	10,80	04898	— 50,5	05120	— 53	11,80	17255	— 178	17971	— 185,5
82	13672	142	14352	149,5	82	04797	49,5	05014	52	82	16899	174,5	17600	182
84	13388	139	14053	146,5	84	04698	49	04910	51	84	16550	170,5	17236	178,5
86	13110	136	13760	144	86	04600	47,5	04808	50	86	16209	167	16879	174,5
88	12838	133,5	13472	140,5	88	04505	46,5	04708	49	88	15875	163,5	16530	170,5
9,90	12571	— 130,5	13191	— 137,5	10,90	04412	— 45,5	04610	— 47,5	11,90	15548	— 160	16189	— 167,5
92	12310	128	12916	134,5	92	04321	44,5	04515	47	92	15228	157	15854	164
94	12054	125	12647	132	94	04232	44	04421	46	94	14914	153,5	15526	160,5
96	11804	122,5	12383	129	96	04144	43	04329	45	96	14607	150,5	15205	157
98	11559	120	12125	126,5	98	04058	42	04239	44	98	14306	147,5	14891	154
10,00	11319		11872		11,00	03974		04151		12,00	14011		14583	
	$10^{-4}\times 0,$		$10^{-4}\times 0,$			$10^{-4}\times 0,$		$10^{-4}\times 0,$			$10^{-5}\times 0,$		$10^{-5}\times 0,$	

Продолжение табл. 55

x	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$		$\frac{2}{\pi}K_1(x)$		x	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$		$\frac{2}{\pi}K_1(x)$		x	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$		$\frac{2}{\pi}K_1(x)$	
	$10^{-5}\times$		$10^{-5}\times$			$10^{-6}\times$		$10^{-6}\times$			$10^{-6}\times$		$10^{-6}\times$	
12 00	14011	— 144 5	14583	— 150 5	13 00	4956	— 51	5143	— 53	14 00	17579	— 180	18197	— 187
02	13722	141	14282	147 5	02	4854	50	5037	52	02	17219	176 5	17823	183
04	13440	138 5	13987	144 5	04	4754	48 5	4933	50 5	04	16866	172 5	17457	179
06	13163	135 5	13698	141 5	06	4657	48	4832	50	06	16521	169 5	17099	175 5
08	12892	133	13415	138 5	08	4561	47	4732	48 5	08	16182	165 5	16748	172
12 10	12626	— 130	13138	— 136	13 10	4467	— 45 5	4635	— 48	14 10	15851	— 162 5	16404	— 168 5
12	12366	127 5	12866	132 5	12	4376	45	4539	46 5	12	15526	159	16067	165
14	12111	124 5	12601	130 5	14	4286	44	4446	46	14	15208	155 5	15737	161 5
16	11862	122	12340	127	16	4198	43	4354	44 5	16	14897	152 5	15414	158
18	11618	119 5	12086	125	18	4112	42 5	4265	44	18	14592	149 5	15098	155
12 20	11379	— 117 5	11836	— 122	13 20	4027	— 41 5	4177	— 43	14 20	14293	— 146 5	14788	— 152
22	11144	114 5	11592	120	22	3944	40 5	4091	42	22	14000	143 5	14484	148 5
24	10915	112 5	11352	117	24	3863	39 5	4007	41 5	24	13713	140	14187	145 5
26	10690	110	11118	115	26	3784	38 5	3924	40	26	13433	137 5	13896	142 5
28	10470	107 5	10888	112	28	3707	38 5	3844	39 5	28	13158	135	13611	140
12 30	10255	— 105 5	10664	— 110 5	13 30	3630	— 37	3765	— 39	14 30	12888	— 132	13331	— 136 5
32	10044	103 5	10443	107 5	32	3556	36 5	3687	38	32	12624	129	13058	134
34	09837	101 5	10228	105 5	34	3483	36	3611	37	34	12366	126 5	12790	131 5
36	09634	99	10017	103 5	36	3411	35	3537	36 5	36	12113	124	12527	128 5
38	09436	97	09810	101	38	3341	34	3464	35 5	38	11865	121 5	12270	125 5
12 40	09242	— 95	09608	— 99 5	13 40	3273	— 33 5	3393	— 35	14 40	11622	— 119	12019	— 123 5
42	09052	93	09409	97	42	3206	33	3323	34	42	11384	116 5	11772	120 5
44	08866	91 5	09215	95	44	3140	32	3255	33 5	44	11151	114	11531	118 5
46	08683	89	09025	93	46	3076	32	3188	33	46	10923	112	11294	116
48	08505	87 5	08839	91	48	3012	30 5	3122	32	48	10699	109 5	11062	113
12 50	08330	— 86	08657	— 89 5	13 50	2951	— 30 5	3058	— 31 5	14 50	10480	— 107	10836	— 111 5
52	08158	84	08478	87 5	52	2890	29 5	2995	30 5	52	10266	105 5	10613	108 5
54	07990	82	08303	85 5	54	2831	29	2934	30 5	54	10055	102 5	10396	107
56	07826	80 5	08132	84	56	2773	28 5	2873	29 5	56	09850	101	10182	104
58	07665	79	07964	82	58	2716	28	2814	29	58	09648	98 5	09974	102 5
12 60	07507	— 77	07800	— 80 5	13 60	2660	— 27	2756	— 28	14 60	09451	— 97	09769	— 100
62	07353	75 5	07639	78 5	62	2606	27	2700	28	62	09257	94 5	09569	98
64	07202	74	07482	77 5	64	2552	26	2644	27	64	09068	93	09373	96
66	07054	72 5	07327	75 5	66	2500	25 5	2590	26 5	66	08882	90 5	09181	94 5
68	06909	71	07176	74	68	2449	25 5	2537	26 5	68	08701	89	08992	92
12 70	06767	— 69 5	07028	— 72 5	13 70	2398	— 24 5	2484	— 25 5	14 70	08523	— 87 5	08808	— 90 5
72	06628	68 5	06883	70 5	72	2349	24	2433	25	72	08348	85	08627	88
74	06491	66 5	06742	69 5	74	2301	23 5	2383	24 5	74	08178	84	08451	87
76	06358	65 5	06603	68 5	76	2254	23	2334	24	76	08010	82	08277	84 5
78	06227	64	06466	66 5	78	2208	23	2286	23 5	78	07846	80	08108	83
12 80	06099	— 62 5	06333	— 65	13 80	2162	— 22	2239	— 23	14 80	07686	— 78 5	07942	— 81 5
82	05974	61 5	06203	64	82	2118	21 5	2193	22 5	82	07529	77	07779	80
84	05851	60	06075	62 5	84	2075	21 5	2148	22	84	07375	75 5	07619	78
86	05731	59	05950	61 5	86	2032	21	2104	21 5	86	07224	74	07463	76 5
88	05613	57 5	05827	60	88	1990	20	2061	21	88	07076	72	07310	75
12 90	05498	— 56 5	05707	— 59	13 90	1950	— 20	2019	— 21	14 90	06932	— 71	07160	— 73
92	05385	55 5	05589	57 5	92	1910	19 5	1977	20	92	06790	69 5	07014	72
94	05274	54	05474	56	94	1871	19 5	1937	20	94	06651	68	06870	70 5
96	05166	53	05362	55 5	96	1832	18 5	1897	19 5	96	06515	66 5	06729	69
98	05060	52	05251	54	98	1795	18 5	1858	19	98	06382	65 5	06591	67 5
13 00	04956		05143		14 00	1758		1820		15 00	06251		06456	
	$10^{-5}\times$		$10^{-5}\times$			$10^{-6}\times$		$10^{-6}\times$			$10^{-6}\times$		$10^{-6}\times$	

Продолжение табл. 55

x	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$		$\frac{2}{\pi}K_1(x)$		x	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$		$\frac{2}{\pi}K_1(x)$		x	$\frac{2}{\pi}K_0(x)$		$\frac{2}{\pi}K_1(x)$	
	$10^{-7}\times$		$10^{-7}\times$			$10^{-7}\times$		$10^{-7}\times$			$10^{-7}\times$		$10^{-7}\times$	
15 00	6251	— 63 5	6456	— 66	15 40	4136	— 42	4269	— 44	15 80	2738	— 28	2823	— 28 5
02	6124	63	6324	64 5	42	4052	41 5	4181	42 5	82	2682	27 5	2766	28 5
04	5998	61	6195	63 5	44	3969	40 5	4096	42	84	2627	26 5	2709	27 5
06	5876	60	6068	62 5	46	3888	39 5	4012	41	86	2574	26 5	2654	27 5
08	5756	59	5943	60 5	48	3809	39	3930	40 5	88	2521	25 5	2599	26 5
15 10	5638	— 57 5	5822	— 59 5	15 50	3731	— 38	3849	— 39	15 90	2470	— 25 5	2546	— 26
12	5523	56 5	5703	58 5	52	3655	37 5	3771	38 5	92	2419	24 5	2494	25 5
14	5410	55 5	5586	57 5	54	3580	36 5	3694	38	94	2370	24	2443	25
16	5299	54	5471	56	56	3507	36	3618	37	96	2322	24	2393	24 5
18	5191	53	5359	54 5	58	3435	35	3544	36 5	98	2274	23	2344	24
15 20	5085	— 52	5250	— 54	15 60	3365	— 34 5	3471	— 35 5	16 00	2228		2296	
22	4981	51	5142	52 5	62	3296	33 5	3400	34 5		$10^{-7}\times$		$10^{-7}\times$	
24	4879	50	5037	51 5	64	3229	33	3331	34					
26	4779	48 5	4934	50 5	66	3163	32	3263	33 5					
28	4682	48	4833	49 5	68	3099	32	3196	32 5					
15 30	4586	— 47	4734	— 48 5	15 70	3035	— 31	3131	— 32					
32	4492	45 5	4637	47 5	72	2973	30	3067	31 5					
34	4401	45	4542	46 5	74	2913	30	3004	31					
36	4311	44	4449	45 5	76	2853	29	2942	30					
38	4223	43 5	4358	44 5	78	2795	28 5	2882	29 5					
15 40	4136		4269		15 80	2738		2823						
	$10^{-7}\times$		$10^{-7}\times$			$10^{-7}\times$		$10^{-7}\times$						

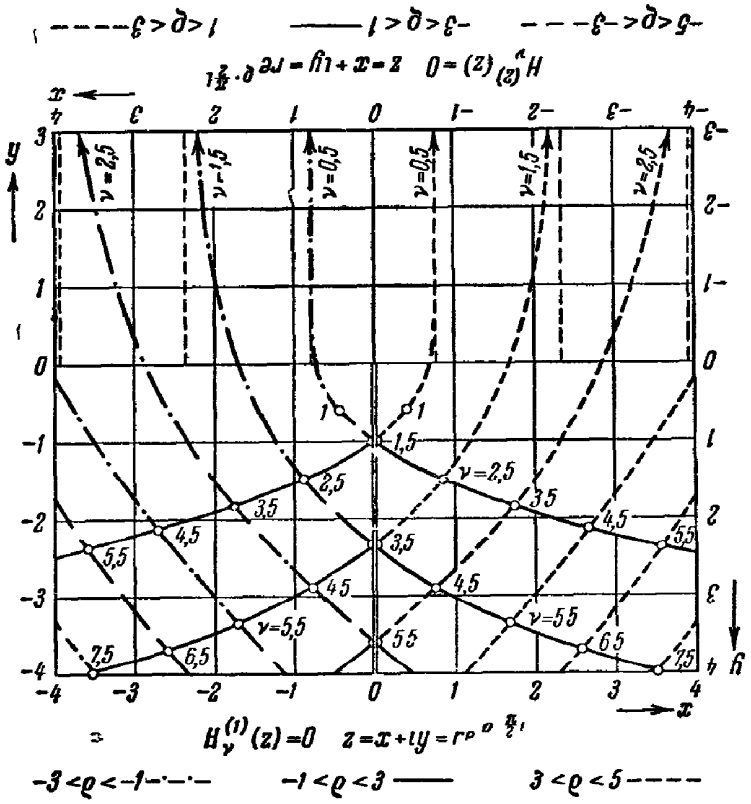


Рис. 150. Нули функций $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$

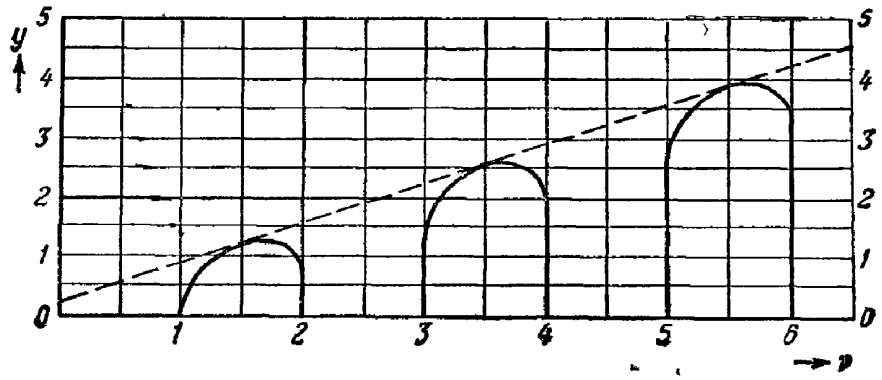
Таблица 56. Модифицированные функции Бесселя $I_\nu(x)$ и $\frac{2}{\pi}K_\nu(x)$ для $\nu = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

$$I_\nu(x) = e^{-\nu\frac{\pi}{2}i} J_\nu(ix), \quad \frac{2}{\pi}K_\nu(x) = e^{(\nu+1)\frac{\pi}{2}i} H_\nu^{(1)}(ix)$$

x	$I_{1/3}(x)$	$\frac{2}{\pi}K_{1/3}(x)$	$I_{2/3}(x)$	$\frac{2}{\pi}K_{2/3}(x)$	x	$I_{1/3}(x)$	$\frac{2}{\pi}K_{1/3}(x)$	$I_{2/3}(x)$	$\frac{2}{\pi}K_{2/3}(x)$
							0,00		0,00
0,0	0,0000	∞	0,00000	∞	5,0	26,898	23739	25,902	24477
1	0,4133	1,8461	0,15057	3,026	1	29,423	21273	28,359	21926
2	0,5237	1,2601	0,24009	1,7837	2	32,19	19067	31,05	19637
3	0,6051	0,9607	0,3170	1,2716	3	35,23	17093	34,01	17594
4	0,6747	0,7676	0,3880	0,9681	4	38,56	15325	37,25	15767
0,5	0,7390	0,6296	0,4563	0,7678	5,5	42,21	13743	40,81	14132
6	0,8012	0,5253	0,5237	0,6257	6	46,22	12326	44,72	12669
7	0,8636	0,4434	0,5915	0,5187	7	50,62	11057	49,00	11360
8	0,9276	0,3776	0,6609	0,4354	8	55,45	09920	53,71	10187
9	0,9943	0,3238	0,7326	0,3688	9	60,74	08901	58,87	09137
1,0	1,0646	0,27911	0,8075	0,3148	6,0	66,55	07988	64,54	08196
1	1,1396	0,24167	0,8864	0,27024	1	72,93	07169	70,77	07354
2	1,2199	0,21001	0,9701	0,23312	2	79,93	06469	77,60	06599
3	1,3065	0,18306	1,0593	0,20191	3	87,61	05778	85,10	05922
4	1,4000	0,16000	1,1547	0,17547	4	96,04	05188	93,34	05315
1,5	1,5014	0,14016	1,2573	0,15294	6,5	105,30	04658	102,39	04771
6	1,6115	0,12302	1,3678	0,13364	6	115,47	04184	112,33	04283
7	1,7313	0,10818	1,4872	0,11704	7	126,63	03758	123,25	03846
8	1,8617	0,09527	1,6165	0,10270	8	138,89	03375	135,24	03454
9	2,0038	0,08402	1,7567	0,09027	9	152,36	03032	148,41	03102
2,0	2,1588	0,07419	1,9089	0,07947	7,0	167,15	027245	162,89	027860
1	2,3279	0,06559	2,0745	0,07007	1	183,39	024481	178,79	025026
2	2,5124	0,05805	2,2546	0,06185	2	201,23	022000	196,26	022483
3	2,7139	0,05142	2,4509	0,05466	3	220,83	019772	215,45	020200
4	2,9339	0,04559	2,6648	0,04835	4	242,37	017779	236,55	018151
2,5	3,174	0,04045	2,8981	0,04282	7,5	266,03	015974	259,73	016312
6	3,437	0,03592	3,153	0,03795	6	292,02	014360	285,21	014660
7	3,724	0,03192	3,431	0,03366	7	320,6	012910	313,2	013176
8	4,038	0,028380	3,734	0,029877	8	352,0	011608	344,0	011844
9	4,381	0,025249	4,066	0,026540	9	386,5	010438	377,8	010647
3,0	4,756	0,022476	4,429	0,023591	8,0	424,4	009386	415,0	009572
1	5,166	0,020018	4,826	0,020982	1	466,1	008441	455,9	008607
2	5,615	0,017838	5,259	0,018672	2	511,9	007592	500,9	007739
3	6,106	0,015902	5,734	0,016625	3	562,2	006828	550,3	006959
4	6,642	0,014183	6,253	0,014810	4	617,6	006142	604,6	006259
3,5	7,230	0,012654	6,821	0,013200	8,5	678,4	005525	664,4	005629
6	7,873	0,011295	7,443	0,011770	6	745,3	004971	730,1	005063
7	8,577	0,010085	8,124	0,010499	7	818,9	004472	802,3	004554
8	9,347	0,009008	8,869	0,009369	8	899,7	004024	881,8	004097
9	10,190	0,008049	9,686	0,008362	9	988,6	003621	969,1	003686
4,0	11,114	0,007194	10,580	0,007468	9,0	1086,4	003258	1065,3	003316
1	12,125	0 006432	11,560	0,006671	1	1194,0	0029322	1171,0	0029837
2	13,233	0,005752	12,633	0,005961	2	1312,2	0026389	1287,2	0026847
3	14,446	0,005145	13,809	0,005329	3	1442,3	0023751	1415,1	0024159
4	15,775	0,004604	15,098	0,004764	4	1585,3	0021377	1555,8	0021741
4,5	17,231	0,004120	16,511	0,004261	9,5	1742,6	0019242	1710,6	0019566
6	18,827	0,003688	18,060	0,003812	6	1915,7	0017321	1880,8	0017610
7	20,576	0,003303	19,759	0,003411	7	2106,1	0015593	2068,1	0015851
8	22,493	0 0029578	21,621	0,003053	8	2315,5	0014038	2274,2	0014268
9	24,594	0,0026495	23,663	0,0027332	9	2545,8	0012639	2500,9	0012843
5,0	26,898	0,0023739	25,902	0,0024474	10,0	2799,2	0011379	2750,4	0011562
							0,00		0,00

Таблица 57. Первые корни $x_{n,s}$ уравнения
$I_n(x)\,J'_n(x) - J_n(x)\,I'_n(x) = 0$

s	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
1	3,196	4,611	5,906	7,144
2	6,306	7,799	9,197	10,537
3	9,439	10,958	12,402	13,795
4	12,577	14,109	15 579	17,005
5	15,716	17,256	18,744	
6	18,857			



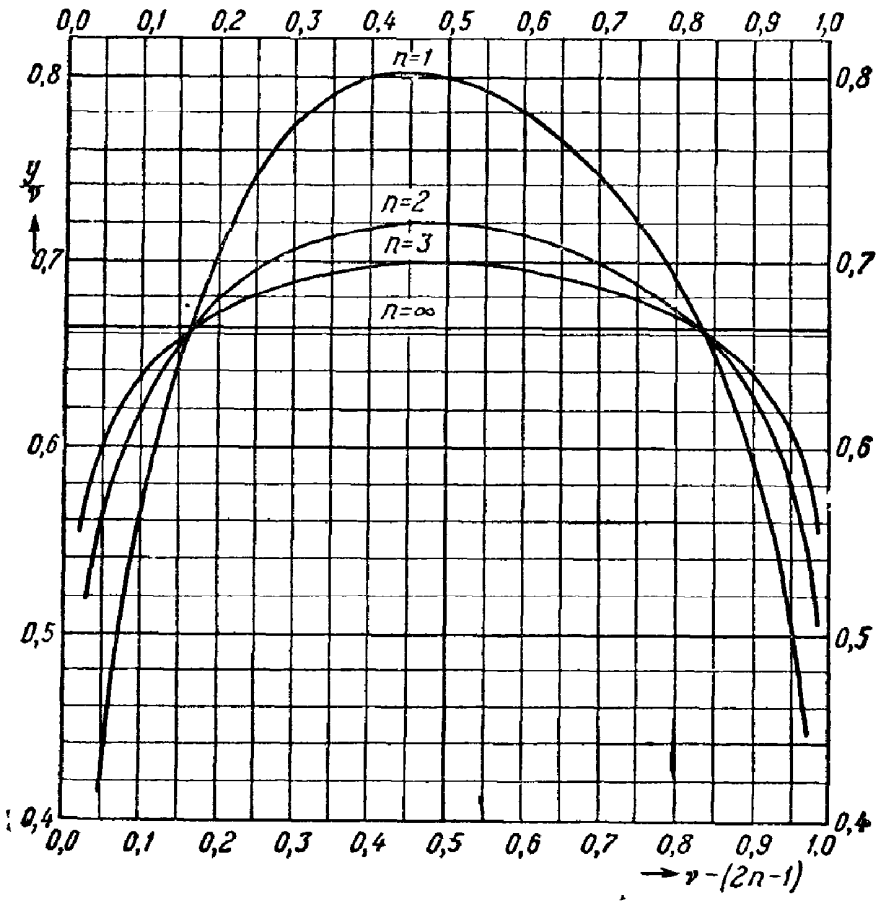
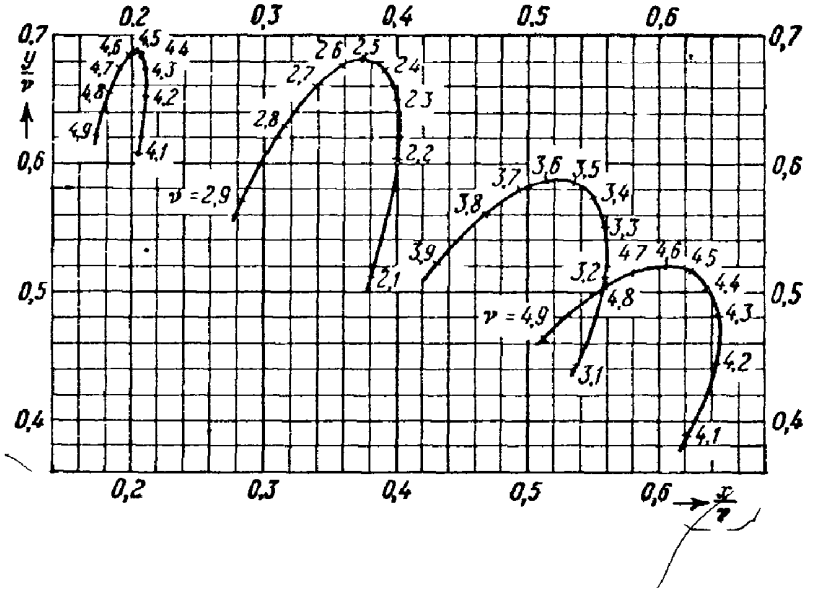


Рис. 151 и 152. Нули y_n функций $J_{-\nu}(iy) = e^{-\nu\frac{\pi}{2}i} I_{-\nu}(y)$.



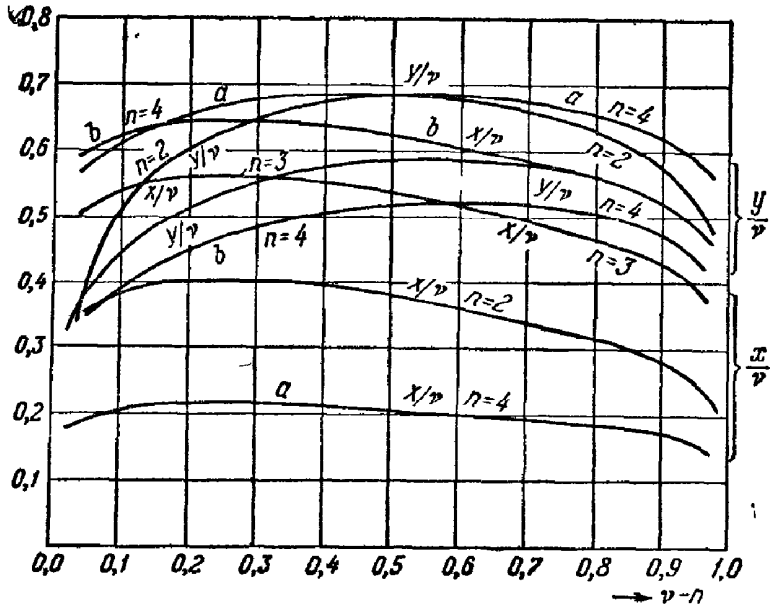


Рис. 153 и 154. Нули x_n+iy_n функций $J_{-\nu}(x+iy)$.

3. Функции Кельвина

3.1. Повороту на 135° соответствуют функции Бесселя $Z_\nu(e^{\frac{3\pi}{4}i}z)$. Они являются решениями дифференциального уравнения

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}-(iz^2+\nu^2)w=0.$$

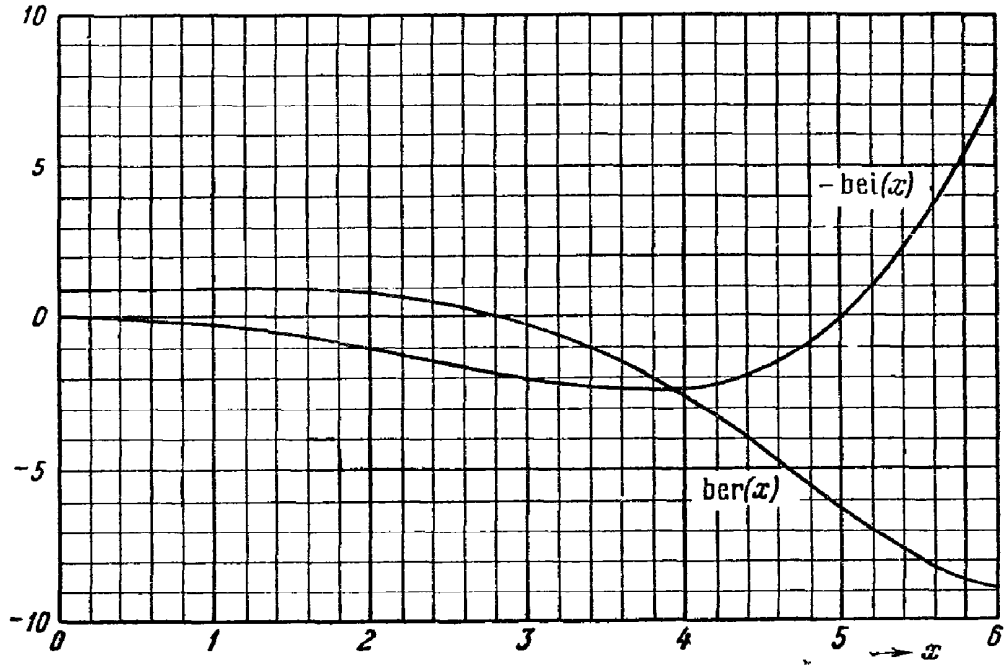
Исходя из функций $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$, определяют *функции Кельвина*

соотношениями

$$\mathrm{ber}_\nu(z) \pm i\,\mathrm{bei}_\nu(z) = J_\nu(ze^{\pm\frac{3\pi}{4}i}) = e^{\pm\nu\frac{\pi}{2}i} I_\nu(ze^{\pm\frac{\pi}{4}i}),$$

$$\mathrm{her}_\nu(z) + i\,\mathrm{hei}_\nu(z) = H_\nu^{(1)}(ze^{\frac{3\pi}{4}i}), \qquad \mathrm{her}_\nu(z) - i\,\mathrm{hei}_\nu(z) = H_\nu^{(2)}(ze^{-\frac{3\pi}{4}i}),$$

$$\mathrm{ker}_\nu(z) + i\,\mathrm{kei}_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} H_\nu^{(1)}(ze^{\frac{3\pi}{4}i}), \qquad \mathrm{ker}_\nu(z) - i\,\mathrm{kei}_\nu(z) = -\frac{\pi i}{2} H_\nu^{(2)}(ze^{-\frac{3\pi}{4}i}),$$



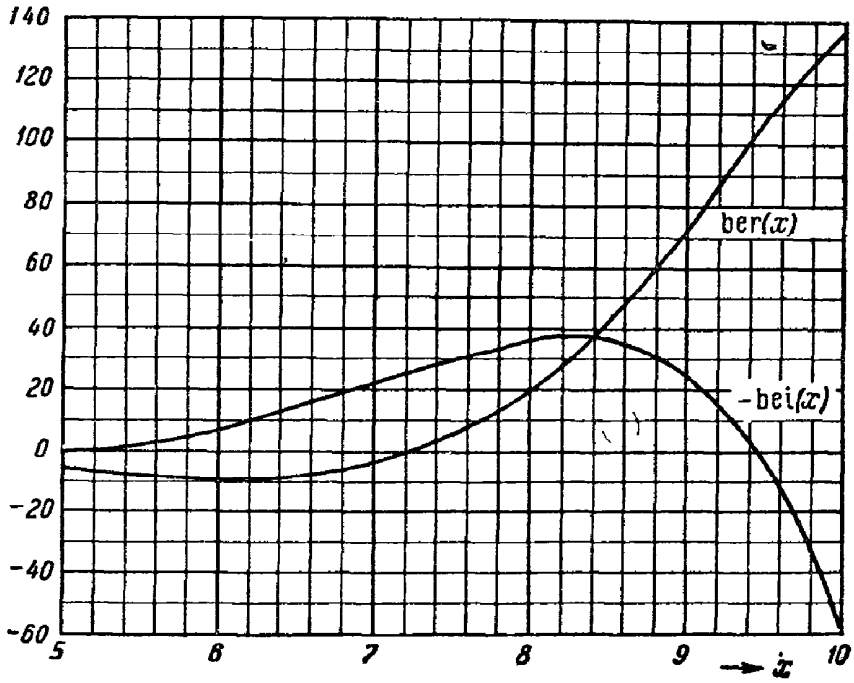


Рис. 155 и 156. Функции Кельвина ber (x) и bei (x).

или

$$\ker_\nu(z)\pm i\,\mathrm{kei}_\nu(z)=e^{\mp\frac{\nu\pi}{2}i}K_\nu\left(ze^{\pm\frac{\pi}{4}i}\right),$$

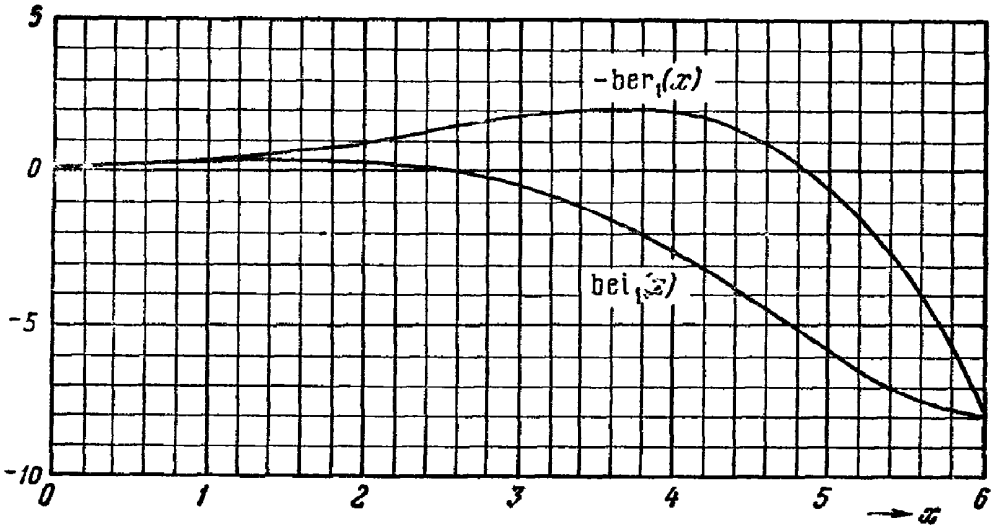
так что

$$\mathrm{her}_\nu(z)=\frac{2}{\pi}\mathrm{kei}_\nu(z),\qquad \mathrm{hei}_\nu(z)=-\frac{2}{\pi}\ker_\nu(z).$$

Для наиболее важного случая $\nu=0$ индекс у знака функции опускается: $\mathrm{ber}(z)$, $\mathrm{bei}(z)$, $\mathrm{her}(z)$, $\mathrm{hei}(z)$, $\ker(z)$, $\mathrm{kei}(z)$. Разложения $\mathrm{ber}(z)$, $\mathrm{bei}(z)$ в степенные ряды таковы:

$$\mathrm{ber}(z)=1-\frac{z^4}{2^2 4^2}+\frac{z^8}{2^2 4^2 6^2 8^2}-\ldots,\qquad \mathrm{bei}(z)=\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^6}{2^2 4^2 6^2}+\ldots$$

Если порядок ν действителен и аргумент $z=x$ принимает действительные положительные значения, то все функции Кельвина действительны



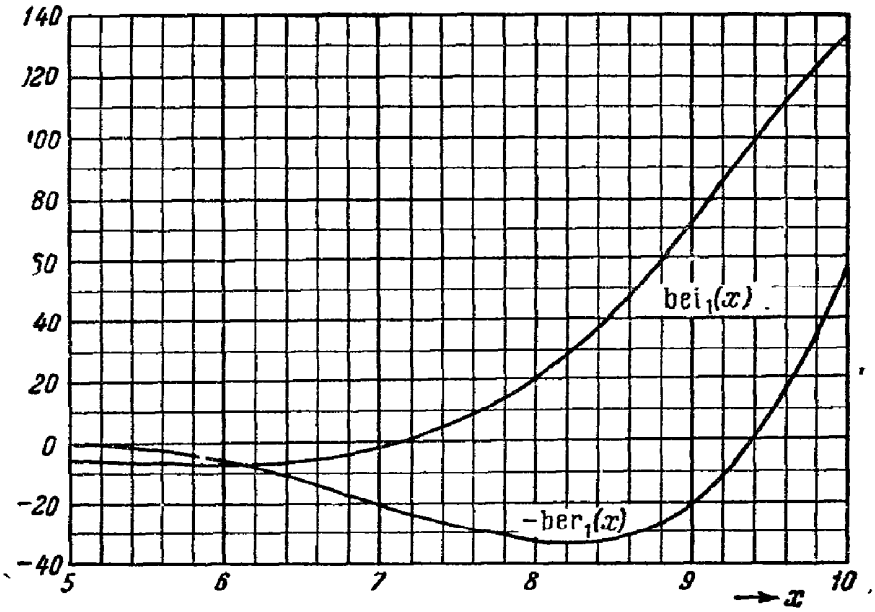


Рис. 157 и 158. Функции Кельвина $\mathrm{ber}_1(x)$ и $\mathrm{bei}_1(x)$.

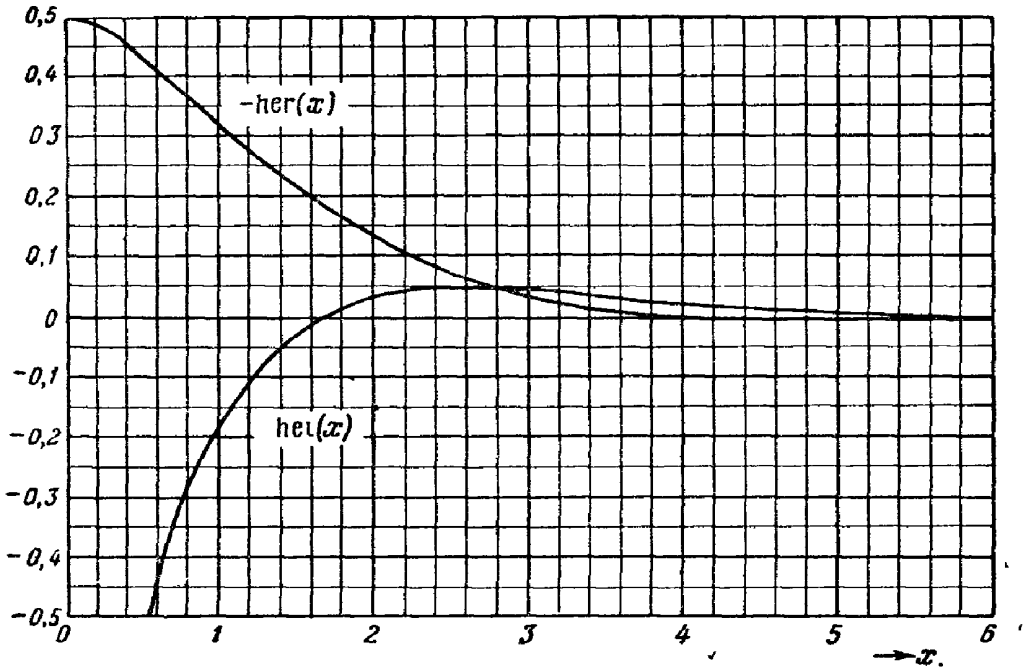
(рис. 155—162, таблицы 58—62). В окрестности $x=0$ имеем:

$$\operatorname{ber}(x)\approx 1, \qquad \operatorname{bei}(x)\approx\frac{x^2}{4}, \qquad \operatorname{her}(x)\approx -\frac{1}{2}, \qquad \operatorname{hei}(x)\approx\frac{2}{\pi}\ln\frac{\gamma x}{2},$$

а для $x\gg 1$, $x\gg\nu^2$ справедливы представления (выписаны лишь первые приближения):

$$\operatorname{ber}(x)\approx\frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right), \qquad \operatorname{bei}(x)\approx\frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right),$$

$$\operatorname{her}(x)\approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right), \operatorname{hei}(x)\approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right).$$



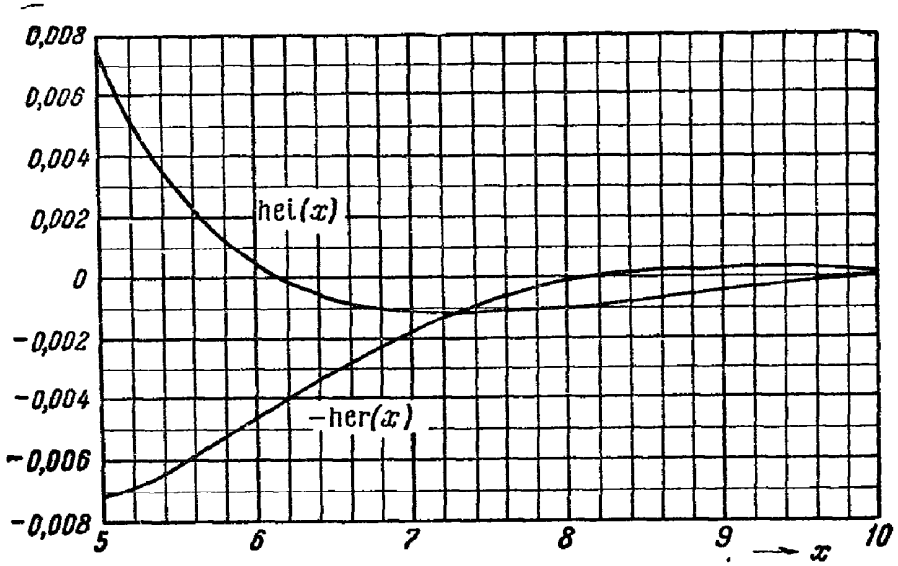


Рис 159 и 160 Функции Кельвина her (x) и hei (x).

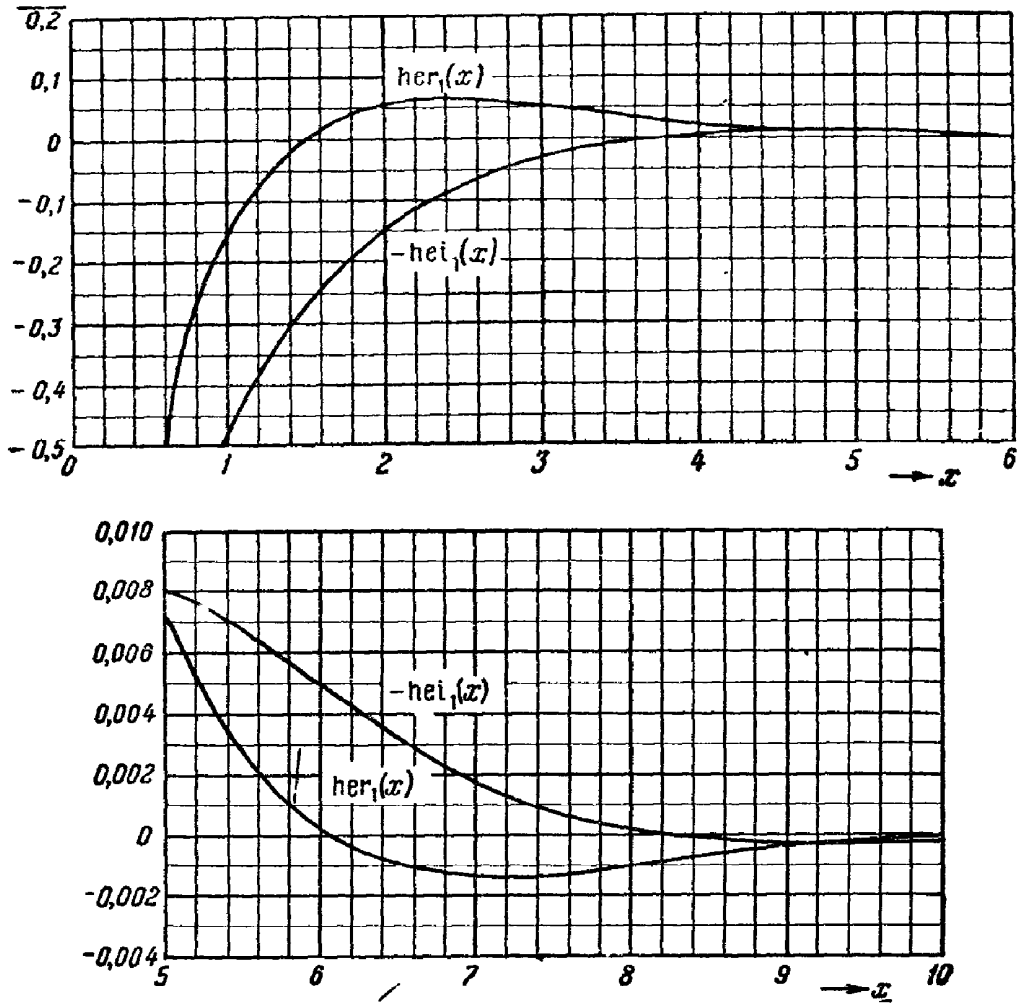


Рис. 161 и 162. Функции Кельвина $\mathrm{her}_1(x)$ и $\mathrm{hei}_1(x)$.

3.2. Дальнейшие представления и свойства функций Кельвина получаются из представлений и свойств функций $J_\nu(z)$ и $H_\nu^{(1)}(z)$.

Правила дифференцирования:

$$\mathrm{ber}'(z) \pm i\,\mathrm{bei}'(z) = e^{\mp\frac{\pi}{4}i}\,[\mathrm{ber}_1(z) \pm i\,\mathrm{bei}_1(z)],$$

$$\mathrm{her}'(z) \pm i\,\mathrm{hei}'(z) = e^{\mp\frac{\pi}{4}i}\,[\mathrm{her}_1(z) \pm i\,\mathrm{hei}_1(z)].$$

Для действительного $x>0$ имеем:

$$J_n(x\sqrt{i}) = J_n(xe^{\frac{\pi}{4}i}) = (-1)^n\,[\mathrm{ber}_n(x) - i\,\mathrm{bei}_n(x)],$$

$$H_n^{(1)}(x\sqrt{i}) = H_n^{(1)}(xe^{\frac{\pi}{4}i}) = (-1)^{n+1}\,[\mathrm{her}_n(x) - i\,\mathrm{hei}_n(x)];$$

в частности,

$$J_0(x\sqrt{i}) = \mathrm{ber}(x) - i\,\mathrm{bei}(x), \qquad H_0^{(1)}(x\sqrt{i}) = -\mathrm{her}(x) + i\,\mathrm{hei}(x),$$

$$\frac{d}{dx}[J_0(x\sqrt{i})] = -\sqrt{i}\,J_1(x\sqrt{i}) = \mathrm{ber}'(x) - i\,\mathrm{bei}'(x),$$

$$\frac{d}{dx}[H_0^{(1)}(x\sqrt{i})] = -\sqrt{i}\,H_1^{(1)}(x\sqrt{i}) = -\mathrm{her}'(x) + i\,\mathrm{hei}'(x).$$

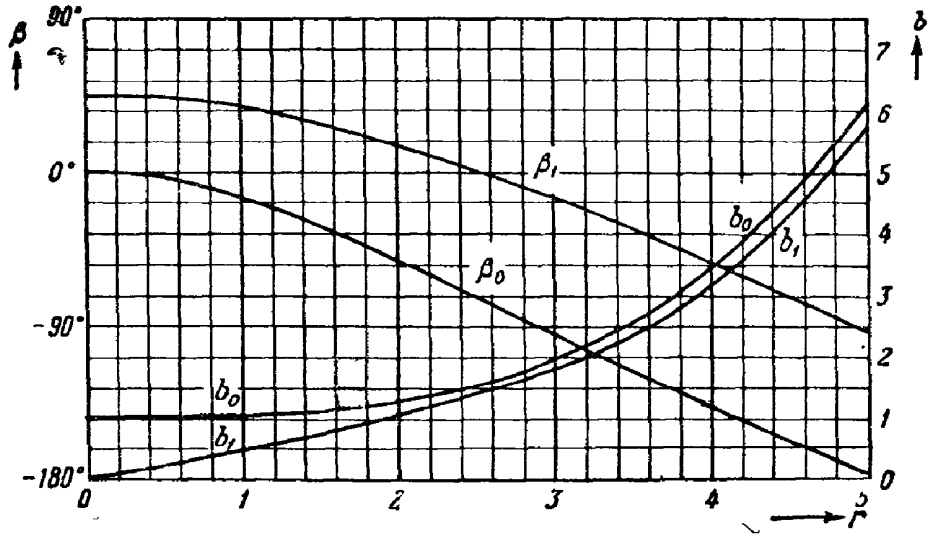
Часто бывает необходимо знать модуль и аргумент функций Кельвина; тогда пишут:

$$J_\nu(z\sqrt{i}) = b_\nu(z)\, e^{i\beta_\nu(z)},$$
$$H_\nu^{(1)}(z\sqrt{i}) = h_\nu(z)\, e^{i\eta_\nu(z)},$$

или

$$\mathrm{ber}_\nu(z) + i\,\mathrm{bei}_\nu(z) = M_\nu(z)\, e^{i\Theta_\nu(z)},$$
$$\mathrm{ker}_\nu(z) + i\,\mathrm{kei}_\nu(z) = N_\nu(z)\, e^{i\Phi_\nu(z)}$$

(рис. 163—172, таблицы 63, 64).



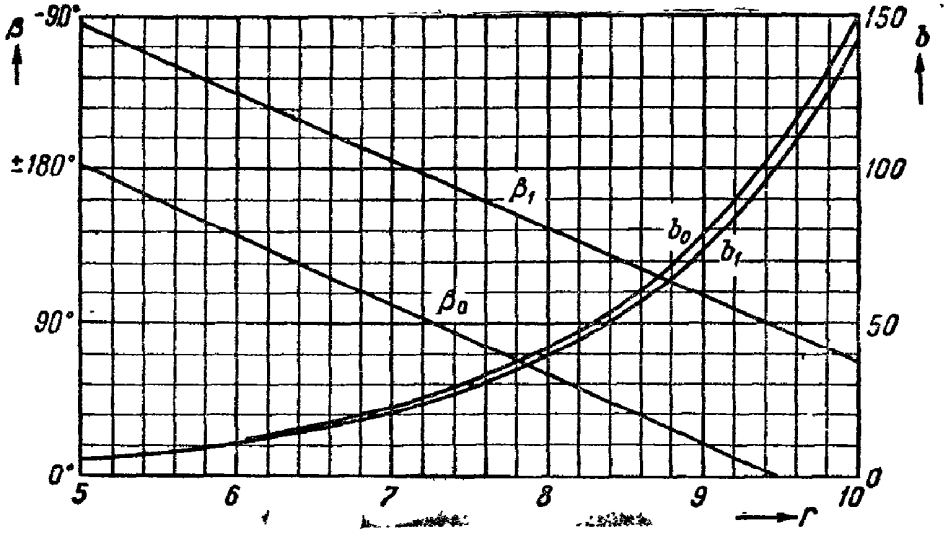


Рис. 163 и 164. Модуль b_n и аргумент β_n функций $J_n(r\sqrt{i})$, $n=0, 1$, как функции r.

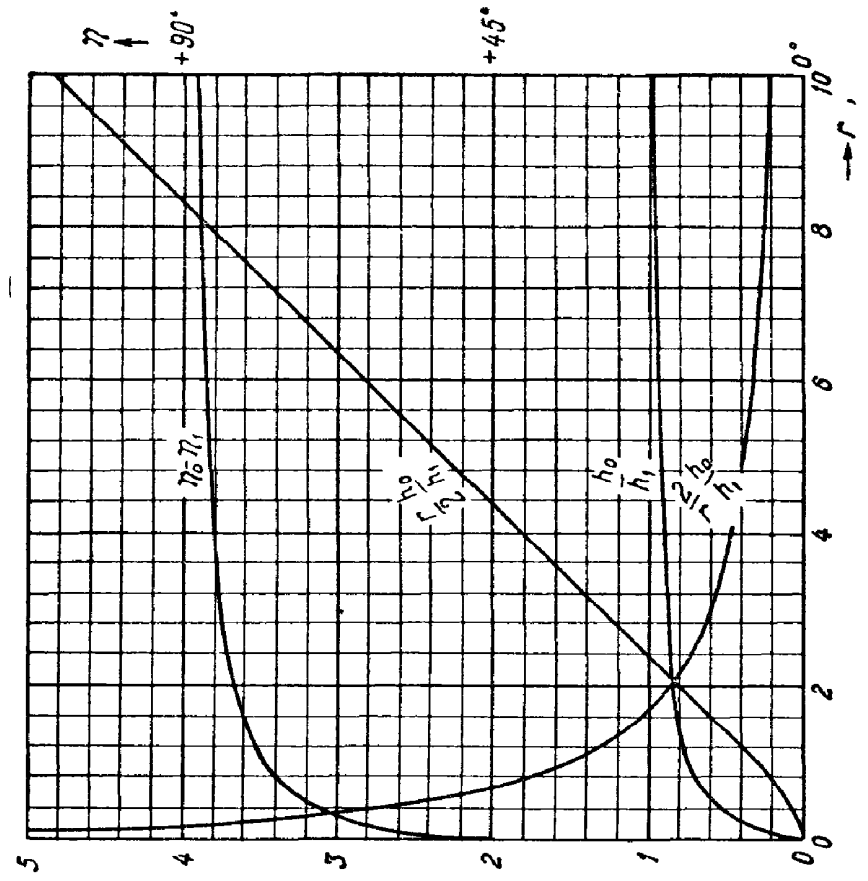


Рис 166. Функция $\frac{H_0^{(1)}(r\sqrt{i})}{H_1^{(1)}(r\sqrt{i})}=\frac{h_0}{h_1}e^{(\eta_0-\eta_1)i}$.

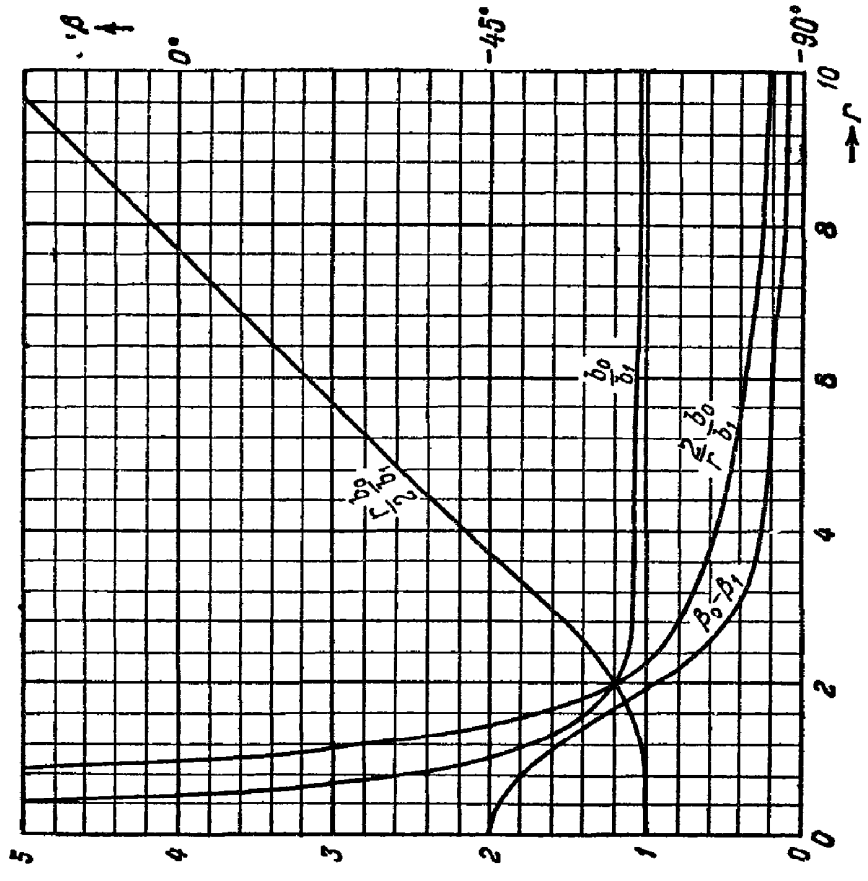


Рис. 165 Функция $\frac{J_0(r\sqrt{i})}{J_1(r\sqrt{i})}=\frac{b_0}{b_1}e^{(\beta_0-\beta_1)i}$.

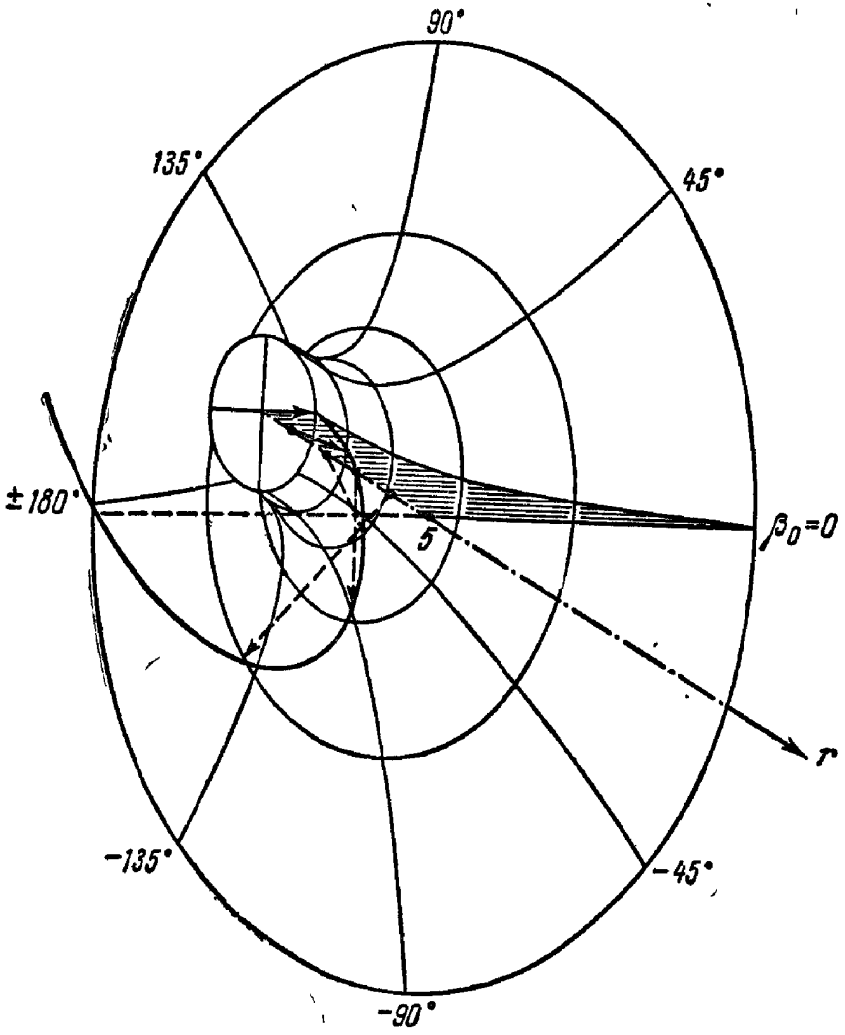


Рис. 167. Векторы $J_0(r\sqrt{i})=b_0e^{\beta_0 t}$ выходят перпендикулярно из оси r.

Пример: плотность переменного электрического тока в круглом проводе на различных расстояниях от оси провода.

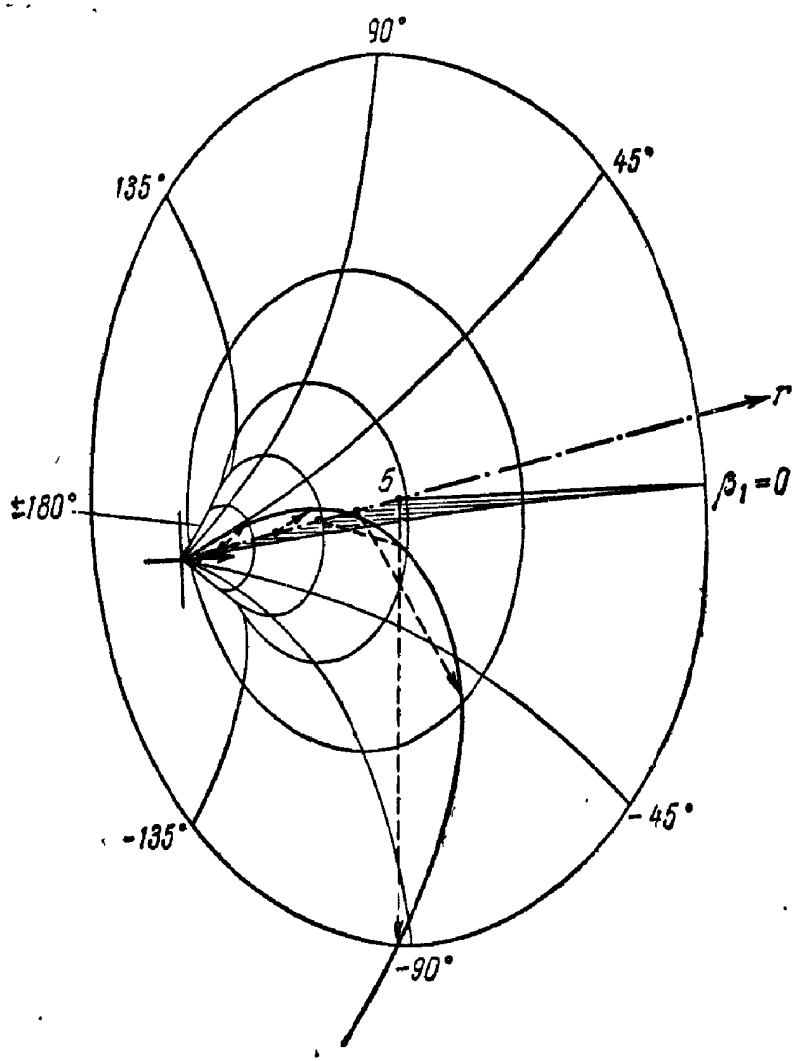
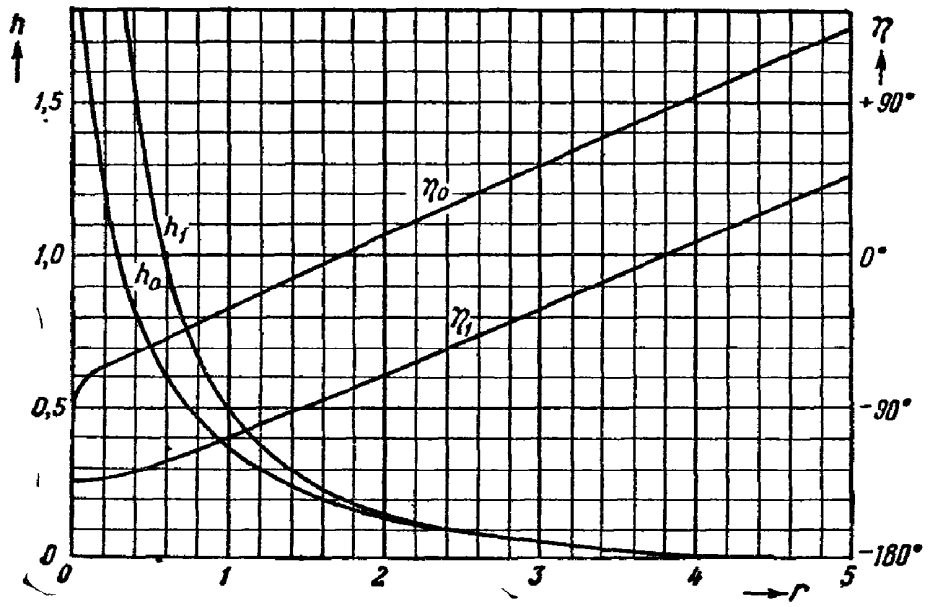


Рис. 168. Векторы $J_1(r\sqrt{i})=b_1e^{\beta_1 t}$ выходят перпендикулярно из оси r.

Пример: напряжение переменного магнитного поля в круглом проводе на различных расстояниях от оси провода.



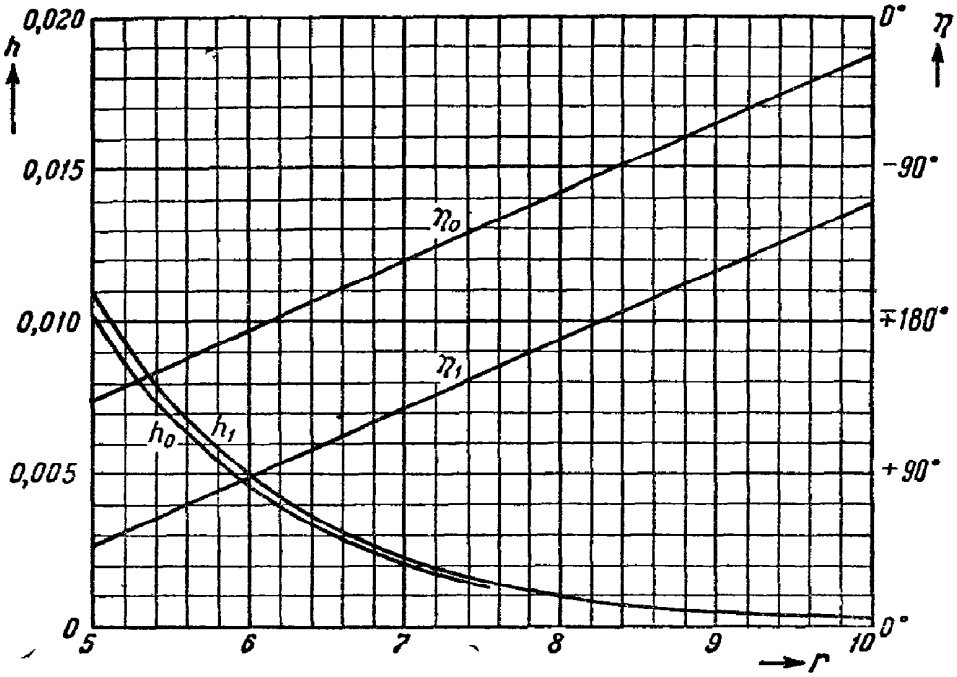
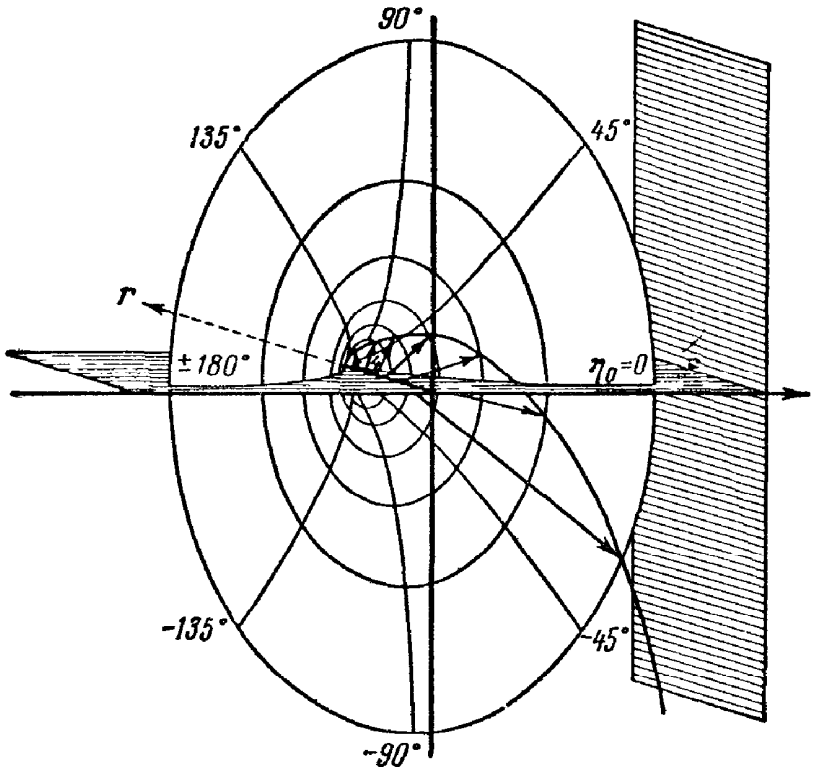


Рис. 169 и 170. Модуль h_n и аргумент η_n функций $H_n^{(1)}(r\sqrt{-i})$, $n=0, 1$, как функции r.



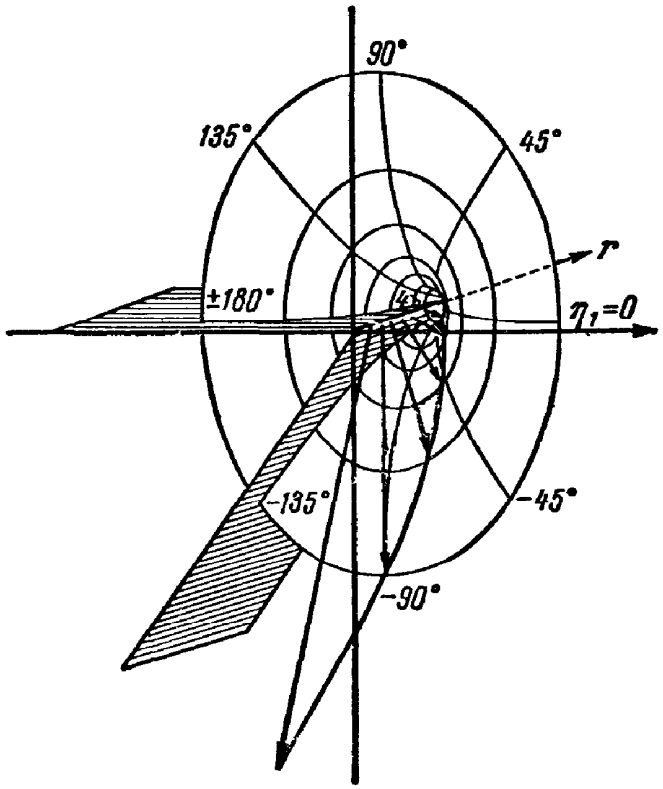


Рис. 171 и 172. Векторы $H_n^{(1)}(r\sqrt{-i})=h_n e^{\eta_n t}$, $n=0, 1$, выходят перпендикулярно из оси r.

Таблица 58. Функции ber (x) и bei (x)

$$\operatorname{ber} x = \operatorname{Re} J_0(x\sqrt{i}),\quad \operatorname{bei} x = -\operatorname{Im} J_0(x\sqrt{i})$$

x	ber x		bei x		x	ber x		bei x		x	ber x		bei x	
	+ 1.		+ 0.			+ 0.		+ 0.			+ 0.		+ 0.	
0,00	0000		00000	+ 20	1 00	9844	— 6 5	2496	+ 50	2,00	7517	— 50	9723	+ 92
02	0000		00010	20	02	9831	7	2596	51 5	02	7417	51 5	9907	92 5
04	0000		00040	20	04	9817	7	2699	52	04	7314	53	*0092	93
06	0000		00090	20	06	9803	7 5	2803	53	06	7208	54 5	0278	94
08	0000		00160	20	08	9788	8 5	2909	54	08	7099	56	0466	94
0 10	0000		00250	+ 20	1 10	9771	— 8 5	3017	+ 55	2 10	6987	— 58	0654	+ 94 5
12	0000		00360	20	12	9754	9	3127	56	12	6871	59	0843	95
14	0000		00490	20	14	9736	9 5	3239	57	14	6753	61	1033	96
16	0000		00640	20	16	9717	10	3353	58	16	6631	62 5	1225	96
18	0000		00810	20	18	9697	10 5	3469	59	18	6506	64,5	1417	96 5
0 20	0000		01000	+ 20	1,20	9676	— 11	3587	+ 60	2 20	6377	— 66	1610	+ 96 5
22	0000		01210	20	22	9654	11 5	3707	60 5	22	6245	68	1803	97 5
24	*9999		01440	20	24	9631	12	3828	62	24	6109	69 5	1998	97 5
26	9999		01690	20	26	9607	13	3952	62 5	26	5970	71 5	2193	98
28	9999		01960	20	28	9581	13 5	4077	63 5	28	5827	73,5	2389	98
0 30	9999		02250	+ 20	1,30	9554	— 14	4204	+ 64 5	2 30	5680	— 75	2585	+ 98 5
32	9998		02560	20	32	9526	14 5	4333	65 5	32	5530	77	2782	99
34	9998		02890	20	34	9497	15,5	4464	66 5	34	5376	79	2980	99
36	9997		03240	20	36	9466	16	4597	67	36	5218	81	3178	99
38	9997		03610	20	38	9434	16 5	4731	68	38	5056	83	3376	99 5
0,40	9996		04000	+ 20	1,40	9401	— 17 5	4867	+ 69	2,40	4890	— 84 5	3575	+ 99 5
42	9995		04410	20	42	9366	18 5	5005	70	42	4721	87	3774	99 5
44	9994		04840	20	44	9329	19	5145	71	44	4547	89	3973	100
46	9993		05290	20	46	9291	19,5	5287	71,5	46	4369	91 5	4173	99 5
48	9992		05759	20	48	9252	20 5	5430	73	48	4186	93	4372	100
0 50	9990	— 0 5	0625	+ 24 5 25 5	1,50	9211	— 21 5	5576	+ 73 5	2,50	4000	— 95 5	4572	+ 99 5
52	9989	1	0676	26 5	52	9168	22 5	5723	74	52	3809	97,5	4771	100
54	9987	1	0729	27 5	54	9123	23	5871	75,5	54	3614	100	4971	100
56	9985	1 5	0784	28 5	56	9077	24	6022	76	56	3414	102	5171	99 5
58	9982	1	0841	29 5	58	9029	25	6174	76 5	58	3210	104 5	5370	99 5
0 60	9980	— 1 5	0900	+ 30 5	1 60	8979	— 26	6327	+ 78	2,60	3001	— 106 5	5569	+ 99
62	9977	1 5	0961	31 5	62	8927	27	6483	78 5	62	2788	109	5767	99 5
64	9974	2	1024	32 5	64	8873	28	6640	79	64	2570	111 5	5966	99
66	9970	1 5	1089	33 5	66	8817	28 5	6798	80,5	66	2347	114	6164	98 5
68	9967	2 5	1156	34	68	8760	30	6959	80 5	68	2119	116	6361	98
0 70	9962	— 2	1224	+ 35,5	1 70	8700	— 31	7120	+ 82	2,70	1887	— 118 5	6557	+ 98
72	9958	2 5	1295	36,5	72	8638	32 5	7284	82 5	72	1650	121	6753	98
74	9953	2 5	1368	37,5	74	8573	33	7449	83	74	1408	123 5	6949	97
76	9948	3	1443	38,5	76	8507	34 5	7615	84	76	1161	126 5	7143	96 5
78	9942	3	1520	39,5	78	8438	35 5	7783	85	78	0908	128 5	7336	96 5
0,80	9936	— 3,5	1599	+ 40 5	1 80	8367	— 36 5	7953	+ 85,5	2,80	0651	— 131	7529	+ 95 5
82	9929	3 5	1680	41	82	8294	38	8124	86	82	0389	134	7720	95
84	9922	3 5	1762	42 5	84	8218	39	8296	87	84	0121	136 5	7910	94
86	9915	4 5	1847	43 5	86	8140	40 5	8470	87,5	86	*0152	139	8098	94
88	9906	4	1934	44 5	88	8059	42	8645	88	88	0430	142	8286	93
0,90	9898	— 5	2023	+ 45	1,90	7975	— 43	8821	+ 89	2,90	0714	— 144,5	8472	+ 92
92	9888	5	2113	46 5	92	7889	44 5	8999	89 5	92	1003	147	8656	91 5
94	9878	5,5	2206	47,5	94	7800	45 5	9178	90	94	1297	150	8839	90 5
96	9867	5,5	2301	48	96	7709	47	9358	91	96	1597	153	9020	89 5
98	9856	6	2397	49,5	98	7615	49	9540	91 5	98	1903	155,5	9199	88 5
1,00	9844		2496		2,00	7517		9723		3,00	2214		9376	
	+ 0.		+ 0.			+ 0.		+ 0.			— 0.		+ 1.	

Продолжение табл. 58

x	ber x		bei x		x	ber x		bei x		x	ber x		bei x	
			+ 1,											
3,00	− 0,2214	− 158,5	9376	+ 87,5	4,00	− 2,563	− 31,5	+ 2,2927	− 51,5	5,00	− 6,230	− 38,5	+ 0,116	− 44
02	0,2531	161	9551	86,5	02	2,626	32	2,2824	56,5	02	6,307	38	+ 0,028	45
04	0,2853	164	9724	85	04	2,690	32	2,2711	62	04	6,383	38	− 0,062	46,5
06	0,3181	167	9894	84,5	06	2,754	32,5	2,2587	66,5	06	6,459	38	0,155	47,5
08	0,3515	170	*0063	82,5	08	2,819	32,5	2,2454	72,5	08	6,535	38	0,250	48 5
3,10	− 0,3855	− 173	0228	+ 82	4,10	− 2,884	− 33	+ 2,2309	− 77,5	5,10	− 6,611	− 37,5	− 0,347	− 49 5
12	0,4201	176	0392	80	12	2,950	33,5	2,2154	83	12	6,686	37	0,446	50 5
14	0,4553	178,5	0552	79	14	3,017	33,5	2,1988	88,5	14	6,760	37	0,547	52
16	0,4910	182	0710	77	16	3,084	33,5	2,1811	94,5	16	6,834	37	0,651	53
18	0,5274	185	0864	76	18	3,151	34	2,1622	100	18	6,908	36	0,757	54 5
3 20	− 0,5644	− 188	1016	+ 74	4,20	− 3,219	− 34,5	+ 2,142	− 10,5	5,20	− 6,980	− 36 5	− 0,866	− 55 5
22	0,6020	190,5	1164	72,5	22	3,288	34,5	2,121	11,5	22	7,053	35,5	0,977	56,5
24	0,6401	194	1309	71	24	3,357	35	2,098	11,5	24	7,124	35,5	1,090	58
26	0,6789	197,5	1451	69	26	3,427	35	2,075	12,5	26	7,195	35	1,206	59
28	0,7184	200	1589	67	28	3,497	35,5	2,050	13	28	7,265	34,5	1,324	60
3,30	− 0,7584	− 203,5	1723	+ 65,5	4,30	− 3,568	− 35,5	+ 2,024	− 14	5,30	− 7,334	− 34,5	− 1,444	− 61,5
32	0,7991	206,5	1854	63	32	3,639	36	1,996	14 5	32	7,403	33,5	1,567	63
34	0,8404	209,5	1980	61,5	34	3,711	36	1,967	15	34	7,470	33,5	1,693	64
36	0,8823	212,5	2103	59	36	3,783	36	1,937	15,5	36	7,537	33	1,821	65
38	0,9248	216	2221	56,5	38	3,855	36,5	1,906	16 5	38	7,603	32	1,951	67
3 40	− 0,968	− 22	2334	+ 55	4,40	− 3,928	− 37	+ 1,873	− 17,5	5,40	− 7,667	− 32	− 2,085	− 67,5
42	1,012	22	2444	52	42	4,002	36,5	1,838	18	42	7,731	31	2,220	69
44	1,056	22,5	2548	50	44	4,075	37,5	1,802	18,5	44	7,793	31	2,358	70 5
46	1,101	23	2648	47,5	46	4,150	37	1,765	19,5	46	7,855	30	2,499	72
48	1,147	23,5	2743	44,5	48	4,224	37,5	1,726	20	48	7,915	29,5	2,643	73
3,50	− 1,194	− 23,5	2832	+ 42 5	4,50	− 4,299	− 37,5	+ 1,686	− 21	5,50	− 7,974	− 28,5	− 2,789	− 74,5
52	1,241	23 5	2917	39 5	52	4,374	38	1,644	21 5	52	8 031	28	2 938	75 5
54	1,288	24,5	2996	36 5	54	4,450	38	1,601	22 5	54	8 087	27 5	3,089	77
56	1,337	24,5	3069	34	56	4,526	38	1,556	23 5	56	8,142	26 5	3,243	78 5
58	1,386	24,5	3137	31	58	4,602	38	1 509	24	58	8 195	26	3,400	80
3,60	− 1,435	− 25,5	3199	+ 27,5	4,60	− 4,678	− 38 5	+ 1,461	− 25	5 60	− 8 247	− 25	− 3,560	− 81
62	1 486	25 5	3254	25	62	4,755	38 5	1,411	25 5	62	8,297	24	3,722	82 5
64	1,537	25,5	3304	21 5	64	4,832	38,5	1,360	27	64	8,345	23,5	3,887	84
66	1 588	26	3347	18	66	4,909	38 5	1,306	27,5	66	8,392	22	4,055	85
68	1 640	26,5	3383	15	68	4,986	39	1,251	28	68	8,436	21,5	4,225	87
3 70	− 1,693	− 27	3413	+ 11,5	4 70	− 5 064	− 39	+ 1,195	− 29,5	5,70	− 8,479	− 20,5	− 4,399	− 88
72	1,747	27	3436	8	72	5,142	38,5	1,136	30	72	8,520	20	4,575	89
74	1 801	27 5	3452	4	74	5 219	39	1,076	31	74	8 560	18,5	4,753	91
76	1,856	27,5	3460	+ 0,5	76	5,297	39	1,014	32	76	8,597	17,5	4,935	92,5
78	1,911	28	3461	− 3,5	78	5,375	39	0,950	33	78	8,632	16	5,120	93 5
3 80	− 1 967	− 28 5	3454	− 7	4 80	− 5,453	− 39	+ 0,884	− 34	5,80	− 8,664	− 15 5	− 5,307	− 95
82	2,024	29	3440	11,5	82	5,531	39	0,816	35	82	8 695	14	5,497	96 5
84	2 082	29	3417	15	84	5,609	39	0,746	36	84	8,723	13	5,690	98
86	2 140	29	3387	19 5	86	5,687	39	0,674	36,5	86	8,749	12	5,886	99
88	2,198	30	3348	24	88	5,765	39	0,601	38	88	8,773	10 5	6,084	100 5
3 90	− 2 258	− 30	3300	− 28	4,90	− 5,843	− 39	+ 0,525	− 39	5,90	− 8,794	− 9	− 6,285	− 102 5
92	2,318	30	3244	32 5	92	5,921	38,5	0,447	39,5	92	8,812	8	6,490	103 5
94	2,378	30,5	3179	37,5	94	5 998	39	0,368	41	94	8,828	6,5	6,697	105
96	2,439	31	3104	42	96	6,076	38 5	0,286	42	96	8,841	5	6,907	106
98	2,501	31	3020	46,5	98	6,153	38 5	0,202	43	98	8,851	3,5	7,119	108
4 00	− 2,563		2927		5,00	− 6,230		+ 0 116		6,00	− 8 858		− 7,335	
			+ 2,											

Таблица 59. Функции ber′ (x) и bei′ (x)

$$\mathrm{ber}'x = \frac{d}{dx}\,\mathrm{Re}\,J_0(x\sqrt{i}) = -\mathrm{Re}\,\sqrt{i}\,J_1(x\sqrt{i}),\quad \mathrm{bei}'x = -\frac{d}{dx}\,\mathrm{Im}\,J_0(x\sqrt{i}) = \mathrm{Im}\,\sqrt{i}\,J_1(x\sqrt{i})$$

x	ber′x		bei′x		x	ber′x		bei′x		x	ber′x		bei′x	
	− 0,0		+ 0,			− 0,		+ 0,			− 0,		+ 0,	
0.00	0000		0000	+ 50	1,00	0624	− 19 5	4974	+ 48 5	2,00	4931	− 73	9170	+ 29
02	0000		0100	50	02	0663	19 5	5071	48 5	02	5077	74,5	9228	28
04	0000	− 0,5	0200	50	04	0702	21	5168	48,5	04	5226	76	9284	27
06	0001	1	0300	50	06	0744	21	5265	48,5	06	5378	77,5	9338	26,5
08	0003	1,5	0400	50	08	0786	22,5	5362	48	08	5533	79	9391	25,5
0.10	0006	− 2,5	0500	+ 50	1,10	0831	− 23	5458	+ 48	2,10	5691	− 80	9442	+ 24 5
12	0011	3	0600	50	12	0877	24	5554	48	12	5851	81,5	9491	23 5
14	0017	4,5	0700	50	14	0925	24,5	5650	47 5	14	6014	83	9538	22
16	0026	5	0800	50	16	0974	25,5	5745	47 5	16	6180	84	9582	21 5
18	0036	7	0900	50	18	1025	26,5	5840	47,5	18	6348	86	9625	20,5
0,20	0050	− 8 5	1000	+ 50	1,20	1078	− 27,5	5935	+ 47 5	2,20	6520	− 87	9666	+ 19 5
22	0067	9,5	1100	50	22	1133	28	6030	47	22	6694	89	9705	18
24	0086	12	1200	50	24	1189	29,5	6124	46,5	24	6872	90	9741	17
26	0110	13 5	1300	50	26	1248	30	6217	47	26	7052	91	9775	16
28	0137	16	1400	50	28	1308	31	6311	46	28	7234	93	9807	14 5
0,30	0169	− 18	1500	+ 50	1,30	1370	− 32	6403	+ 46,5	2,30	7420	− 94 5	9836	+ 13,5
32	0205	20 5	1600	50	32	1434	33	6496	46	32	7609	95 5	9863	12
34	0246	23	1700	50	34	1500	33,5	6588	45 5	34	7800	97 5	9887	11
36	0292	25 5	1800	50	36	1567	35	6679	45,5	36	7995	98 5	9909	9,5
38	0343	28 5	1900	50	38	1637	36	6770	45	38	8192	100	9928	8
0,40	0400	− 31 5	2000	+ 50	1,40	1709	− 37	6860	+ 45	2,40	8392	− 101,5	9944	+ 7
42	0463	34,5	2100	50	42	1783	38	6950	44 5	42	8595	103	9958	5
44	0532	38	2200	49,5	44	1859	39	7039	44	44	8801	104,5	9968	4
46	0608	41,5	2299	50	46	1937	40,5	7127	44	46	9010	105 5	9976	2 5
48	0691	45	2399	50	48	2018	41	7215	44	48	9221	107 5	9981	+ 1
0,50	0781	− 49	2499	+ 50	1,50	2100	− 42 5	7303	+ 43	2,50	9436	− 108 5	9983	− 1
52	0879	52 5	2599	50	52	2185	43,5	7389	43	52	9653	110	9981	2
54	0984	57	2699	50	54	2272	44,5	7475	42 5	54	9873	112	9977	4
56	1098	60 5	2799	49,5	56	2361	45,5	7560	42	56	*0097	113	9969	6
58	1219	65 5	2898	50	58	2452	46 5	7644	41 5	58	0323	114	9957	7
0,60	1350	− 69 5	2998	+ 50	1,60	2545	− 48	7727	+ 41,5	2,60	0551	− 116	9943	− 9,5
62	1489	74 5	3098	49,5	62	2641	49,5	7810	41	62	0783	117	9924	10,5
64	1638	79,5	3197	50	64	2740	50	7892	40	64	1017	119	9903	13
66	1797	84	3297	49,5	66	2840	51,5	7972	40	66	1255	120	9877	14,5
68	1965	89	3396	50	68	2943	52,5	8052	39 5	68	1495	121,5	9848	16,5
0,70	2143	− 94,5	3496	+ 49 5	1,70	3048	− 54	8131	+ 39	2,70	1738	− 122,5	9815	− 18,5
72	2332	100	3595	49 5	72	3156	55	8209	38,5	72	1983	124	9778	20,5
74	2532	105,5	3694	49 5	74	3266	56 5	8286	37 5	74	2231	125,5	9737	22 5
76	2743	111	3793	49,5	76	3379	57 5	8361	37,5	76	2482	127	9692	24,5
78	2965	117	3892	49,5	78	3494	59	8436	36,5	78	2736	128,5	9643	26,5
0,80	3199	− 123	3991	+ 49,5	1 80	3612	− 60	8509	+ 36	2 80	2993	− 129 5	9590	− 29
82	3445	129	4090	49,5	82	3732	61 5	8581	35,5	82	3252	130 5	9532	31
84	3703	135	4189	49,5	84	3855	62 5	8652	35	84	3513	132,5	9470	33 5
86	3973	142	4288	49	86	3980	64	8722	34	86	3778	133,5	9403	35,5
88	4257	148,5	4386	49,5	88	4108	65	8790	33 5	88	4045	134,5	9332	37,5
0,90	4554	− 155	4485	+ 49	1,90	4238	− 67	8857	+ 33	2,90	4314	− 136	9257	− 40,5
92	4864	162	4583	49	92	4372	67 5	8923	32	92	4586	137 5	9176	42,5
94	5188	169	4681	49	94	4507	69,5	8987	31,5	94	4861	138	9091	45,5
96	5526	176	4779	48,5	96	4646	70,5	9050	30,5	96	5137	140	9000	47,5
98	5878	183,5	4876	49	98	4787	72	9111	29,5	98	5417	140,5	8905	50
1,00	6245		4974		2,00	4931		9170		3,00	5698		8805	
	− 0,0		+ 0,			− 0,		+ 0,			− 1,		+ 0,	

Продолжение табл. 59

x	ber′x		bei′x		x	ber′x		bei′x		x	ber′x		bei′x	
			+ 0,			− 3,								
3,00	− 1,570	− 16	8805	− 53	4,00	135	− 15	− 0,491	− 24,5	5,00	− 3,845	+ 7	− 4,354	− 54
02	1,598	14,5	8699	55,5	02	165	14,5	0,540	25,5	02	3,831	7,5	4,462	54 5
04	1,627	14,5	8588	58	04	194	15	0,591	25,5	04	3,816	8,5	4,571	55
06	1,656	14,5	8472	61	06	224	14,5	0,642	26,5	06	3,799	9,5	4,681	55,5
08	1,685	14,5	8350	63,5	08	253	14,5	0,695	26,5	08	3,780	10,5	4,792	56,5
3,10	− 1,714	− 15	8223	− 66,5	4,10	282	− 14	− 0,748	− 27,5	5,10	− 3,759	+ 11,5	− 4,905	− 56,5
12	1,744	14,5	8090	69,5	12	310	14	0,803	27,5	12	3,736	12	5,018	57,5
14	1,773	15	7951	72	14	338	14	0,858	28,5	14	3,712	13	5,133	58
16	1,803	15	7807	75,5	16	366	13,5	0,915	29	16	3,686	14,5	5,249	58,5
18	1,833	15,5	7656	78,5	18	393	13,5	0,973	29,5	18	3,657	15	5,366	59
3,20	− 1,864	− 15	7499	− 81,5	4,20	420	− 13	− 1,032	− 30	5,20	− 3,627	+ 16	− 5,484	− 59,5
22	1,895	15,5	7336	84,5	22	446	13	1,092	30,5	22	3,595	17,5	5,603	60
24	1,925	15,5	7167	87,5	24	472	12,5	1,153	31	24	3,560	18	5,723	60,5
26	1,956	15,5	6992	91	26	497	12,5	1,215	32	26	3,524	19,5	5,844	61
28	1,987	15,5	6810	94,5	28	522	12,5	1,279	32	28	3,485	20	5,966	61,5
3,30	− 2,018	− 15,5	6621	− 97,5	4,30	547	− 11,5	− 1,343	− 33	5,30	− 3,445	+ 21,5	− 6,089	− 62
32	2,049	15 5	6426	101	32	570	11,5	1,409	33,5	32	3,402	23	6,213	63
34	2,080	16	6224	104	34	593	11,5	1,476	34	34	3,356	23,5	6,339	63
36	2,112	16	6016	108	36	616	11	1,544	34,5	36	3,309	25	6,465	63,5
38	2,144	15,5	5800	111,5	38	638	10,5	1,613	35	38	3,259	26 5	6,592	64
3,40	− 2,175	− 16	5577	− 115	4,40	659	− 10	− 1,683	− 36	5,40	− 3,206	+ 27	− 6,720	− 64,5
42	2,207	16	5347	118 5	42	679	10	1,755	36	42	3,152	29	6,849	65
44	2,239	16,5	5110	122,5	44	699	9,5	1,827	37	44	3,094	30	6,979	65
46	2,272	16	4865	126	46	718	9	1,901	37,5	46	3,034	31	7,109	66
48	2,304	16	4613	130	48	736	9	1,976	38,5	48	2,972	32,5	7,241	66
3,50	− 2,336	− 16	4353	− 133,5	4,50	754	− 8	− 2,053	− 38,5	5,50	− 2,907	+ 34	− 7,373	− 66,5
52	2,368	16,5	4086	138	52	770	8	2,130	39,5	52	2,839	35	7,506	67
54	2,401	16	3810	141,5	54	786	7,5	2,209	40	54	2,769	36,5	7,640	67
56	2,433	16,5	3527	145,5	56	801	7	2,289	40 5	56	2,696	38	7,774	67,5
58	2,466	16	3236	149,5	58	815	6,5	2,370	41	58	2,620	39,5	7,909	68
3,60	− 2,498	− 16 5	2937	− 154	4,60	828	− 6	− 2,452	− 42	5,60	− 2,541	+ 41	− 8,045	− 68 5
62	2,531	16	2629	158	62	840	5,5	2,536	42	62	2,459	42	8,182	68,5
64	2,563	16 5	2313	162	64	851	5	2,620	43	64	2,375	44	8,319	69
66	2,596	16	1989	166,5	66	861	4,5	2,706	43 5	66	2,287	45,5	8,457	69
68	2,628	16,5	1656	170 5	68	870	4	2,793	44,5	68	2,196	47	8,595	69,5
3,70	− 2,661	− 16	1315	− 175	4,70	878	− 3,5	− 2,882	− 44,5	5,70	− 2,102	+ 48 5	− 8,734	− 69,5
72	2,693	16 5	0965	179,5	72	885	3	2,971	45,5	72	2,005	50	8 873	69,5
74	2,726	16	0606	184	74	891	2	3,062	46	74	1,905	51,5	9,012	70
76	2,758	16	0238	188,5	76	895	2	3,154	47	76	1,802	53 5	9,152	70,5
78	2,790	16	*0139	193	78	899	− 1	3,248	47	78	1 695	54 5	9,293	70
3,80	− 2,822	− 16	0525	− 198	4,80	901	0	− 3,342	− 48	5,80	− 1,586	+ 57	− 9,433	− 70,5
82	2,854	16	0921	202	82	901	0	3,438	48 5	82	1,472	58	9,574	70,5
84	2,886	16	1325	207	84	901	+ 1	3,535	49	84	1,356	60 5	9 715	71
86	2,918	15,5	1739	212	86	899	1,5	3,633	49 5	86	1,235	61 5	9 857	70 5
88	2,949	16	2163	217	88	896	2,5	3,732	50 5	88	1,112	64	9 998	70 5
3,90	− 2,981	− 15,5	2597	− 221,5	4,90	891	+ 3	− 3,833	− 51	5,90	− 0,984	+ 65	− 10 139	− 71
92	3,012	15,5	3040	226 5	92	885	4	3,935	51,5	92	0 854	67 5	10,281	70,5
94	3,043	15,5	3493	231	94	877	4,5	4,038	52	94	0 719	69	10 422	71
96	3,074	15	3955	236,5	96	868	5	4,142	53	96	0,581	71	10 564	70,5
98	3,104	15,5	4428	241,5	98	858	6,5	4,248	53	98	0,439	73	10,705	70,5
4,00	− 3,135		4911		5,00	845		− 4,354		6,00	− 0,293		− 10,846	
			− 0,			− 3,								

Таблица 60. Функции ber (x) и bei (x)

$$\operatorname{ber} x = \frac{2}{\pi}\operatorname{kei} x = -\operatorname{Re} H_0^{(1)}(x\sqrt{i}),\quad \operatorname{bei} x = -\frac{2}{\pi}\operatorname{ker} x = \operatorname{Im} H_0^{(1)}(x\sqrt{i})$$

x	ber x		bei x		x	ber x		bei x		x	ber x		bei x	
	− 0,					− 0,		− 0,			− 0,		+ 0,0	
0 00	5000	+ 1 5	− ∞		1,00	3151	+ 22 5	1825	+ 43 5	2 00	1289	+ 14	2652	+ 66 5
02	4997	4	2,564		02	3106	22	1738	42	02	1261	14	2785	63
04	4989	6	2,123		04	3062	22 5	1654	40 5	04	1233	13 5	2911	60
06	4977	7	1,865		06	3017	22	1573	39	06	1206	13	3031	57
08	4963	8,5	1,683		08	2973	22	1495	38	08	1180	13 5	3145	54 5
0 10	4946	+ 10	− 1 541	+ 58¹	1 10	2929	+ 21 5	1419	+ 37	2,10	1153	+ 13	3254	+ 51
12	4926	11	1,425	48,5	12	2886	22	1345	35 5	12	1127	12 5	3356	48 5
14	4904	12	1,328	42	14	2842	21 5	1274	34	14	1102	12 5	3453	46
16	4880	13	1,244	37,5	16	2799	21 5	1206	33	16	1077	12 5	3545	43 5
18	4854	14	1,169	33	18	2756	21 5	1140	32	18	1052	12	3632	40
0 20	4826	+ 14,5	− 1,103	+ 29 5	1 20	2713	+ 21	1076	+ 31	2,20	10277	+ 120	3714	+ 38 5
22	4797	15	1,044	27 5	22	2671	21,5	1014	30	22	10037	118 5	3791	36
24	4767	16	0,989	24,5	24	2628	20,5	0954	29	24	09800	116 5	3863	34
26	4735	17	0,940	23	26	2587	21	0896	28	26	09567	114 5	3931	31 5
28	4701	17	0,894	21 5	28	2545	20 5	0840	27	28	09338	113	3994	29 5
0,30	4667	+ 17 5	− 0,851	+ 19 5	1,30	2504	+ 20,5	0786	+ 26	2,30	09112	+ 111	4053	+ 27 5
32	4632	18 5	0 812	18 5	32	2463	20,5	0734	25 5	32	08890	109	4108	25 5
34	4595	18 5	0,775	17,5	34	2422	20	0683	24	34	08672	108	4159	23 5
36	4558	19	0,740	16,5	36	2382	20	0635	24	36	08456	105 5	4206	22
38	4520	19,5	0,707	15 5	38	2342	20	0587	22 5	38	08245	104	4250	19 5
0,40	4481	+ 20	− 0,6765	+ 145,5	1 40	2302	+ 19 5	0542	+ 22	2,40	08037	+ 102 5	4289	+ 18
42	4441	20,5	0,6474	138,5	42	2263	19,5	0498	21	42	07832	100 5	4325	16 5
44	4400	20,5	0,6197	131	44	2224	19	0456	20 5	44	07631	99	4358	14 5
46	4359	20,5	0,5935	124 5	46	2186	19	0415	20	46	07433	97,5	4387	13
48	4318	21,5	0,5686	118 5	48	2148	19	0375	19	48	07238	95 5	4413	11 5
0,50	4275	+ 21	− 0,5449	+ 113	1,50	2110	+ 19	0337	+ 18,5	2 50	07047	+ 94	4436	+ 10 5
52	4233	21,5	0,5223	108 5	52	2072	18 5	0300	17 5	52	06859	92	4457	8 5
54	4190	22	0,5006	103	54	2035	18 5	0265	17,5	54	06675	91	4474	7
56	4146	22	0,4800	99	56	1998	18	0230	16	56	06493	89	4488	6
58	4102	22	0,4602	94,5	58	1962	18	0198	16	58	06315	87 5	4500	4 5
0,60	4058	+ 22	− 0,4413	+ 91	1 60	1926	+ 17 5	0166	+ 15,5	2,60	06140	+ 86	4509	+ 3
62	4014	22,5	0,4231	87	62	1891	18	0135	14 5	62	05968	84,5	4515	2 5
64	3969	22,5	0,4057	84	64	1855	17	0106	14 5	64	05799	83	4520	+ 0 5
66	3924	22,5	0,3889	80,5	66	1821	17 5	0077	13,5	66	05633	81	4521	0
68	3879	22,5	0,3728	77	68	1786	17	0050	13 5	68	05471	80	4521	− 1 5
0 70	3834	+ 23	− 0,3574	+ 74,5	1 70	1752	+ 16 5	0023	+ 12 5	2,70	05311	+ 78 5	4518	− 2
72	3788	22 5	0,3425	71 5	72	1719	17	*0002	12	72	05154	77	4514	3,5
74	3743	23	0,3282	69	74	1685	16,5	0026	12	74	05000	75 5	4507	4 5
76	3697	23	0,3144	66 5	76	1652	16	0050	11	76	04849	74	4498	5
78	3651	22 5	0,3011	64	78	1620	16	0072	11	78	04701	72 5	4488	6,5
0 80	3606	+ 23	− 0,2883	+ 61 5	1,80	1588	+ 16	0094	+ 10	2,80	04556	+ 71	4475	− 7
82	3560	23	0,2760	59 5	82	1556	15 5	0114	10	82	04414	70	4461	8
84	3514	22,5	0,2641	57 5	84	1525	15 5	0134	9,5	84	04274	68	4445	8 5
86	3469	23	0,2526	55,5	86	1494	15,5	0153	9	86	04138	67	4428	9 5
88	3423	23	0,2415	53 5	88	1463	15	0171	9	88	04004	66	4409	10
0 90	3377	+ 22,5	− 0,2308	+ 51 5	1 90	1433	+ 14 5	01888	+ 83 5	2.90	03872	+ 64	4389	− 11
92	3332	22,5	0,2205	50	92	1404	15	02055	80	92	03744	63,5	4367	11 5
94	3287	23	0,2105	48,5	94	1374	14 5	02215	76 5	94	03617	61,5	4344	12
96	3241	22,5	0,2008	46,5	96	1345	14	02368	72,5	96	03494	60,5	4320	13
98	3196	22,5	0,1915	45	98	1317	14	02513	69 5	98	03373	59	4294	13 5
1 00	3151		− 0,1825		2,00	1289		02652		3,00	03255		4267	
	−0,					− 0,		+ 0,			−0,		+0,0	

Продолжение табл. 60

x	her x		hei x		x	her x		hei x		x	her x		hei x	
	— 0,0		+ 0,0			+ 0,00		+ 0,0			+ 0,00		+ 0,00	
3,00	3255	+ 58	4267	— 14	4,00	1400	+ 149 5	2303	— 20	5,00	7122	— 6	7329	— 108,5
02	3139	57	4239	14,5	02	1699	144	2263	19,5	02	7110	7	7112	107
04	3025	55,5	4210	15	04	1987	139,5	2224	20	04	7096	9	6898	104,5
06	2914	54,5	4180	15,5	06	2266	134	2184	19,5	06	7078	10	6689	103,5
08	2805	53	4149	15,5	08	2534	129	2145	19,5	08	7058	11	6482	101
3,10	2699	+ 52	4118	— 16,5	4,10	2792	+ 124,5	2106	— 19	5,10	7036	— 12,5	6280	— 99,5
12	2595	51	4085	17	12	3041	119,5	2068	19,5	12	7011	13,5	6081	97,5
14	2493	49,5	4051	17	14	3280	115	2029	18,5	14	6984	15	5886	96
16	2394	48,5	4017	17,5	16	3510	110,5	1992	19	16	6954	15,5	5694	94
18	2297	47,5	3982	18	18	3731	106	1954	18,5	18	6923	17	5506	92
3,20	2202	+ 46,5	3946	— 18	4,20	3943	+ 101,5	1917	— 18,5	5,20	6889	— 18	5322	— 91
22	2109	45,5	3910	18,5	22	4146	97,5	1880	18,5	22	6853	18,5	5140	88,5
24	2018	44,5	3873	19	24	4341	93,5	1843	18	24	6816	20	4963	87,5
26	1929	43	3835	19	26	4528	89,5	1807	18	26	6776	20,5	4788	85,5
28	1843	42,5	3797	19,5	28	4707	85	1771	17,5	28	6735	21,5	4617	83,5
3 30	1758	+ 41	3758	— 19,5	4,30	4877	+ 81,5	1736	— 18	5,30	6692	— 22	4450	— 82,5
32	1676	40,5	3719	20	32	5040	78	1700	17	32	6648	23	4285	80,5
34	1595	39	3679	20	34	5196	74	1666	17,5	34	6602	24	4124	79
36	1517	38,5	3639	20	36	5344	70,5	1631	17	36	6554	24,5	3966	77
38	1440	37,5	3599	20 5	38	5485	67	1597	17	38	6505	25	3812	76
3 40	1365	+ 36,5	3558	— 20	4,40	5619	+ 63,5	1563	— 16,5	5,40	6455	— 26	3660	— 74
42	1292	35 5	3518	21	42	5746	60	1530	16,5	42	6403	26	3512	73
44	1221	34,5	3476	20,5	44	5866	57	1497	16	44	6351	27	3366	71
46	1152	33,5	3435	21	46	5980	53,5	1465	16,5	46	6297	27,5	3224	69,5
48	1085	33	3393	21	48	6087	51	1432	15,5	48	6242	28	3085	68
3 50	1019	+ 32	3351	— 21	4,50	6189	+ 47,5	1401	— 16	5,50	6186	— 28,5	2949	— 66,5
52	0955	31,5	3309	21	52	6284	44,5	1369	15,5	52	6129	29	2816	65,5
54	0892	30	3267	21,5	54	6373	42	1338	15	54	6071	29,5	2685	63,5
56	0832	30	3224	21	56	6457	39	1308	15,5	56	6012	30	2558	62
58	0772	28,5	3182	21	58	6535	36	1277	15	58	5952	30	2434	61
3 60	0715	+ 28	3140	— 21,5	4,60	6607	+ 34	1247	— 14,5	5,60	5892	— 30,5	2312	— 59,5
62	0659	27	3097	21,5	62	6675	31	1218	14,5	62	5831	31	2193	58
64	0605	26,5	3054	21	64	6737	28,5	1189	14,5	64	5769	31	2077	57
66	0552	26	3012	21,5	66	6794	26	1160	14	66	5707	31,5	1963	55
68	0500	24,5	2969	21	68	6846	24	1132	14	68	5644	32	1853	54
3,70	0451	+ 24,5	2927	— 21,5	4,70	6894	+ 21,5	11042	— 137,5	5,70	5580	— 31,5	1745	— 53
72	0402	23,5	2884	21	72	6937	19	10767	135,5	72	5517	32,5	1639	51,5
74	0355	23	2842	21,5	74	6975	17	10496	133,5	74	5452	32,5	1536	50
76	0309	22	2799	21	76	7009	15	10229	131,5	76	5387	32,5	1436	49
78	0265	21,5	2757	21	78	7039	13	09966	129,5	78	5322	32,5	1338	48
3,80	0222	+ 21	2715	— 21	4,80	7065	+ 11	09707	— 127,5	5,80	5257	— 33	1242	— 46,5
82	0180	20	2673	21	82	7087	9	09452	125,5	82	5191	32,5	1149	45
84	0140	19,5	2631	21	84	7105	7	09201	124	84	5126	33,5	1059	44
86	0101	19	2589	20,5	86	7119	5	08953	121,5	86	5059	33	0971	43
88	0063	18,5	2548	20,5	88	7129	3,5	08710	120	88	4993	33	0885	42
3,90	0026	+ 17,5	2507	— 21	4,90	7136	+ 2	08470	— 118	5,90	4927	— 33,5	0801	— 40,5
92	*0009	17,5	2465	20	92	7140	0	08234	116	92	4860	33	0720	40
94	0044	16,5	2425	20,5	94	7140	— 1,5	08002	114	94	4794	33,5	0640	38,5
96	0077	16	2384	20,5	96	7137	3	07774	112,5	96	4727	33	0563	37,5
98	0109	15,5	2343	20	98	7131	4,5	07549	110	98	4661	33,5	0488	36
4,00	0140		2303		5,00	7122		07329		6,00	4594		0416	
	+ 0,0		+ 0,0			+ 0,00		+ 0,0			+ 0,00		+ 0,00	

Таблица 61. Функции ber (x) и bei (x)

$$\mathrm{ber}'x = -\frac{d}{dx}\operatorname{Re} H_0^{(1)}(x\sqrt{i}) = \operatorname{Re}\sqrt{i}\,H_1^{(1)}(x\sqrt{i}),\quad \mathrm{bei}'x = \frac{d}{dx}\operatorname{Im} H_0^{(1)}(x\sqrt{i}) = -\operatorname{Im}\sqrt{i}\,H_1^{(1)}(x\sqrt{i})$$

x	ber′x		bei′x		x	ber′x		bei′x		x	ber′x		bei′x	
	+ 0,					+ 0,		+ 0,			+ 0,		+ 0,0	
0,00	0000		∞		1,00	2243	— 4	4422	— 74,5	2,00	13993	— 96	6786	— 160
02	0288		+ 31,8		02	2235	5	4273	71,5	02	13801	96	6466	156
04	0488		15,9		04	2225	5	4130	69	04	13609	96	6154	151
06	0655		10,6		06	2215	5	3992	66,5	06	13417	95	5852	147
08	0800		7,94		08	2205	6	3859	64,5	08	13227	95	5558	142,5
0,10	0929	+ 58,5	+ 6,34		1,10	2193	— 5,9	3730	— 62	2,10	13037	— 94	5273	— 138,5
12	1046	53	5,28		12	2182	6,5	3606	60	12	12849	94	4996	134,5
14	1152	48	4,51		14	2169	6,5	3486	58	14	12661	93 5	4727	130
16	1248	44,5	3,94		16	2156	6,5	3370	56	16	12474	93	4467	126 5
18	1337	41	3,49		18	2143	7	3258	54,5	18	12288	92,5	4214	122,5
0,20	1419	+ 38	+ 3,134		1,20	2129	— 7	3149	— 52,5	2,20	12103	— 92	3969	— 119
22	1495	35	2,840		22	2115	7	3044	51	22	11919	91	3731	115 5
24	1565	32,5	2,594		24	2101	7,5	2942	49	24	11737	91	3500	112
26	1630	30	2,385		26	2086	8	2844	47,5	26	11555	90	3276	108 5
28	1690	28	2,206		28	2070	8	2749	46,5	28	11375	89,5	3059	105
0,30	1746	+ 26	+ 2,050	— 68,5	1,30	2054	— 8	2656	— 44,5	2,30	11196	— 89	2849	— 102
32	1798	24	1,913	61	32	2038	8	2567	43,5	32	11018	88	2645	99
34	1846	22,5	1,791	54	34	2022	8,5	2480	42	34	10842	88	2447	95,5
36	1891	20,5	1,683	49	36	2005	8,5	2396	41	36	10666	86,5	2256	92,5
38	1932	19	1,585	44	38	1988	8,5	2314	39,5	38	10493	86,5	2071	89,5
0,40	1970	+ 18	+ 1,497	— 40	1,40	1971	— 8,5	2235	— 38,5	2,40	10320	— 85,5	1892	— 87
42	2006	16	1,417	36,5	42	1954	9	2158	37	42	10149	85	1718	84
44	2038	15	1,344	33,5	44	1936	9	2084	36,5	44	09979	84	1550	81,5
46	2068	14	1,277	30,5	46	1918	9	2011	35	46	09811	83,5	1387	78,5
48	2096	12,5	1,216	28,5	48	1900	9	1941	34	48	09644	82,5	1230	76
0,50	2121	+ 11,5	+ 1,159	— 26,5	1,50	1882	— 9,5	1873	— 33	2,50	09479	— 82	1078	— 73,5
52	2144	10,5	1,106	25	52	1863	9	1807	32,5	52	09315	81	0931	71
54	2165	9,5	1,056	23	54	1845	9,5	1742	31	54	09153	80,5	0789	69
56	2184	8,5	1,010	21	56	1826	9 5	1680	30,5	56	08992	79,5	0651	66
58	2201	7,5	0,968	20,5	58	1807	9,5	1619	29,5	58	08833	79	0519	64
0,60	2216	+ 7	+ 0,927	— 19	1,60	1788	— 9,5	1560	— 28,5	2,60	08675	— 78	0391	— 62
62	2230	6	0,889	17,5	62	1769	9,5	1503	27,5	62	08519	77,5	0267	59,5
64	2242	5	0,854	17	64	1750	9 5	1448	27	64	08364	76	0148	57,5
66	2252	4,5	0,820	16	66	1731	10	1394	26,5	66	08212	76	0033	55,5
68	2261	3,5	0,788	15	68	1711	9,5	1341	25,5	68	08060	75	*0078	53,5
0,70	2268	+ 3	+ 0,7582	— 143	1,70	1692	— 9,5	1290	— 24,5	2,70	07910	— 74	0185	— 51,5
72	2274	2,5	0,7296	135,5	72	1673	10	1241	24	72	07762	73	0288	49,5
74	2279	1,5	0,7025	129,5	74	1653	10	1193	23,5	74	07616	72,5	0387	47,5
76	2282	1,5	0,6766	123	76	1633	9,5	1146	22,5	76	07471	72	0482	46
78	2285	+ 0,5	0,6520	117	78	1614	10	1101	22,5	78	07327	70,5	0574	44
0,80	2286	0	+ 0,6286	— 112,5	1,80	15943	— 97,5	1056	— 21	2,80	07186	— 70	0662	— 42,5
82	2286	— 0,5	0,6061	107	82	15748	98	1014	21	82	07046	69,5	0747	40,5
84	2285	1	0,5847	102,5	84	15552	98	0972	20,5	84	06907	68	0828	39
86	2283	1,5	0,5642	98	86	15356	98	0931	19,5	86	06771	67,5	0906	37,5
88	2280	2	0,5446	94	88	15160	97,5	0892	19	88	06636	67	0981	36
0,90	2276	— 2,5	+ 0,5258	— 90,5	1,90	14965	— 97,5	0854	— 18,5	2,90	06502	— 66	1053	— 34
92	2271	3	0,5077	87	92	14770	97,5	0817	18	92	06370	65	1121	33
94	2265	3	0,4903	83	94	14575	97	0781	17,5	94	06240	64	1187	31,5
96	2259	4	0,4737	80,5	96	14381	97	0746	17	96	06112	63,5	1250	30
98	2251	4	0,4576	77	98	14187	97	0712	16,5	98	05985	62,5	1310	28,5
1,00	2243		+ 0,4422		2,00	13993		0679		3,00	05860		1367	
	+ 0,					+ 0,		+ 0,			+ 0,		— 0,0	

Продолжение табл. 61

x	her′x	hei′x	x	her′x	hei′x	x	her′x	hei′x
	+ 0,0	— 0,0		+ 0,0	— 0,0		— 0,00	— 0,0
3,00	5860 — 62	1367 — 27,5	4,00	1522 — 26,5	20040 + 65,5	5,00	0522 — 71	10946 + 93
02	5736 61	1422 26	02	1469 26	19909 67,5	02	0664 68,5	10760 92
04	5614 60	1474 25	04	1417 25,5	19774 70	04	0801 66,5	10576 92
06	5494 59,5	1524 23,5	06	1366 25	19634 72	06	0934 63,5	10392 91
08	5375 58,5	1571 22	08	1316 24,5	19490 74	08	1061 62	10210 90
3,10	5258 — 57,5	1615 — 21,5	4,10	1267 — 23,5	19342 + 76	5,10	1185 — 59	10030 + 90
12	5143 57	1658 20	12	1220 23,5	19190 78	12	1303 57,5	09850 89
14	5029 56,5	1698 19	14	1173 23	19034 79,5	14	1418 55	09672 88
16	4916 55	1736 18	16	1127 22,5	18875 81,5	16	1528 53	09496 88
18	4806 54,5	1772 17	18	1082 21,5	18712 83	18	1634 50,5	09320 86,5
3,20	4697 — 54	18055 — 158,5!	4,20	1039 — 21,5	18546 + 84	5,20	1735 — 49	09147 + 86,5
22	4589 53	18372 149!	22	0996 21	18378 86	22	1833 47	08974 85
24	4483 52	18670 139,5!	24	0954 20,5	18206 87	24	1927 45	08804 84,5
26	4379 51,5	18949 130,5!	26	0913 20	18032 88	26	2017 43	08635 84
28	4276 50,5	19210 121!	28	0873 19,5	17856 89,5	28	2103 41,5	08467 83
3,30	4175 — 50	19452 — 112,5!	4,30	0834 — 19	17677 + 90,5	5,30	2186 — 39,5	08301 + 82
32	4075 49	19677 104,5!	32	0796 18,5	17496 91	32	2265 37,5	08137 81,5
34	3977 48,5	19886 95,5!	34	0759 18,5	17314 92,5	34	2340 36	07974 80,5
36	3880 47,5	20077 88	36	0722 17,5	17129 93	36	2412 34,5	07813 79,5
38	3785 46,5	20253 80,5	38	0687 17,5	16943 94	38	2481 32,5	07654 79
3,40	3692 — 46,5	20414 — 73	4,40	06521 — 169	16755 + 94,5	5,40	2546 — 31	07496 + 78
42	3599 45	20560 65,5	42	06183 165	16566 95,5	42	2608 30	07340 77
44	3509 44,5	20691 58,5	44	05853 161	16375 95,5	44	2668 28	07186 76,5
46	3420 44	20808 51,5	46	05531 156,5	16184 96,5	46	2724 26,5	07033 75,5
48	3332 43	20911 45	48	05218 153	15991 97	48	2777 25	06882 74,5
3,50	3246 — 42,5	21001 — 39	4,50	04912 — 149	15797 + 97	5,50	2827 — 23,5	06733 + 73,5
52	3161 42	21079 32,5	52	04614 145,5	15603 97,5	52	2874 22,5	06586 73
54	3077 41	21144 26,5	54	04323 141,5	15408 98	54	2919 20,5	06440 72
56	2995 40	21197 20,5	56	04040 137,5	15212 98	56	2960 20	06296 71
58	2915 40	21238 15,5	58	03765 134,5	15016 98	58	3000 18	06154 70
3,60	2835 — 38,5	21269 — 9,5	4,60	03496 — 130,5	14820 + 98,5	5,60	3036 — 17	06014 + 69
62	2758 38,5	21288 — 4,5	62	03235 127	14623 98,5	62	3070 16	05876 68,5
64	2681 37,5	21297 + 0,5	64	02981 123,5	14426 98,5	64	3102 14,5	05739 67,5
66	2606 37	21296 5,5	66	02734 120	14229 98,5	66	3131 14	05604 66,5
68	2532 36	21285 10	68	02494 117	14032 98	68	3159 12	05471 65,5
3,70	2460 — 36	21265 + 14,5	4,70	02260 — 113,5	13836 + 98,5	5,70	3183 — 11,5	05340 + 64,5
72	2388 34,5	21236 19	72	02033 110,5	13639 98	72	3206 10,5	05211 64
74	2319 34,5	21198 23,5	74	01812 107,5	13443 98	74	3227 9	05083 63
76	2250 33,5	21151 27,5	76	01597 104	13247 98	76	3245 8	04957 62
78	2183 33	21096 31	78	01389 101	13051 97,5	78	3261 7,5	04833 61
3,80	2117 — 32,5	21034 + 35	4,80	01187 — 98	12856 + 97,5	5,80	3276 — 6,5	04711 + 60,5
82	2052 32	20964 38,5	82	00991 95	12661 97	82	3289 5	04590 59
84	1988 31	20887 42,5	84	00801 92,5	12467 96,5	84	3299 4,5	04472 58,5
86	1926 30,5	20802 45,5	86	00616 89	12274 96	86	3308 4	04355 58
88	1865 30	20711 48,5	88	00438 87	12082 96	88	3316 2,5	04239 56,5
3,90	1805 — 29,5	20614 + 51,5	4,90	00264 — 83,5	11890 + 95,5	5,90	3321 — 2	04126 + 56
92	1746 29	20511 55	92	00097 81,5	11699 95	92	3325 — 1,5	04014 54,5
94	1688 28	20401 57,5	94	*00066 78,5	11509 94,5	94	3328 0	03905 54,5
96	1632 28	20286 60	96	00223 76	11320 94	96	3328 0	03796 53
98	1576 27	20166 63	98	00375 73,5	11132 93	98	3328 + 1	03690 52,5
4,00	1522	20040	5,00	00522	10946	6,00	3326	03585
	+ 0,0	— 0,0		— 0,0	— 0,0		— 0,00	— 0,0

Таблица 62. Функции ber (x), bei (x), ber′ (x), bei′ (x), her (x), hei (x), her′ (x), hei′ (x) (продолжение)

x	ber x	bei x	ber′ x	bei′ x	her x	hei x	her′ x	hei′ x
					+ 0,	+ 0,	− 0,	− 0,
6,0	− 8,858	− 7,335	− 0,293	− 10,846	4594 (− 2)	4157 (− 3)	3326 (− 2)	3585 (− 2)
1	8,849	8,454	+ 0,494	11,547	4263 (− 2)	0825 (− 3)	3295 (− 2)	3087 (− 2)
2	8,756	9,644	1,384	12,235	3936 (− 2)	*2031 (− 3)	3236 (− 2)	2631 (− 2)
3	8,569	10,901	2,380	12,901	3616 (− 2)	4451 (− 3)	3152 (− 2)	2215 (− 2)
4	8,276	12,223	3,490	13,536	3306 (− 2)	6473 (− 3)	3048 (− 2)	1837 (− 2)
6,5	− 7,867	− 13,607	+ 4,717	− 14,129	3007 (− 2)	8137 (− 3)	2928 (− 2)	1495 (− 2)
6	7,329	15,047	6,067	14,670	2721 (− 2)	9476 (− 3)	2796 (− 2)	1189 (− 2)
7	6,649	16,538	7,544	15,146	2448 (− 2)	10525 (− 2)	2655 (− 2)	9145 (− 3)
8	5,816	18,074	9,151	15,543	2190 (− 2)	11315 (− 2)	2508 (− 2)	6710 (− 3)
9	4,815	19,644	10,891	15,847	19470 (− 2)	11876 (− 2)	2356 (− 2)	4561 (− 3)
7,0	− 3,633	− 21,239	+ 12,765	− 16,041	17191 (− 2)	12236 (− 2)	2202 (− 2)	2677 (− 3)
1	2,257	22,848	14,774	16,109	15066 (− 2)	12420 (− 2)	2049 (− 2)	1039 (− 3)
2	− 0,674	24,456	16,918	16,033	13093 (− 2)	12451 (− 2)	18968 (− 2)	*0372 (− 3)
3	+ 1,131	26,049	19,194	15,792	11271 (− 2)	12352 (− 2)	17475 (− 2)	1575 (− 3)
4	3,169	27,609	21,600	15,367	9597 (− 3)	12143 (− 2)	16022 (− 2)	2589 (− 3)
7,5	+ 5,455	− 29,116	+ 24,130	− 14,736	8065 (− 3)	11840 (− 2)	14616 (− 2)	3430 (− 3)
6	7,999	30,55	26,777	13,875	6672 (− 3)	11462 (− 2)	13266 (− 2)	4116 (− 3)
7	10,814	31,88	29,532	12,763	5410 (− 3)	11022 (− 2)	11976 (− 2)	4661 (− 3)
8	13,909	33,09	32,38	11,373	4274 (− 3)	10534 (− 2)	10752 (− 2)	5081 (− 3)
9	17,293	34,15	35,31	9,681	3257 (− 3)	10009 (− 2)	9595 (− 3)	5390 (− 3)
8,0	+ 20,974	− 35,02	+ 38,31	− 7,660	2353 (− 3)	9459 (− 3)	8507 (− 3)	5600 (− 3)
1	24,957	35,67	41,35	5,285	1554 (− 3)	8892 (− 3)	7490 (− 3)	5725 (− 3)
2	29,245	36,06	44,42	− 2,530	8524 (− 4)	8317 (− 3)	6544 (− 3)	5773 (− 3)
3	33,840	36,16	47,47	+ 0,634	2425 (− 4)	7740 (− 3)	5667 (− 3)	5758 (− 3)
4	38,738	35,92	50,49	4,232	*2832 (− 4)	7167 (− 3)	4859 (− 3)	5686 (− 3)
8,5	+ 43,94	− 35,30	+ 53,44	+ 8,290	7315 (− 4)	6604 (− 3)	4117 (− 3)	5568 (− 3)
6	49,42	34,25	56,28	12,832	11088 (− 3)	6055 (− 3)	3440 (− 3)	5411 (− 3)
7	55,19	32,71	58,97	17,883	14216 (− 3)	5523 (− 3)	2825 (− 3)	5223 (− 3)
8	61,21	30,65	61,45	23,465	16759 (− 3)	5011 (− 3)	2270 (− 3)	5009 (− 3)
9	67,47	28,00	63,68	29,598	18775 (− 3)	4522 (− 3)	1771 (− 3)	4776 (− 3)
9,0	+ 73,94	− 24,71	+ 65,60	+ 36,30	20318 (− 3)	4056 (− 3)	1325 (− 3)	4528 (− 3)
1	80,58	20,72	67,14	43,58	21441 (− 3)	3616 (− 3)	9288 (− 4)	4270 (− 3)
2	87,35	15,98	68,25	51,46	22191 (− 3)	3202 (− 3)	5799 (− 4)	4006 (− 3)
3	94,21	10,41	68,83	59,94	22615 (− 3)	2815 (− 3)	2747 (− 4)	3740 (− 3)
4	101,10	− 3,97	68,82	69,01	22754 (− 3)	2454 (− 3)	0099 (− 4)	3475 (− 3)
9,5	+ 107,95	+ 3,41	+ 68,13	+ 78,68	22647 (− 3)	2120 (− 3)	*2175 (− 4)	3212 (− 3)
6	114,70	11,79	66,67	88,94	22331 (− 3)	1812 (− 3)	4105 (− 4)	2955 (− 3)
7	121,26	21,22	64,35	99,76	21837 (− 3)	1529 (− 3)	5722 (− 4)	2704 (− 3)
8	127,54	31,76	61,07	111,12	21196 (− 3)	1271 (− 3)	7054 (− 4)	2463 (− 3)
9	133,43	43,46	56,72	122,99	20434 (− 3)	1036 (− 3)	8129 (− 4)	2231 (− 3)
10,0	+ 138,84	+ 56,37	+ 51,20	+ 135,31	19578 (− 3)	0824 (− 3)	8971 (− 4)	2009 (− 3)
					− 0,	− 0,	+ 0,	+ 0,

Таблица 63. Функции $J_n(r\sqrt{i}) = b_n e^{i\beta_n}$ и $H_n^{(1)}(r\sqrt{i}) = h_n e^{i\eta_n}$ $(n=0, 1)$

$$\left[b_n = M_n,\ \beta_0 = -\Theta_0,\ \beta_1 = 180^\circ - \Theta_1;\ h_n = \frac{2}{\pi} N_n,\ \eta_0 = -\Phi_0 - 90^\circ,\ \eta_1 = -\Phi_1 + 90^\circ\right]$$

r	b_0	β_0	b_1	β_1	h_0	η_0	h_1	η_1
0,0	1,0000	0°	0,0000	+ 45°	∞	− 90°	∞	− 135°
1	1,0000	− 0°,14	0,0500	44°,93	1,6184	72°,21	6,342	134°,16
2	1,0000	0°,57	0,1000	44°,71	1,2043	66°,37	3,137	132°,41
3	1,0001	1°,29	0,1500	44°,36	0,9708	61°,27	2,057	130°,13
4	1,0004	2°,29	0,2000	43°,85	0,8114	56°,48	1,510	127°,50
0,5	1,0010	− 3°,58	0,2500	+ 43°,21	0,6926	− 51°,88	1,1778	− 124°,62
6	1,0020	5°,15	0,3001	42°,42	0,5995	47°,40	0,9534	121°,56
7	1,0037	7°,01	0,3502	41°,49	0,5241	42°,99	0,7914	118°,34
8	1,0064	9°,14	0,4004	40°,42	0,4617	38°,65	0,6688	115°,02
9	1,0102	11°,55	0,4508	39°,20	0,4091	34°,35	0,5729	111°,60
1,0	1,0153	− 14°,23	0,5013	+ 37°,84	0,3642	− 30°,08	0,4958	− 108°,10
1	1,0227	17° 16	0,5521	36°,34	0,3255	25°,84	0,4327	104°,54
2	1,0320	20°,34	0,6032	34°,71	0,2918	21°,63	0,3801	100°,93
3	1,0438	23°,75	0,6548	32°,93	0,2624	17°,43	0,3358	97°,28
4	1,0586	27°,37	0,7070	31°,01	0,2365	13°,24	0,2980	93°,59
1,5	1,0767	− 31°,19	0,7598	+ 28°,96	0,2136	− 9°,08	0,2655	− 89°,86
6	1,0984	35°,17	0,8136	26°,77	0,1933	4°,92	0,2373	86°,91
7	1,1242	39°,30	0,8684	24°,45	0,1752	− 0°,77	0,2128	82°,33
8	1,1544	43°,54	0,9244	22°,00	0,1591	+ 3°,37	0,1913	78°,53
9	1,1892	47°,88	0,9819	19°,43	0,1446	7°,51	0,1723	74°,71
2,0	1,2290	− 52°,29	1,0412	+ 16°,73	0,13155	+ 11°,63	0,1555	− 70°,87
1	1,2741	56°,74	1,1024	13°,92	0,11984	15°,75	0,14063	67°,02
2	1,3246	61°,22	1,1659	11°,00	0,10927	19°,87	0,12737	63°,15
3	1,3808	65°,71	1,2321	7°,97	0,09973	23°,98	0,11553	59°,18
4	1,443	70°,19	1,3012	4°,84	0,09110	28°,09	0,10492	55°,39
2,5	1,511	− 74°,65	1,3736	+ 1°,61	0,08327	+ 32°,19	0,09540	− 51°,49
6	1,586	79°,09	1,4498	− 1°,70	0,07618	36°,29	0,08684	47°,58
7	1,666	83°,50	1,530	5°,10	0,06973	40°,39	0,07913	43°,66
8	1,754	87°,87	1,615	8°,57	0,06387	44°,49	0,07216	39°,74
9	1,849	92°,21	1,705	12°,11	0,05853	48°,58	0,06587	35°,80
3,0	1,950	− 96°,52	1,800	− 15°,71	0,05367	+ 52°,67	0,06017	− 31°,87
1	2,059	100°,79	1,901	19°,37	0,04923	56°,76	0,05501	27°,92
2	2,176	105°,03	2,009	23°,09	0,04519	60°,84	0,05032	23°,97
3	2,301	109°,25	2,124	26°,83	0,04149	64°,93	0,04606	20°,02
4	2,434	113°,43	2,246	30°,62	0,03811	69°,01	0,04218	16°,06
3,5	2,576	− 117°,60	2,376	− 34°,44	0,03503	+ 73°,09	0,03866	− 12°,09
6	2,728	121°,73	2,515	38°,30	0,03220	77°,17	0,03544	8°,13
7	2,889	125°,87	2,664	42°,17	0,02961	81°,25	0,03251	4°,16
8	3,061	129°,99	2,823	46°,07	0,02724	85°,33	0,02984	− 0°,18
9	3,244	134°,10	2,992	49°,98	0,02507	89°,40	0,02740	+ 3°,80
4,0	3,439	− 138°,19	3,173	− 53°,90	0,02307	+ 93°,48	0,02517	+ 7°,78
1	3,646	142°,28	3,366	57°,84	0,02125	97°,55	0,02312	11°,76
2	3,867	146°,36	3,572	61°,79	0,01957	101°,62	0,02126	15°,75
3	4,102	150°,44	3,792	65°,74	0,01803	105°,70	0,01955	19°,74
4	4,352	154°,51	4,027	69°,71	0,01661	109°,77	0,01798	23°,73
4,5	4,618	− 158°,59	4,278	− 73°,67	0,01531	+ 113°,84	0,01654	+ 27°,73
6	4,901	162°,66	4,546	77°,64	0,014116	117°,91	0,01523	31°,72
7	5,203	166°,73	4,832	81°,61	0,013017	121°,98	0,01402	35°,72
8	5,524	170°,80	5,137	85°,59	0,012006	126°,05	0,012911	39°,72
9	5,866	174°,86	5,462	89°,57	0,011076	130°,11	0,011893	43°,73
5,0	6,231	− 178°,93	5,809	− 93°,55	0,010219	+ 134°,18	0,010958	+ 47°,73

Продолжение табл. 63

r	b_0	β_0	b_1	β_1	h_0	η_0	h_1	η_1
					0,01		0,01	
5,8	6,231	− 178°,93	5,809	− 93°,55	0219	+ 134°,18	0958	+ 47°,73
1	6,620	183° 00	6,179	97°,53	* 9431	138°,25	0099	51°,74
2	7,034	187°,07	6,574	101°,52	8705	142°,31	* 9310	55°,74
3	7,475	191°,14	6,996	105°,50	8036	146°,38	8584	59°,75
4	7,946	195°,21	7,446	109°,49	7420	150°,45	7917	63°,76
5,5	8,447	− 199°,28	7,925	− 113°,48	6853	+ 154°,51	7302	+ 67°,77
6	8,982	203°,35	8,437	117°,47	6329	158°,58	6737	71°,79
7	9,552	207°,42	8,983	121°,46	5847	162°,64	6217	75°,80
8	10,160	211°,49	9,566	125°,46	5402	166°,70	5738	79°,82
9	10,809	215°,56	10,187	129°,45	4991	170°,77	5297	83°,83
6,0	11,501	− 219°,62	10,850	− 133°,45	4613	+ 174°,83	4890	+ 87°,85
1	12,239	223°,69	11,558	137°,45	4264	178°,89	4516	91°,87
2	13,026	227°,76	12,313	141°,45	3941	182°,95	4170	95°,89
3	13,865	231°,83	13,119	145°,45	3644	187°,02	3852	99°,91
4	14,761	235°,90	13,978	149°,46	3369	191°,08	3559	103°,93
6,5	15,72	− 239°,96	14,896	− 153°,46	3116	+ 195°,14	3288	+ 107°,95
6	16,74	244°,03	15,88	157°,47	2881	199°,20	3039	111°,97
7	17,83	248°,10	16,92	161°,48	2665	203°,26	2808	115°,00
8	18,99	252°,16	18,04	165°,49	2465	207°,32	2596	120°,02
9	20,23	256°,23	19,23	169°,50	2281	211°,38	2400	124°,04
7,0	21,55	− 260°,29	20,50	− 173°,51	2110	+ 215°,44	2219	+ 128°,07
1	22,96	264°,36	21,86	177°,52	1952	219°,50	2051	132°,10
2	24,47	268°,42	23,31	181°,54	1807	223°,56	1897	136°,12
3	26,07	272°,49	24,86	185°,55	1672	227°,62	1755	140°,15
4	27,79	276°,55	26,51	189°,57	1548	231°,68	1623	144°,18
7,5	29,62	− 280°,61	28,27	− 193°,59	1433	+ 235°,74	1501	+ 148°,21
6	31,58	284°,67	30,16	197°,61	13262	239°,80	13890	152°,24
7	33,67	288°,74	32,17	201°,63	12278	243°,86	12851	156°,27
8	35,90	292°,80	34,32	205°,65	11368	247°,92	11892	160°,30
9	38,28	296°,86	36,62	209°,67	10526	251°,97	11005	164°,33
8,0	40,82	− 300°,92	39,07	− 213°,69	09747	+ 256°,03	10185	+ 168°,36
1	43,53	304°,98	41,69	217°,72	09027	260°,09	09427	172°,39
2	46,43	309°,04	44,49	221°,74	08360	264°,15	08727	176°,42
3	49,52	313°,10	47,48	225°,77	07743	268°,21	08079	180°,45
4	52,83	317°,16	50,67	229°,79	07173	272°,26	07479	184°,49
8,5	56,36	− 321°,22	54,08	− 233°,82	06644	+ 276°,32	06925	+ 188°,52
6	60,13	325°,28	57,73	237°,84	06155	280°,38	06412	192°,55
7	64,15	329°,34	61,62	241°,87	05703	284°,44	05938	196°,59
8	68,46	333°,40	65,78	245°,90	05284	288°,49	05499	200°,62
9	73,05	337°,46	70,22	249°,93	04896	292°,55	05093	204°,66
9,0	77,96	− 341°,52	74,97	− 253°,96	04537	+ 296°,61	04718	+ 208°,69
1	83,20	345°,58	80,04	257°,99	04204	300°,66	04370	212°,73
2	88,80	349°,64	85,47	262°,02	03896	304°,72	04048	216°,76
3	94,78	353°,69	91,27	266°,05	03611	308°,78	03750	220°,80
4	101,17	357°,75	97,46	270°,08	03347	312°,83	03475	224°,84
9,5	108,00	− 361°,81	104,08	− 274°,11	03102	+ 316°,89	03219	+ 228°,87
6	115,30	365°,87	111,16	278°,14	02876	320°,95	02983	232°,91
7	123,10	369°,93	118,72	282°,18	02666	325°,00	02764	236°,95
8	131,43	373°,98	126,80	286°,21	02471	329°,06	02562	240°,98
9	140,33	378°,04	135,44	290°,24	02291	333°,11	02374	245°,02
10,0	149,85	− 382°,10	144,67	− 294°,28	02124	+ 337°,17	02200	+ 249°,06
					0,00		0,00	

Таблица 64. Функции $\frac{J_0(r\sqrt{i})}{J_1(r\sqrt{i})}$ и $\frac{H_0^{(1)}(r\sqrt{i})}{H_1^{(1)}(r\sqrt{i})}$

$$J_0(r\sqrt{i}):J_1(r\sqrt{i})=\frac{b_0}{b_1}e^{i(\beta_0-\beta_1)},\quad H_0^{(1)}(r\sqrt{i}):H_1^{(1)}(r\sqrt{i})=\frac{h_0}{h_1}e^{i(\eta_0-\eta_1)}$$

$$\left[\frac{b_0}{b_1}=\frac{M_0}{M_1},\ \beta_0-\beta_1=-180^\circ+(\Theta_1-\Theta_0);\ \frac{h_0}{h_1}=\frac{N_0}{N_1},\ \eta_0-\eta_1=-180^\circ+(\Phi_1-\Phi_0)\right]$$

	$\beta_0-\beta_1$	b_0/b_1	$\frac{r}{2}\frac{b_0}{b_1}$	$\frac{2}{r}\frac{b_0}{b_1}$	$\eta_0-\eta_1$	h_0/h_1	$\frac{r}{2}\frac{h_0}{h_1}$	$\frac{2}{r}\frac{h_0}{h_1}$
			1.			0.		
0,0	−45°,00	∞	0000	∞	+45°,00	0000	0,0000	∞
1	45°,07	20,000	0000	400,00	61°,95	2645	0,0132	5,290
2	45°,29	10,001	0001	100,01	66°,03	3839	0,0384	3,839
3	45°,64	6,667	0001	44,45	68°,86	4726	0,0709	3,151
4	46°,15	5,002	0003	25,01	71°,02	5372	0,1074	2,686
0,5	−46°,79	4,002	0008	16,01	+72°,74	5880	0,1470	2,352
6	47°,57	3,339	0017	11,13	74°,16	6288	0,1886	2,096
7	48°,50	2,866	0032	8,188	75°,35	6622	0,2318	1,892
8	49°,56	2,513	0054	6,284	76°,37	6903	0,2761	1,726
9	50°,75	2,241	0084	4,980	77°,25	7140	0,3213	1,587
1,0	−52°,07	2,026	0128	4,051	+78°,02	7346	0,3673	1,469
1	53°,51	1,852	0188	3,368	78°,70	7523	0,4138	1,368
2	55°,05	1,711	0265	2,851	79°,31	7677	0,4606	1,2795
3	56°,68	1,594	0361	2,452	79°,85	7814	0,5079	1,2022
4	58°,38	1,497	0481	2,139	80°,34	7936	0,5555	1,1337
1,5	−60°,14	1,417	0627	1,889	+80°,79	8045	0,6034	1,0727
6	61°,94	1,350	0800	1,688	81°,19	8145	0,6516	1,0181
7	63°,75	1,295	1004	1,523	81°,56	8234	0,6999	0,9687
8	65°,55	1,249	1239	1,387	81°,90	8316	0,7484	0,9240
9	67°,31	1,211	1506	1,275	82°,21	8391	0,7971	0,8833
2,0	−69°,02	1,1804	1805	1,1804	+82°,50	8459	0,8459	0,8459
1	70°,67	1,1557	2135	1,1007	82°,77	8522	0,8948	0,8116
2	72°,22	1,1361	2497	1,0328	83°,02	8579	0,9437	0,7799
3	73°,68	1,1207	2888	0,9745	83°,26	8632	0,9927	0,7506
4	75°,03	1,1089	331	0,9241	83°,47	8683	1,0419	0,7235
2,5	−76°,26	1,1001	375	0,8801	+83°,68	8728	1,0911	0,6983
6	77°,39	1,0936	422	0,8413	83°,87	8772	1,1404	0,6748
7	78°,40	1,0892	470	0,8068	84°,05	8812	1,1896	0,6527
8	79°,30	1,0863	521	0,7759	84°,22	8851	1,2391	0,6322
9	80°,10	1,0844	572	0,7479	84°,38	8886	1,2885	0,6128
3,0	−80°,80	1,0835	625	0,7223	+84°,53	8920	1,338	0,5947
1	81°,42	1,0832	679	0,6988	84°,68	8949	1,387	0,5774
2	81°,95	1,0832	733	0,6769	84°,81	8980	1,437	0,5612
3	82°,41	1,0835	787	0,6567	84°,94	9008	1,486	0,5459
4	82°,81	1,0839	842	0,6375	85°,07	9035	1,536	0,5315
3,5	−83°,15	1,0842	897	0,6195	+85°,19	9061	1,586	0,5178
6	83°,45	1,0845	952	0,6026	85°,30	9086	1,636	0,5048
7	83°,70	1,0846	*006	0,5862	85°,40	9108	1,685	0,4923
8	83°,92	1,0846	060	0,5707	85°,51	9128	1,734	0,4804
9	84°,12	1,0843	114	0,5560	85°,60	9147	1,784	0,4691
4,0	−84°,29	1,0838	168	0,5419	+85°,70	9166	1,833	0,4583
1	84°,44	1,0832	221	0,5284	85°,79	9184	1,883	0,4480
2	84°,57	1,0826	273	0,5155	85°,87	9204	1,933	0,4383
3	84°,69	1,0816	326	0,5031	85°,96	9223	1,983	0,4290
4	84°,81	1,0805	378	0,4912	86°,03	9240	2,033	0,4200
4,5	−84°,91	1,0794	429	0,4798	+86°,11	9256	2,083	0,4114
6	85°,02	1,0781	480	0,4688	86°,18	9270	2,132	0,4030
7	85°,11	1,0768	530	0,4582	86°,25	9285	2,182	0,3951
8	85°,20	1,0755	581	0,4481	86°,32	9300	2,232	0,3875
9	85°,29	1,0740	631	0,4384	86°,39	9313	2,282	0,3801
5,0	−85°,38	1,0723	682	0,4291	+86°,45	9326	2,332	0,3730
			2.			0.		

Продолжение табл. 64

r	$\beta_0 - \beta_1$	b_0/b_1	$\frac{r}{2}\frac{b_0}{b_1}$	$\frac{2}{r}\frac{b_0}{b_1}$	$\eta_0 - \eta_1$	h_0/h_1	$\frac{r}{2}\frac{h_0}{h_1}$	$\frac{2}{r}\frac{h_0}{h_1}$
		1,0		0,		0,9		0,
5,0	— 85°,38	727	2,682	4291	+ 86°,45	326	2,332	3730
1	85°,47	713	2,732	4201	86°,51	339	2,381	3662
2	85°,55	699	2,782	4115	86°,57	350	2,431	3596
3	85°,64	685	2,832	4032	86°,63	362	2,481	3533
4	85°,72	672	2,881	3952	86°,68	372	2,530	3471
5,5	— 85°,80	659	2,931	3876	+ 86°,74	383	2,580	3412
6	85°,88	646	2,981	3802	86°,79	393	2,630	3355
7	85°,95	633	3,030	3731	86°,84	405	2,680	3300
8	86°,03	621	3,080	3663	86°,89	414	2,730	3246
9	86°,10	611	3,130	3597	86°,93	423	2,780	3194
6,0	— 86°,17	600	3,180	3533	+ 86°,98	433	2,830	3144
1	86°,24	589	3,230	3472	87°,02	443	2,880	3096
2	86°,31	578	3,279	3412	87°,07	451	2,930	3049
3	86°,38	568	3,329	3355	87°,11	460	2,980	3003
4	86°,44	559	3,379	3300	87°,15	466	3,029	2958
6,5	— 86°,50	551	3,429	3246	+ 87°,19	474	3,079	2915
6	86°,56	542	3,479	3194	87°,23	480	3,128	2873
7	86°,62	534	3,529	3144	87°,27	487	3,178	2832
8	86°,68	526	3,579	3096	87°,30	495	3,228	2793
9	86°,73	520	3,629	3050	87°,34	503	3,278	2756
7,0	— 86°,78	513	3,680	3004	+ 87°,37	510	3,328	2717
1	86°,83	505	3,729	2959	87° 41	517	3,379	2681
2	86°,88	497	3,779	2916	87°,44	524	3,429	2646
3	86°,93	490	3,829	2874	87°,47	531	3,479	2611
4	86°,98	483	3,879	2833	87°,50	537	3,529	2578
7,5	— 87°,02	477	3,929	2794	+ 87°,53	542	3,578	2545
6	87°,07	471	3,979	2756	87°,56	548	3,628	2513
7	87°,11	465	4,029	2718	87°,59	553	3,678	2481
8	87°,15	459	4,079	2682	87°,62	559	3,728	2451
9	87°,19	453	4,129	2646	87°,65	565	3,778	2422
8,0	— 87°,23	447	4,179	2612	+ 87°,67	570	3,828	2393
1	87°,26	441	4,229	2578	87°,70	576	3,878	2364
2	87°,30	436	4,279	2545	87°,73	580	3,928	2336
3	87°,34	430	4,329	2513	87°,75	584	3,977	2309
4	87°,37	426	4,379	2482	87°,78	589	4,027	2283
8,5	— 87°,40	421	4,429	2452	+ 87°,80	594	4,077	2257
6	87°,44	416	4,479	2422	87°,82	599	4,128	2232
7	87°,47	411	4,529	2393	87°,85	604	4,178	2208
8	87°,50	407	4,579	2365	87°,87	609	4,228	2184
9	87°,53	403	4,629	2338	87°,89	614	4,278	2160
9,0	— 87°,56	398	4,679	2311	+ 87°,91	617	4,328	2137
1	87°,59	394	4,729	2284	87°,93	620	4,377	2114
2	87°,62	389	4,779	2258	87°,96	624	4,427	2092
3	87°,65	385	4,829	2233	87°,98	629	4,477	2071
4	87°,67	381	4,879	2209	88°,00	632	4,527	2049
9,5	— 87°,70	378	4,930	2185	+ 88°,02	637	4,578	2029
6	87°,72	374	4,980	2161	88°,04	641	4,628	2009
7	87°,75	370	5,029	2138	88°,05	644	4,677	1989
8	87°,77	365	5,079	2115	88°,07	647	4,727	1969
9	87°,80	361	5,129	2093	88°,09	651	4,777	1950
10,0	— 87°,82	358	5,179	2072	+ 88°,11	655	4,827	1934
		1,0		0,		0,9		0,

С. ФУНКЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЯ

1. Функции Ангера и Вебера

1.1. *Функции Ангера* $\mathbf{J}_\nu(z)$ и *функции Вебера* $\mathbf{E}_\nu(z)$ получаются в связи с интегральным представлением Бесселя для $J_\nu(z)$. Именно,

$$\mathbf{J}_\nu(z) \pm i\,\mathbf{E}_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\pm i(\nu t - z\sin t)}\,dt,$$

т. е. $\mathbf{J}_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\nu t - z\sin t)\,dt$, $\mathbf{E}_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(\nu t - z\sin t)\,dt$.

В некоторых случаях $-\mathbf{E}_\nu z)$ обозначают через $\Omega_\nu(z)$ и называют *функцией Ломмеля—Вебера* (рис. 173, таблица 65).

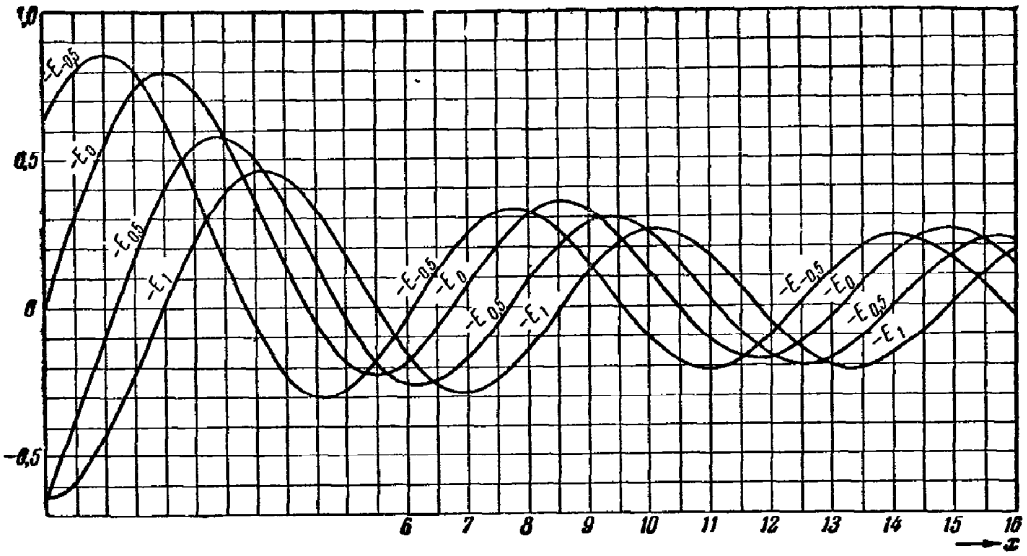


Рис. 173. Функции Вебера $\mathbf{E}_\nu(x)$.

Эти функции являются решениями следующих неоднородных дифференциальных уравнений Бесселя:

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2-\nu^2)w = \begin{cases} \mathbf{J}_\nu(z): & \frac{1}{\pi}(z-\nu)\sin\nu\pi, \\ \mathbf{E}_\nu(z): & -\frac{1}{\pi}[(z+\nu)+(z-\nu)\cos\nu\pi]. \end{cases}$$

Для целого порядка n имеем $\mathbf{J}_n(z) = J_n(z)$. Если ν не целое, то функции $\mathbf{J}_\nu(z)$ и $\mathbf{E}_\nu(z)$ связаны соотношениями

$$\sin\nu\pi\cdot\mathbf{J}_\nu(z) = \cos\nu\pi\cdot\mathbf{E}_\nu(z) - \mathbf{E}_{-\nu}(z), \qquad \sin\nu\pi\cdot\mathbf{E}_\nu(z) = \mathbf{J}_{-\nu}(z) - \cos\nu\pi\cdot\mathbf{J}_\nu(z).$$

Функция Вебера $\mathbf{E}_\nu(z)$ разлагается в степенной ряд

$$\frac{\pi}{2}\mathbf{E}_\nu(z) = \frac{1}{\nu}\sin^2\frac{\nu\pi}{2}\left[1 - \frac{z^2}{2^2-\nu^2} + \frac{z^4}{(2^2-\nu^2)(4^2-\nu^2)} - \dots\right] - \cos^2\frac{\nu\pi}{2}\left[\frac{z}{1^2-\nu^2} - \frac{z^3}{(1^2-\nu^2)(3^2-\nu^2)} + \dots\right].$$

Ее асимптотика при $|z|\gg 1$, $|z|\gg|\nu|$ описывается формулой

$$\mathbf{E}_\nu(z) + N_\nu(z) \approx -\frac{1+\cos\nu\pi}{\pi z}\left[1 - \frac{1^2-\nu^2}{z^2} + \frac{(1^2-\nu^2)(3^2-\nu^2)}{z^4} - \dots\right] - \frac{1-\cos\nu\pi}{\pi z}\left[\frac{\nu}{z} - \frac{\nu(2^2-\nu^2)}{z^3} + \frac{\nu(2^2-\nu^2)(4^2-\nu^2)}{z^5} - \dots\right].$$

1.2. *Неполными функциями Ангера и Вебера* называются функции

$$u = \frac{1}{\pi}\int_0^z \cos(\nu t - r\sin t)\,dt, \qquad -v = \frac{1}{\pi}\int_0^z \sin(\nu t - r\sin t)\,dt.$$

Если верхний предел $z=\pi$, то они превращаются соответственно в функции Ангера и Вебера $\mathbf{J}_\nu(r)$ и $\mathbf{E}_\nu(r)$. Для $r=\nu$ см. таблицы 66 и 67.

2. Функции Струве

Функции Струве $\mathbf{H}_\nu(z)$ получаются в связи с интегральным представлением Пуассона для функций Бесселя при $\operatorname{Re}\nu > -1/2$. Именно,

$$\mathbf{H}_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^{\pi/2}\sin(z\cos t)\sin^{2\nu}t\,dt.$$

Они являются решениями следующего неоднородного дифференциального уравнения Бесселя:

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2-\nu^2)\,w = \frac{4\,(z/2)^{\nu+1}}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(\nu+1/2)}.$$

Функции Струве целого порядка n связаны с функциями Вебера; в частности, имеем (рис. 174, таблица 65): $\mathbf{H}_0(z) = -\mathbf{E}_0(z)$, $\mathbf{H}_1(z) = -\mathbf{E}_1(z) + 2/\pi$.

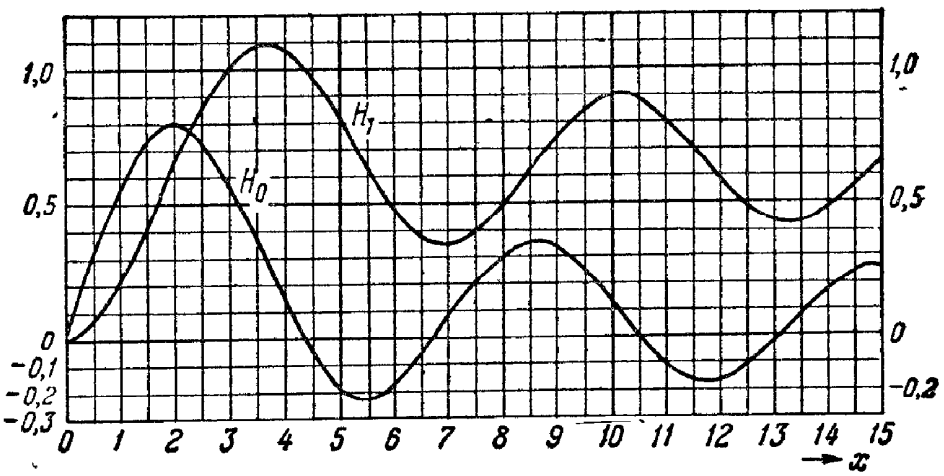


Рис. 174. Функции Струве $\mathbf{H}_\nu(x)$.

Функции Струве порядка $n+1/2$ (n—целое число) являются элементарными функциями, например

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathbf{H}_{1/2}(z) = \frac{1-\cos z}{\sqrt{z}}.$$

Разложение функции $\mathbf{H}_\nu(z)$ в степенной ряд таково:

$$\mathbf{H}_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{(z/2)^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+3/2)}\left[1 - \frac{z^2}{3\,(2\nu+3)} + \frac{z^4}{3\cdot 5\,(2\nu+3)\,(2\nu+5)} - \dots\right].$$

Ее асимптотика при $|z|\gg 1$, $|z|\gg|\nu|$ дается формулой

$$\mathbf{H}_\nu(z) - N_\nu(z) \approx \frac{(z/2)^{\nu-1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\left[1 + \frac{1\cdot(2\nu-1)}{z^2} + \frac{1\cdot 3\cdot(2\nu-1)\,(2\nu-3)}{z^4} + \dots\right].$$

Таблица 65. Функции Вебера $E_0(x)$, $E_1(x)$ и функции Струве $H_0(x)$, $H_1(x)$

x	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$		$-E_1(x)$		$H_1(x)$		x	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$		$-E_1(x)$		$H_1(x)$	
	+ 0,		− 0,		+ 0,			+ 0,		− 0,		+ 0,	
0,00	0000	+ 63,5	6366	+ 0,5	0000	+ 0,5	1,00	5687	+ 43	4382	+ 37,5	1985	+ 37
02	0127	64	6365	1	0001	1	02	5773	43	4307	38	2059	38
04	0255	63,5	6363	2	0003	2,5	04	5859	42	4231	38	2135	38
06	0382	63,5	6359	3	0008	3	06	5943	41	4155	39	2211	39
08	0509	63,5	6353	4	0014	3,5	08	6025	40,5	4077	39	2289	39,5
0,10	0636	+ 63,5	6345	+ 4,5	0021	+ 5	1,10	6106	+ 39,5	3999	+ 40	2368	+ 39,5
12	0763	63	6336	5,5	0031	5,5	12	6185	39	3919	40	2447	40,5
14	0889	63,5	6325	6,5	0042	6	14	6263	38	3839	41	2528	40,5
16	1016	63	6312	7	0054	7,5	16	6339	37	3757	41	2609	41
18	1142	63	6298	8	0069	8	18	6413	36	3675	41,5	2691	41,5
0,20	1268	+ 62,5	6282	+ 9	0085	+ 8,5	1,20	6485	+ 36	3592	+ 42	2774	+ 42
22	1393	62,5	6264	10	0102	10	22	6557	36,5	3508	42,5	2858	42,5
24	1518	62,5	6244	10,5	0122	10,5	24	6626	33,5	3423	42,5	2943	42,5
26	1643	62	6223	11	0143	11,5	26	6693	33	3338	43	3028	43
28	1767	62	6201	12,5	0166	12	28	6759	32,5	3252	43,5	3114	43,5
0,30	1891	+ 61,5	6176	+ 13	0190	+ 13	1,30	6824	+ 31	3165	+ 44	3201	+ 44
32	2014	61,5	6150	13,5	0216	13,5	32	6886	30,5	3077	44	3289	44
34	2137	61	6123	14,5	0243	15	34	6947	29	2989	44,5	3377	44,5
36	2259	61	6094	15,5	0273	15	36	7005	29	2900	44,5	3466	44,5
38	2381	60	6063	16,5	0303	16,5	38	7063	27,5	2811	45	3555	45
0,40	2501	+ 60,5	6030	+ 17	0336	+ 17	1,40	7118	+ 26,5	2721	+ 45,5	3645	+ 45,5
42	2622	59,5	5996	17,5	0370	18	42	7171	26	2630	45,5	3736	45,5
44	2741	59,5	5961	19	0406	18,5	44	7223	25	2539	45,5	3827	45,5
46	2860	59	5923	19	0443	19	46	7273	24	2448	46	3918	46
48	2978	59	5885	20,5	0481	20,5	48	7321	23	2356	46,5	4010	46,5
0,50	3096	+ 58	5844	+ 20,5	0522	+ 21	1,50	7367	+ 22,5	2263	+ 46,5	4103	+ 46,5
52	3212	58	5803	22	0564	21,5	52	7412	21	2170	46,5	4196	46,5
54	3328	57	5759	22	0607	22,5	54	7454	20,5	2077	46,5	4289	46,5
56	3442	57	5715	23,5	0652	23	56	7495	19	1984	47	4382	47
58	3556	56,5	5668	24	0698	24	58	7533	18,5	1890	47	4476	47
0,60	3669	+ 56	5620	+ 24,5	0746	+ 24,5	1,60	7570	+ 17,5	1796	+ 47,5	4570	+ 47,5
62	3781	55,5	5571	25,5	0795	25,5	62	7605	16,5	1701	47	4665	47
64	3892	55	5520	26	0846	26	64	7638	15,5	1607	47,5	4759	47,5
66	4002	54,5	5468	26,5	0898	26,5	66	7669	15	1512	47,5	4854	47,5
68	4111	53,5	5415	27,5	0951	27,5	68	7699	13,5	1417	47,5	4949	47,5
0,70	4218	+ 53,5	5360	+ 28	1006	+ 28,5	1,70	7726	+ 13	1322	+ 47,5	5044	+ 48
72	4325	53	5304	29	1063	28,5	72	7752	11,5	1227	48	5140	47,5
74	4431	52	5246	29,5	1120	29,5	74	7775	11	1131	47,5	5235	47,5
76	4535	51,5	5187	30	1179	30,5	76	7797	10	1036	47,5	5330	48
78	4638	51	5127	31	1240	30,5	78	7817	9	0941	48	5426	47,5
0,80	4740	+ 50,5	5065	+ 31,5	1301	+ 31,5	1,80	7835	+ 7,5	0845	+ 47,5	5521	+ 47,5
82	4841	49,5	5002	32	1364	32	82	7850	7,5	0750	47,5	5616	48
84	4940	49	4938	33	1428	33	84	7865	6	0655	48	5712	47,5
86	5038	48,5	4872	33	1494	33	86	7877	5	0559	47,5	5807	47,5
88	5135	47,5	4806	34	1560	34	88	7887	4	0464	47	5902	47,5
0,90	5230	+ 47	4738	+ 34,5	1628	+ 34,5	1,90	7895	+ 3,5	0370	+ 47,5	5997	+ 47
92	5324	46,5	4669	35	1697	35	92	7902	2	0275	47,5	6091	47,5
94	5417	45,5	4599	35,5	1767	36	94	7906	1,5	0180	47	6186	47
96	5508	45	4528	36,5	1839	36	96	7909	+ 0,5	0086	47	6280	47
98	5598	44,5	4455	36,5	1911	37	98	7910	− 0,5	* 0008	46,5	6374	47
1,00	5687		4382		1985		2,00	7909		0101		6468	
	+ 0,		− 0,		+ 0,			+ 0,		+ 0,		+ 0,	

Продолжение табл. 66

x	$-E_0(x) = H_0(x)$		$-E_1(x)$		$H_1(x)$		x	$-E_0(x) = H_0(x)$		$-E_1(x)$		$H_1(x)$	
	+ 0.		+ 0.		+ 0.			+ 0.		+ 0.		+ 1.	
2,00	7909	− 1 5	0101	+ 47	6468	+ 46,5	3,00	5743	− 38,5	3835	+ 23	0201	+ 23
02	7906	2 5	0195	46,5	6561	46,5	02	5666	39	3881	22,5	0247	22,5
04	7901	3,5	0288	46	6654	46,5	04	5588	39,5	3926	21,5	0292	21,5
06	7894	4	0380	46	6747	46	06	5509	40	3969	21	0335	21
08	7886	5 5	0472	46	6839	45,5	08	5429	40,5	4011	20,5	0377	20,5
2,10	7875	− 6	0564	+ 45 5	6930	+ 46	3,10	5348	− 40,5	4052	+ 19,5	0418	+ 19,5
12	7863	7	0655	45,5	7022	45	12	5267	41	4091	18,5	0457	18,5
14	7849	8	0746	45	7112	45,5	14	5185	41,5	4128	18	0494	18
16	7833	8 5	0836	45	7203	44,5	16	5102	42	4164	17,5	0530	17,5
18	7816	10	0926	44,5	7292	44 5	18	5018	42	4199	16,5	0565	16,5
2,20	7796	− 10 5	1015	+ 44 5	7381	+ 44,5	3,20	4934	− 42,5	4232	+ 16	0598	+ 16
22	7775	11,5	1104	44	7470	44	22	4849	43	4264	15	0630	15
24	7752	12,5	1192	43,5	7558	43,5	24	4763	43	4294	14,5	0660	14,5
26	7727	13	1279	43	7645	43,5	26	4677	43	4323	13,5	0689	13,5
28	7701	14	1365	43	7732	42,5	28	4591	44	4350	13	0716	13
2,30	7673	− 15	1451	+ 42,5	7817	+ 43	3,30	4503	− 44	4376	+ 12	0742	+ 12
32	7643	16	1536	42,5	7903	42	32	4415	44	4400	11,5	0766	11,5
34	7611	16 5	1621	41 5	7987	42	34	4327	44	4423	10,5	0787	10,5
36	7578	17 5	1704	41,5	8071	41	36	4239	44,5	4444	9 5	0810	10
38	7543	18,5	1787	41	8153	41	38	4150	45	4463	9,5	0830	9
2,40	7506	− 19	1869	+ 40,5	8235	+ 40,5	3,40	4060	− 45	4482	+ 8	0848	+ 8
42	7468	20	1950	40	8316	40	42	3970	45	4498	7,5	0864	8
44	7428	20,5	2030	40	8396	40	44	3880	45	4513	7	0880	6,5
46	7387	21,5	2110	39	8476	39	46	3790	45 5	4527	6	0893	6
48	7344	22	2188	38 5	8554	39	48	3699	45,5	4539	5,5	0905	5,5
2 50	7300	− 23	2265	+ 38,5	8632	+ 38	3,50	3608	− 45,5	4550	+ 4 5	0916	+ 4,5
52	7254	24	2342	37,5	8708	37,5	52	3517	45 5	4559	3,5	0925	3,5
54	7206	24,5	2417	37,5	8783	37 5	54	3426	46	4566	3	0932	3
56	7157	25,5	2492	36 5	8858	36,5	56	3334	45 5	4572	2,5	0938	2,5
58	7106	26	2565	36	8931	36,5	58	3243	46	4577	1,5	0943	1,5
2 60	7054	− 26,5	2637	+ 36	9004	+ 35,5	3,60	3151	− 45,5	4580	+ 0,5	0946	+ 0,5
62	7001	27,5	2709	35	9075	35	62	3060	46	4581	0	0947	0
64	6946	28	2779	34 5	9145	34,5	64	2968	45,5	4581	− 1	0947	− 0,5
66	6890	29	2848	34	9214	34	66	2877	46	4579	1,5	0946	1,5
68	6832	29 5	2916	33,5	9282	33 5	68	2785	45,5	4576	2	0943	2,5
2,70	6773	− 30	2983	+ 32,5	9349	+ 33	3,70	2694	− 46	4572	− 3	0938	− 3
72	6713	31	3048	32 5	9415	32	72	2602	45,5	4566	4	0932	3,5
74	6651	31 5	3113	31 5	9479	31,5	74	2511	45,5	4558	4,5	0925	4,5
76	6588	32	3176	31	9542	31	76	2420	45,5	4549	5	0916	5,5
78	6524	32,5	3238	30,5	9604	30,5	78	2329	45,5	4539	6	0905	6
2,80	6459	− 33,5	3299	+ 29,5	9665	+ 30	3,80	2238	− 45	4527	− 6,5	0893	− 6,5
82	6392	34	3358	29,5	9725	29	82	2148	45	4514	7,5	0880	7,5
84	6324	34 5	3417	28	9783	28 5	84	2058	45	4499	8	0865	8
86	6255	35	3473	28	9840	27 5	86	1968	45	4483	8,5	0849	8,5
88	6185	35,5	3529	27	9895	27,5	88	1878	44,5	4466	9,5	0832	9,5
2,90	6114	− 36	3583	+ 26,5	9950	+ 26,5	3,90	1789	− 44	4447	− 10,5	0813	− 10,5
92	6042	36,5	3636	26	* 0003	25,5	92	1701	44,5	4426	11	0792	10,5
94	5969	37	3688	25	0054	25,5	94	1612	44	4404	11,5	0771	11,5
96	5895	38	3738	24,5	0105	24,5	96	1524	43,5	4381	12	0748	12,5
98	5819	38	3787	24	0154	23,5	98	1437	43,5	4357	13	0723	13
3,00	5743		3835		0201		4,00	1350		4331		0697	
	+ 0.		+ 0.		+ 1.			+ 0.		+ 0.		+ 1.	

Продолжение табл. 65

x	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$		$-E_1(x)$		$H_1(x)$		x	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$		$-E_1(x)$		$H_1(x)$	
	+ 0,		+ 0,		+ 1,			− 0,		+ 0,		+ 0,	
4,00	1350	− 43	4331	− 13,5	0697	− 13,5	5,00	1852	− 17	1712	− 35	8078	− 34,5
02	1264	43	4304	14,5	0670	14	02	1886	16	1642	34,5	8009	35
04	1178	42,5	4275	14,5	0642	15	04	1918	15,5	1573	35	7939	35
06	1093	42,5	4246	15,5	0612	15,5	06	1949	14,5	1503	35	7869	35
08	1008	42	4215	16,5	0581	16,5	08	1978	14	1433	35,5	7799	35,5
4,10	0924	− 41,5	4182	− 16,5	0548	− 16,5	5,10	2006	− 13	1362	− 35	7728	− 35
12	0841	41,5	4149	17,5	0515	17,5	12	2032	13	1292	35,5	7658	35,5
14	0758	41	4114	18	0480	18	14	2058	11,5	1221	35,5	7587	35
16	0676	40,5	4078	19	0444	18,5	16	2081	11,5	1150	35	7517	35,5
18	0595	40	4040	19	0407	19,5	18	2104	10	1080	35,5	7446	35,5
4,20	0515	− 40	4002	− 20	0368	− 19,5	5,20	2124	− 10	1009	− 35,5	7375	− 35,5
22	0435	39,5	3962	20,5	0329	20,5	22	2144	9	0938	35,5	7304	35,5
24	0356	39	3921	20,5	0288	21	24	2162	8,5	0867	35,5	7233	35,5
26	0278	38,5	3880	22	0246	21,5	26	2179	7,5	0796	35,5	7162	35
28	0201	38	3836	22	0203	22,5	28	2194	7	0725	35	7092	35,5
4,30	0125	− 38	3792	− 22,5	0158	− 22,5	5,30	2208	− 6	0655	− 35,5	7021	− 35,5
32	0049	37	3747	23	0113	23	32	2220	5,5	0584	35	6950	35
34	* 0025	37	3701	24	0067	24	34	2231	5	0514	35,5	6880	35
36	0099	36	3653	24	0019	24	36	2241	4	0443	35	6810	35,5
38	0171	36	3605	25	* 9971	25	38	2249	3,5	0373	35	6739	34,5
4,40	0243	− 35	3555	− 25	9921	− 25	5,40	2256	− 2,5	0303	− 34,5	6670	− 35
42	0313	35	3505	26	9871	25,5	42	2261	2	0234	35	6600	35
44	0383	34,5	3453	26	9820	26,5	44	2265	1	0164	34,5	6530	34,5
46	0452	33,5	3401	26,5	9767	26,5	46	2267	− 1	0095	34,5	6461	34,5
48	0519	33	3348	27	9714	27	48	2269	+ 0,5	0026	34	6392	34
4,50	0585	− 33	3294	− 28	9660	− 27,5	5,50	2268	+ 0,5	* 0042	− 34,5	6324	− 34
52	0651	32	3238	27,5	9605	28	52	2267	1,5	0111	33,5	6256	34
54	0715	31,5	3183	28,5	9549	28,5	54	2264	2	0178	34	6188	34
56	0778	31	3126	29	9492	29	56	2260	3	0246	33,5	6120	33,5
58	0840	30,5	3068	29	9434	29	58	2254	3,5	0313	33	6053	33
4,60	0901	− 29,5	3010	− 29,5	9376	− 29,5	5,60	2247	+ 4	0379	− 33	5987	− 33
62	0960	29,5	2951	30	9317	30	62	2239	4,5	0445	33	5921	33
64	1019	28,5	2891	30,5	9257	30,5	64	2230	5	0511	32,5	5855	32,5
66	1076	28	2830	30,5	9196	30,5	66	2219	6,5	0576	32,5	5790	32,5
68	1132	27,5	2769	31	9135	31	68	2206	6,5	0641	32	5725	32
4,70	1187	− 26,5	2707	− 31,5	9073	− 31,5	5,70	2193	+ 7,5	0705	− 31,5	5661	− 31,5
72	1240	26	2644	31,5	9010	31,5	72	2178	8	0768	31,5	5598	31,5
74	1292	25,5	2581	32	8947	32	74	2162	8,5	0831	31	5535	31
76	1343	25	2517	32,5	8883	32	76	2145	9	0893	31	5473	31
78	1393	24,5	2452	32,5	8819	32,5	78	2127	10	0955	30,5	5411	30,5
4,80	1442	− 23,5	2387	− 32,5	8754	− 33	5,80	2107	+ 10,5	1016	− 30	5350	− 30
82	1489	22,5	2322	33	8688	33	82	2086	11	1076	30	5290	29,5
84	1534	22,5	2256	33,5	8622	33,5	84	2064	11,5	1136	29	5231	29,5
86	1579	21,5	2189	33,5	8555	33,5	86	2041	12,5	1194	29	5172	29
88	1622	21	2122	33,5	8488	33,5	88	2016	13	1252	29	5114	29
4,90	1664	− 20	2055	− 34	8421	− 34	5,90	1990	+ 13	1310	− 28	5056	− 28
92	1704	19,5	1987	34	8353	34	92	1964	14	1366	28	5000	28
94	1743	19	1919	34,5	8285	34,5	94	1936	14,5	1422	27,5	4944	27,5
96	1781	18	1850	34,5	8216	34,5	96	1907	15	1477	27	4889	27
98	1817	17,5	1781	34,5	8147	34,5	98	1877	15,5	1531	26,5	4835	26,5
5,00	1852		1712		8078		6,00	1846		1584		4782	
	− 0,		+ 0,		+ 0,			− 0,		− 0,		+ 0,	

Продолжение табл. 65

x	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$		$-E_1(x)$		$H_1(x)$		x	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$		$-E_1(x)$		$H_1(x)$	
	−0,		−0,		+0,			+0,		−0,		+0,	
6,00	1846	+ 16,5	1584	− 26,5	4782	− 26,5	7,00	0634	+ 29	2903	+ 1,5	3463	+ 1,5
02	1813	16 5	1637	25,5	4729	25,5	02	0692	29	2900	2,5	3466	2,5
04	1780	17	1688	25,5	4678	25 5	04	0750	29	2895	3	3471	3
06	1746	17,5	1739	25	4627	25	06	0808	28,5	2889	3	3477	3,5
08	1711	18,5	1789	24,5	4577	24	08	0865	29	2883	4	3484	4
6,10	1674	+ 18,5	1838	− 23,5	4529	− 24	7,10	0923	+ 28,5	2875	+ 5	3492	+ 4,5
12	1637	19	1885	23,5	4481	23,5	12	0980	29	2865	5	3501	5
14	1599	19,5	1932	23	4434	23	14	1038	28,5	2855	5,5	3511	6
16	1560	20	1978	22,5	4388	22,5	16	1095	28	2844	6,5	3523	6
18	1520	20,5	2023	22	4343	22	18	1151	28,5	2831	7	3535	7
6,20	1479	+ 21	2067	− 21,5	4299	− 21,5	7,20	1208	+ 28	2817	+ 7,5	3549	+ 7,5
22	1437	21,5	2110	21	4256	21	22	1264	28	2802	8	3564	8
24	1394	21,5	2152	20,5	4214	20,5	24	1320	27,5	2786	8,5	3580	8,5
26	1351	22	2193	20	4173	20	26	1375	28	2769	9	3597	9
28	1307	22,5	2233	19	4133	19	28	1431	27	2751	9,5	3615	9,5
6,30	1262	+ 23	2271	− 19	4095	− 19	7,30	1485	+ 27,5	2732	+ 10	3634	+ 10,5
32	1216	23,5	2309	18,5	4057	18,5	32	1540	27	2712	11	3655	10,5
34	1169	23,5	2346	17,5	4020	17,5	34	1594	27	2690	11	3676	11
36	1122	24	2381	17,5	3985	17,5	36	1648	26,5	2668	11,5	3698	12
38	1074	24,5	2416	16,5	3950	16,5	38	1701	26	2645	12,5	3722	12
6,40	1025	+ 24,5	2449	− 16	3917	− 16	7,40	1753	+ 26	2620	+ 12,5	3746	+ 13
42	0976	25	2481	15,5	3885	15,5	42	1805	26	2595	13,5	3772	13
44	0926	25	2512	15	3854	15	44	1857	25 5	2568	13,5	3798	13,5
46	0876	25,5	2542	14,5	3824	14,5	46	1908	25,5	2541	14,5	3825	14,5
48	0825	26	2571	14	3795	13,5	48	1959	25	2512	14,5	3854	14,5
6,50	0773	+ 26	2599	− 13	3768	− 13,5	7,50	2009	+ 24 5	2483	+ 15	3883	+ 15
52	0721	26,5	2625	12,5	3741	12,5	52	2058	24,5	2453	15,5	3913	16
54	0668	26,5	2650	12,5	3716	12	54	2107	24	2422	16,5	3945	16
56	0615	27	2675	11	3692	11,5	56	2155	23,5	2389	16,5	3977	16,5
58	0561	27	2697	11	3669	11	58	2202	23,5	2356	16,5	4010	17
6,60	0507	+ 27,5	2719	− 10,5	3647	− 10,5	7,60	2249	+ 23	2323	+ 17,5	4044	+ 17
62	0452	27,5	2740	9,5	3626	9,5	62	2295	23	2288	18	4078	18
64	0397	27,5	2759	9	3607	9	64	2341	22	2252	18	4114	18,5
66	0342	28	2777	8,5	3589	8,5	66	2385	22	2216	19	4151	18,5
68	0286	28	2794	8	3572	8	68	2429	21,5	2178	19	4188	19
6,70	0230	+ 28	2810	− 7,5	3556	− 7,5	7,70	2472	+ 21,5	2140	+ 19,5	4226	+ 19,5
72	0174	28 5	2825	6,5	3541	6 5	72	2515	20,5	2101	19,5	4265	19,5
74	0117	28,5	2838	6 5	3528	6	74	2556	20,5	2062	20,5	4304	20,5
76	0060	28 5	2851	5 5	3516	5 5	76	2597	20	2021	20,5	4345	20,5
78	0003	28,5	2862	4,5	3505	5	78	2637	20	1980	20,5	4386	21
6,80	*0054	+ 29	2871	− 4 5	3495	− 4,5	7,80	2677	+ 19	1939	+ 21,5	4428	+ 21
82	0112	29	2880	3,5	3486	3,5	82	2715	18,5	1896	21,5	4470	21,5
84	0170	28 5	2887	3	3479	3	84	2752	18 5	1853	22	4513	22
86	0227	29	2893	2 5	3473	2,5	86	2789	18	1809	22,5	4557	22,5
88	0285	29	2898	2	3468	2	88	2825	17,5	1764	22,5	4602	22,5
6,90	0343	+ 29	2902	− 1,5	3464	− 1,5	7,90	2860	+ 16,5	1719	+ 22,5	4647	+ 23
92	0401	29	2905	− 0,5	3461	− 0,5	92	2893	16,5	1674	23,5	4693	23
94	0459	29,5	2906	0	3460	0	94	2926	16,5	1627	23,5	4739	23,5
96	0518	29	2906	+ 0,5	3460	+ 0,5	96	2959	15 5	1580	23,5	4786	23,5
98	0576	29	2905	1	3461	1	98	2990	15	1533	24	4833	24
7,00	0634		2903		3463		8,00	3020		1485		4881	
	+0,		−0,		+0,			+0,		−0,		+0,	

Продолжение табл. 65

x	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$		$-E_1(x)$		$H_1(x)$		x	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$		$-E_1(x)$		$H_1(x)$	
	+ 0,		− 0,		+ 0,			+ 0,		+ 0,		+ 0,	
8,00	3020	+ 14,5	1485	+ 24	4881	+ 24,5	9,00	3199	− 11,5	1119	+ 23,5	7485	+ 24
02	3049	14	1437	24,5	4930	24,5	02	3176	12	1166	23,5	7533	23
04	3077	14	1388	25	4979	24,5	04	3152	12,5	1213	23	7579	23
06	3105	13	1338	25	5028	25	06	3127	12,5	1259	22,5	7625	22,5
08	3131	12,5	1288	25	5078	25	08	3102	13,5	1304	22,5	7670	22,5
8,10	3156	+ 12	1238	+ 25	5128	+ 25,5	9,10	3075	− 13,5	1349	+ 22	7715	+ 22,5
12	3180	12	1188	26	5179	25,5	12	3048	14,5	1393	22	7760	21,5
14	3204	11	1136	25,5	5230	25,5	14	3019	14,5	1437	21,5	7803	21,5
16	3226	10,5	1085	26	5281	26	16	2990	15	1480	21	7846	21,5
18	3247	10	1033	26	5333	26	18	2960	15,5	1522	21	7889	20,5
8,20	3267	+ 9,5	0981	+ 26	5385	+ 26	9,20	2929	− 15,5	1564	+ 20,5	7930	+ 20,5
22	3286	9	0929	26,5	5437	26,5	22	2898	16,5	1605	20	7971	20,5
24	3304	8,5	0876	26,5	5490	26,5	24	2865	16,5	1645	20	8012	19,5
26	3321	8	0823	26,5	5543	26,5	26	2832	17	1685	19,5	8051	19,5
28	3337	7,5	0770	26,5	5596	26,5	28	2798	17,5	1724	19	8090	19
8,30	3352	+ 7	0717	+ 27	5649	+ 27	9,30	2763	− 18	1762	+ 18,5	8128	+ 19
32	3366	6,5	0663	26,5	5703	26,5	32	2727	18	1799	18,5	8166	18
34	3379	5,5	0610	27	5756	27	34	2691	18,5	1836	18	8202	18
36	3390	5,5	0556	27	5810	27	36	2654	19	1872	17,5	8238	17,5
38	3401	4,5	0502	27	5864	27	38	2616	19	1907	17	8273	17
8,40	3410	+ 4,5	0448	+ 27	5918	+ 27	9,40	2578	− 20	1941	+ 17	8307	+ 17
42	3419	3,5	0394	27	5972	27,5	42	2538	19,5	1975	16	8341	16,5
44	3426	3	0340	27,5	6027	27	44	2499	20,5	2007	16	8374	15,5
46	3432	3	0285	27	6081	27	46	2458	20,5	2039	15,5	8405	15,5
48	3438	2	0231	27	6135	27,5	48	2417	21	2070	15	8436	15
8,50	3442	+ 1,5	0177	+ 27,5	6190	+ 27	9,50	2375	− 21,	2100	+ 15	8466	+ 15
52	3445	+ 1	0122	27	6244	27	52	2333	21,5	2130	14	8496	14
54	3447	0	0068	27	6298	27	54	2290	21,5	2158	13,5	8524	14
56	3447	0	0014	27	6352	27	56	2247	22	2185	13,5	8552	13
58	3447	− 0,5	* 0040	27	6406	27	58	2203	22,5	2212	13	8578	13
8,60	3446	− 1,5	0094	+ 27	6460	+ 27	9,60	2158	− 22,5	2238	+ 12	8604	+ 12,5
62	3443	1,5	0148	26,5	6514	27	62	2113	22,5	2262	12	8629	12
64	3440	2,5	0201	27	6568	26,5	64	2068	23	2286	11,5	8653	11
66	3435	2,5	0255	26,5	6621	26,5	66	2022	23,5	2309	11	8675	11
68	3430	3,5	0308	26,5	6674	27	68	1975	23	2331	10,5	8697	11
8,70	3423	− 4	0361	+ 26,5	6728	+ 26	9,70	1929	− 24	2352	+ 10	8719	+ 10
72	3415	4,5	0414	26,5	6780	26,5	72	1881	23,5	2372	10	8739	9,5
74	3406	4,5	0467	26	6833	26	74	1834	24	2392	9	8758	9
76	3397	5,5	0519	26	6885	26	76	1786	24,5	2410	8,5	8776	8,5
78	3386	6,	0571	26	6937	26	78	1737	24	2427	8	8793	8,5
8,80	3374	− 6,5	0623	+ 25,5	6989	+ 26	9,80	1689	− 24,5	2443	+ 8	8810	+ 7,5
82	3361	7	0674	26	7041	25,5	82	1640	25	2459	7	8825	7
84	3347	7,5	0726	25	7092	25	84	1590	24,5	2473	6,5	8839	7
86	3332	8	0776	25,5	7142	25,5	86	1541	25	2486	6,5	8853	6
88	3316	8,5	0827	24,5	7193	25	88	1491	25	2499	5,5	8865	5,5
8,90	3299	− 9	0876	+ 25	7243	+ 24,5	9,90	1441	− 25,5	2510	+ 5,5	8876	+ 5,5
92	3281	9,5	0926	24,5	7292	24,5	92	1390	25	2521	4,5	8887	4,5
94	3262	10	0975	24,5	7341	24,5	94	1340	25,5	2530	4	8896	4,5
96	3242	10,5	1024	24	7390	24	96	1289	25,5	2538	4	8905	3,5
98	3221	11	1072	23,5	7438	23,5	98	1238	25,5	2546	3	8912	3
9,00	3199		1119		7485		10,00	1187		2552		8918	
	+ 0,		+ 0,		+ 0,			+ 0,		+ 0,		+ 0,	

Продолжение табл. 65

x	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$		$-E_1(x)$		$H_1(x)$		x	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$		$-E_1(x)$		$H_1(x)$	
	+ 0,		+ 0,		+ 0,			− 0,		+ 0,		+ 0,	
10,00	1187	− 25,5	2552	+ 3	8918	+ 3	11,00	1114	− 17	1688	− 18,5	8055	− 19
02	1136	25,5	2558	2	8924	2	02	1148	16	1651	19	8017	18,5
04	1085	25,5	2562	1,5	8928	2	04	1180	16	1613	19	7980	19,5
06	1034	25,5	2565	1,5	8932	1	06	1212	15,5	1575	19,5	7941	19,5
08	0983	26	2568	0,5	8934	0,5	08	1243	15,5	1536	19,5	7902	19,5
10,10	0931	− 25,5	2569	+ 0,5	8935	+ 0,5	11,10	1274	− 14,5	1497	− 20	7863	− 20
12	0880	26	2570	− 0,5	8936	− 0,5	12	1303	14,5	1457	20	7823	20
14	0828	25,5	2569	0,5	8935	0,5	14	1332	14	1417	20,5	7783	20,5
16	0777	25,5	2568	1,5	8934	1,5	16	1360	13,5	1376	20,5	7742	20,5
18	0726	26	2565	2	8931	1,5	18	1387	13	1335	21	7701	21
10,20	0674	− 25,5	2561	− 2	8928	− 2,5	11,20	1413	− 13	1293	− 21	7659	− 21
22	0623	25,5	2557	3	8923	2,5	22	1439	12	1251	21,5	7617	21,5
24	0572	25,5	2551	3	8918	3,5	24	1463	12	1208	21,5	7574	21,5
26	0521	25,5	2545	3,5	8911	3,5	26	1487	11,5	1165	21,5	7531	21,5
28	0470	25	2538	4,5	8904	4,5	28	1510	11	1122	22	7488	22
10,30	0420	− 25,5	2529	− 4,5	8895	− 4,5	11,30	1532	− 10,5	1078	− 22	7444	− 22
32	0369	25	2520	5	8886	5	32	1553	10	1034	22	7400	22
34	0319	25	2510	6	8876	6	34	1573	10	0990	22,5	7356	22
36	0269	25	2498	6	8864	6	36	1593	9	0945	22	7312	22,5
38	0219	25	2486	6,5	8852	6,5	38	1611	9	0901	23	7267	22,5
10,40	0169	− 24,5	2473	− 7	8839	− 7	11,40	1629	− 8	0855	− 22,5	7222	− 23
42	0120	24,5	2459	7,5	8825	7,5	42	1645	8	0810	23	7176	22,5
44	0071	24,5	2444	8	8810	8	44	1661	7,5	0764	22,5	7131	23
46	0022	24	2428	8,5	8794	8,5	46	1676	7	0719	23	7085	23
48	* 0026	24	2411	9	8777	8,5	48	1690	6,5	0673	23	7039	23
10,50	0074	− 24	2393	− 9	8760	− 9,5	11,50	1703	− 6	0627	− 23,5	6993	− 23,5
52	0122	23,5	2375	10	8741	10	52	1715	5,5	0580	23	6946	23
54	0169	23,5	2355	10	8721	10	54	1726	5	0534	23,5	6900	23
56	0216	23	2335	10,5	8701	10,5	56	1736	4,5	0487	23	6854	23,5
58	0262	23,5	2314	11	8680	11	58	1745	4,5	0441	23,5	6807	23,5
10,60	0309	− 22,5	2292	− 11,5	8658	− 11,5	11,60	1754	− 3,5	0394	− 23,5	6760	− 23,5
62	0354	22,5	2269	12	8635	12	62	1761	3,5	0347	23,5	6713	23
64	0399	22,5	2245	12,5	8611	12	64	1768	2,5	0300	23	6667	23,5
66	0444	22	2220	12,5	8587	13	66	1773	2,5	0254	23,5	6620	23,5
68	0488	22	2195	13	8561	13	68	1778	1,5	0207	23,5	6573	23,5
10,70	0532	− 21,5	2169	− 13,5	8535	− 13,5	11,70	1781	− 1,5	0160	− 23,5	6526	− 23,5
72	0575	21	2142	14	8508	14	72	1784	1	0113	23	6479	23
74	0617	21	2114	14,5	8480	14	74	1786	− 0,5	0067	23,5	6433	23,5
76	0659	21	2085	14,5	8452	15	76	1787	0	0020	23,5	6386	23
78	0701	20,5	2056	15	8422	15	78	1787	+ 0,5	* 0027	23	6340	23,5
10,80	0742	− 20	2026	− 15,5	8392	− 15	11,80	1786	+ 1	0073	− 23	6293	− 23
82	0782	19,5	1995	15,5	8362	16	82	1784	1,5	0119	23,5	6247	23
84	0821	19,5	1964	16	8330	16	84	1781	2	0166	23	6201	23
86	0860	19,5	1932	16,5	8298	16,5	86	1777	2	0212	22,5	6155	23
88	0899	18,5	1899	16,5	8265	16,5	88	1773	3	0257	23	6109	23
10,90	0936	− 18,5	1866	− 17,5	8232	− 17	11,90	1767	+ 3,5	0303	− 22,5	6063	− 22,5
92	0973	18,5	1831	17	8198	17,5	92	1760	3,5	0348	23	6018	22,5
94	1010	17,5	1797	18	8163	18	94	1753	4	0394	22,5	5973	22,5
96	1045	17,5	1761	18	8127	18	96	1745	5	0439	22	5928	22,5
98	1080	17	1725	18,5	8091	18	98	1735	5	0483	22,5	5883	22
11,00	1114		1688		8055		12,00	1725		0528		5839	
	− 0,		+ 0,		+ 0,			− 0,		− 0,		+ 0,	

Продолжение табл. 65

x	$-E_0(x) = H_0(x)$		$-E_1(x)$		$H_1(x)$		x	$-E_0(x) = H_0(x)$		$-E_1(x)$		$H_1(x)$	
	−0,		−0,		+0,			−0,		−0,		+0,	
12,00	1725	+ 5,5	0528	− 22	5839	− 22,5	13,00	0295	+ 20,5	2064	− 6	4302	− 6
02	1714	6	0572	21,5	5794	21,5	02	0254	21	2076	5,5	4290	5,5
04	1702	6	0615	22	5751	22	04	0212	21	2087	5	4279	5
06	1690	7	0659	21,5	5707	21,5	06	0170	21	2097	5	4269	5
08	1676	7	0702	21,5	5664	21,5	08	0128	21	2107	4,5	4259	4
12,10	1662	+ 8	0745	− 21	5621	− 21	13,10	0086	+ 21	2116	− 3,5	4251	− 4
12	1646	8	0787	21	5579	21	12	0044	21,5	2123	3,5	4243	3,5
14	1630	8,5	0829	20,5	5537	20,5	14	0001	21,5	2130	3	4236	3
16	1613	9	0870	21	5496	20,5	16	*0042	21	2136	2,5	4230	2,5
18	1595	9	0912	20	5455	20,5	18	0084	21,5	2141	2,5	4225	2,5
12,20	1577	+ 10	0952	− 20	5414	− 20	13,20	0127	+ 21,5	2146	− 1,5	4220	− 1,5
22	1557	10	0992	20	5374	20	22	0170	21,5	2149	1,5	4217	1,5
24	1537	10,5	1032	19,5	5334	19,5	24	0213	21,5	2152	0,5	4214	0,5
26	1516	11	1071	19,5	5295	19,5	26	0256	21,5	2153	− 0,5	4213	− 0,5
28	1494	11	1110	19	5256	19	28	0299	21,5	2154	0	4212	0
12,30	1472	+ 12	1148	− 19	5218	− 19	13,30	0342	+ 22	2154	+ 0,5	4212	+ 0,5
32	1448	12	1186	18,5	5180	18,5	32	0386	21,5	2153	1	4213	1
34	1424	12,5	1223	18	5143	18	34	0429	21,5	2151	1	4215	1,5
36	1399	12,5	1259	18	5107	18	36	0472	21,5	2149	2	4218	1,5
38	1374	13	1295	18	5071	18	38	0515	21	2145	2	4221	2,5
12,40	1348	+ 13,5	1331	− 17,5	5035	− 17	13,40	0557	+ 21,5	2141	+ 3	4226	+ 2,5
42	1321	14	1366	17	5001	17,5	42	0600	21,5	2135	3	4231	3
44	1293	14	1400	16,5	4966	16,5	44	0643	21	2129	3,5	4237	3,5
46	1265	14,5	1433	16,5	4933	16,5	46	0685	21,5	2122	4	4244	4
48	1236	15	1466	16	4900	16	48	0728	21	2114	4	4252	4
12,50	1206	+ 15	1498	− 16	4868	− 16	13,50	0770	+ 21	2106	+ 5	4260	+ 5
52	1176	15,5	1530	15,5	4836	15,5	52	0812	21	2096	5	4270	5
54	1145	16	1561	15	4805	15	54	0854	20,5	2086	5,5	4280	5,5
56	1113	16	1591	15	4775	14,5	56	0895	21	2075	6	4291	6
58	1081	16,5	1621	14	4746	14,5	58	0937	20,5	2063	6,5	4303	6,5
12,60	1048	+ 16,5	1649	− 14	4717	− 14	13,60	0978	+ 20,5	2050	+ 7	4316	+ 7
62	1015	17	1677	14	4689	14	62	1019	20	2036	7	4330	7
64	0981	17	1705	13	4661	13	64	1059	20,5	2022	7,5	4344	7,5
66	0947	17,5	1731	13	4635	13	66	1100	20	2007	8	4359	8
68	0912	17,5	1757	12,5	4609	12,5	68	1140	19,5	1991	8,5	4375	8,5
12,70	0877	+ 18	1782	− 12,5	4584	− 12,5	13,70	1179	+ 20	1974	+ 9	4392	+ 9
72	0841	18,5	1807	11,5	4559	11,5	72	1219	19	1956	9	4410	9
74	0804	18	1830	11,5	4536	11,5	74	1257	19,5	1938	9,5	4428	9,5
76	0768	19	1853	11	4513	11	76	1296	19	1919	10	4447	10
78	0730	18,5	1875	11	4491	10,5	78	1334	19	1899	10	4467	10,5
12,80	0693	+ 19,5	1897	− 10	4470	− 10,5	13,80	1372	+ 18,5	1879	+ 11	4488	+ 10,5
82	0654	19	1917	10	4449	9,5	82	1409	18,5	1857	11	4509	11
84	0616	19,5	1937	9	4430	9,5	84	1446	18,5	1835	11	4531	11,5
86	0577	19,5	1955	9	4411	9	86	1483	18	1813	12	4554	11,5
88	0538	20	1973	9	4393	8,5	88	1519	17,5	1789	12	4577	12
12,90	0498	+ 20	1991	− 8	4376	− 8,5	13,90	1554	+ 17,5	1765	+ 12,5	4601	+ 12,5
92	0458	20	2007	7,5	4359	7,5	92	1589	17,5	1740	12,5	4626	12,5
94	0418	20,5	2022	7,5	4344	7,5	94	1624	17	1715	13	4651	13,5
96	0377	20,5	2037	7	4329	7	96	1658	16,5	1689	13,5	4678	13
98	0336	20,5	2051	6,5	4315	6,5	98	1691	16,5	1662	14	4704	14
13,00	0295		2064		4302		14,00	1724		1634		4732	
	−0,		−0,		+0,			+0,		−0,		+0,	

Продолжение табл. 65

x	$-E_0(x) = H_0(x)$		$-E_1(x)$		$H_1(x)$		x	$-E_0(x) = H_0(x)$		$-E_1(x)$		$H_1(x)$	
	+ 0,		− 0,		+ 0,			+ 0,		+ 0,		+ 0,	
14,00	1724	+ 16,5	1634	+ 14	4732	+ 14	15,00	2477	− 2,5	0239	+ 20	6605	+ 20,5
02	1757	16	1606	14	4760	14	02	2472	3	0279	20,5	6646	20
04	1789	15,5	1578	15	4788	15	04	2466	3,5	0320	20	6686	20
06	1820	15,5	1548	14,5	4818	15	06	2459	3,5	0360	20	6726	20,5
08	1851	15	1519	15,5	4848	15	08	2452	4,5	0400	20	6767	20
14,10	1881	+ 14,5	1488	+ 15,5	4878	+ 15,5	15,10	2443	− 4,5	0440	+ 20	6807	+ 19,5
12	1910	14,5	1457	15,5	4909	15,5	12	2434	5	0480	20	6846	20
14	1939	14	1426	16	4940	16,5	14	2424	5,5	0520	19,5	6886	19,5
16	1967	14	1394	16,5	4973	16	16	2413	5,5	0559	19,5	6925	19,5
18	1995	13,5	1361	16,5	5005	16,5	18	2402	6,5	0598	19,5	6964	19,5
14,20	2022	+ 13	1328	+ 17	5038	+ 17	15,20	2389	− 6,5	0637	+ 19	7003	+ 19
22	2048	12,5	1294	17	5072	17	22	2376	7	0675	19	7041	19
24	2073	12,5	1260	17	5106	17	24	2362	7	0713	19	7079	19
26	2098	12	1226	17,5	5140	17,5	26	2348	8	0751	18,5	7117	19
28	2122	12	1191	18	5175	18	28	2332	8	0788	18,5	7155	18,5
14,30	2146	+ 11,5	1155	+ 17,5	5211	+ 18	15,30	2316	− 8,5	0825	+ 18,5	7192	+ 18
32	2169	11	1120	18,5	5247	18	32	2299	8,5	0862	18,5	7228	18,5
34	2191	10,5	1083	18	5283	18	34	2282	9,5	0899	17,5	7265	18
36	2212	10,5	1047	18,5	5319	18,5	36	2263	9,5	0934	18	7301	17,5
38	2233	9,5	1010	19	5356	19	38	2244	9,5	0970	17,5	7336	17,5
14,40	2252	+ 9,5	0972	+ 18,5	5394	+ 19	15,40	2225	− 10,5	1005	+ 17,5	7371	+ 17,5
42	2271	9,5	0935	19	5432	19	42	2204	10,5	1040	17	7406	17
44	2290	8,5	0897	19,5	5470	19	44	2183	11	1074	17	7440	17
46	2307	8,5	0858	19	5508	19,5	46	2161	11	1108	16,5	7474	16,5
48	2324	8	0820	19,5	5547	19,5	48	2139	11,5	1141	16,5	7507	16,5
14,50	2340	+ 7,5	0781	+ 20	5586	+ 19,5	15,50	2116	− 12	1174	+ 16	7540	+ 16,5
52	2355	7,5	0741	19,5	5625	19,5	52	2092	12,5	1206	16	7573	15,5
54	2370	6,5	0702	20	5664	20	54	2067	12,5	1238	15,5	7604	16
56	2383	6,5	0662	20	5704	20	56	2042	13	1269	15,5	7636	15
58	2396	6	0622	20	5744	20	58	2016	13	1300	15	7666	15,5
14,60	2408	+ 5,5	0582	+ 20	5784	+ 20	15,60	1990	− 13,5	1330	+ 15	7697	+ 14,5
62	2419	5,5	0542	20,5	5824	20,5	62	1963	13,5	1360	14,5	7726	14,5
64	2430	5	0501	20	5865	20,5	64	1936	14	1389	14,5	7755	14,5
66	2440	4	0461	20,5	5906	20	66	1908	14,5	1418	14	7784	14
68	2448	4	0420	20,5	5946	20,5	68	1879	14,5	1446	13,5	7812	13,5
14,70	2456	+ 3,5	0379	+ 20,5	5987	+ 20,5	15,70	1850	− 15	1473	+ 13,5	7839	+ 13,5
72	2463	3,5	0338	20,5	6028	21	72	1820	15	1500	13	7866	13
74	2470	2,5	0297	21	6070	20,5	74	1790	15,5	1526	12,5	7892	12,5
76	2475	2,5	0255	20,5	6111	20,5	76	1759	15,5	1551	12,5	7917	12,5
78	2480	2	0214	20,5	6152	20,5	78	1728	16	1576	12	7942	12
14,80	2484	+ 1,5	0173	+ 20,5	6193	+ 21	15,80	1696	− 16	1600	+ 12	7966	+ 12
82	2487	1	0132	21	6235	20,5	82	1664	16,5	1624	11,5	7990	11,5
84	2489	+ 1	0090	20,5	6276	20,5	84	1631	16,5	1647	11	8013	11
86	2491	0	0049	20,5	6317	21	86	1598	17	1669	10,5	8035	10,5
88	2491	0	0008	21	6359	20,5	88	1564	17	1690	10,5	8056	10,5
14,90	2491	− 0,5	*0034	+ 20,5	6400	+ 20,5	15,90	1530	− 17	1711	+ 10	8077	+ 10
92	2490	1	0075	20,5	6441	20,5	92	1496	17,5	1731	9,5	8097	10
94	2488	1,5	0116	20,5	6482	20,5	94	1461	17,5	1750	9,5	8117	9
96	2485	1,5	0157	20,5	6523	20,5	96	1426	18	1769	9	8135	9
98	2482	2,5	0198	20,5	6564	20,5	98	1390	18	1787	8,5	8153	9
15,00	2477		0239		6605		16,00	1354		1804		8171	
	+ 0,		+ 0,		+ 0,			+ 0,		+ 0,		+ 0,	

Таблицы 66 и 67. Неполные функции Ангера и Вебера

$$u = \frac{1}{2}\int_0^x \cos\frac{q}{2}\left(\frac{\pi}{2}t - \sin\frac{\pi}{2}t\right)dt$$

x	q = 0,1	q = 0,2	q = 0,3	q = 0,4	q = 0,5
	0,	0,	0,	0,	0,
0,0	00000	00000	00000	00000	00000
1	05000	05000	05000	05000	05000
2	10000	10000	10000	10000	10000
3	15000	15000	15000	15000	15000
4	20000	20000	20000	20000	20000
0,5	25000	25000	25000	25000	24999
6	3000	3000	29999	29998	29998
7	3500	3500	3500	3500	3499
8	4000	4000	3999	3999	3998
9	4500	4499	4499	4498	4496
1,0	5000	4999	4997	4995	4992
1	5499	5498	5495	5491	5486
2	5999	5996	5991	5984	5975
3	6498	6493	6485	6473	6458
4	6997	6989	6976	6957	6933
1,5	7496	7483	7463	7434	7397
6	7994	7975	7945	7902	7848
7	8491	8465	8421	8360	8282
8	8988	8951	8890	8805	8697
9	9483	9433	9350	9235	9090
2,0	9978	9911	9801	9649	9457
	0,	0,	0,	0,	0,

$$-v = \frac{1}{2}\int_0^x \sin\frac{q}{2}\left(\frac{\pi}{2}t - \sin\frac{\pi}{2}t\right)dt$$

x	q = 0,1	q = 0,2	q = 0,3	q = 0,4	q = 0,5
	0,	0,	0,	0,	0,
0,0	000000	000000	000000	000000	000000
1	000000	000001	000001	000002	000002
2	000006	000013	000019	000026	000032
3	000032	000065	000097	000130	000162
4	000102	000204	000306	000408	000510
0,5	000247	000494	000742	000989	001236
6	000508	001016	001524	002032	002540
7	000931	001862	002793	003724	004655
8	001569	003138	004706	006275	007842
9	002478	004956	007434	009909	012383
1,0	003719	007437	011153	014865	018572
1	005353	010702	016046	021380	026703
2	007440	014872	022292	029691	03706
3	010040	020066	03006	04002	04992
4	013210	026393	03952	05257	06552
1,5	017001	03395	05081	06752	08404
6	021460	04284	06404	08500	10562
7	026625	05311	07932	10511	13035
8	032528	06483	09669	12790	15823
9	039190	07804	11621	15337	18920
2,0	046624	09274	13785	18147	22313
	0,	0,	0,	0,	0,

x	q = 0,6	q = 0,7	q = 0,8	q = 0,9	q = 1,0
	0,	0,	0,	0,	0,
0,0	00000	00000	00000	00000	00000
1	05000	05000	05000	05000	05000
2	10000	10000	10000	10000	10000
3	15000	15000	15000	15000	15000
4	20000	20000	20000	19999	19999
0,5	24999	24999	24998	24998	24997
6	29996	29995	29994	29992	29990
7	3499	3499	3498	3498	3497
8	3998	3997	3996	3994	3993
9	4495	4493	4490	4488	4485
1,0	4989	4985	4980	4975	4969
1	5479	5472	5463	5454	5443
2	5964	5951	5936	5919	5900
3	6439	6418	6393	6365	6333
4	6903	6869	6829	6785	6736
1,5	7352	7300	7240	7173	7098
6	7782	7705	7617	7519	7412
7	8189	8080	7955	7818	7667
8	8568	8417	8248	8060	7855
9	8915	8714	8488	8239	7971
2,0	9228	8965	8672	8352	8011
	0,	0,	0,	0,	0,

x	q = 0,6	q = 0,7	q = 0,8	q = 0,9	q = 1,0
	0,	0,	0,	0,	0,
0,0	000000	000000	000000	000000	000000
1	000002	000003	000003	000004	000004
2	000039	000045	000052	000058	000064
3	000195	000227	000260	000292	000325
4	000612	000714	000816	000918	001020
0,5	001483	001730	001977	002225	002472
6	003048	003555	004063	004571	005078
7	005585	006515	007445	008375	009304
8	009409	010975	012540	014103	015666
9	014855	017324	019789	022251	024709
1,0	022272	025966	029650	03332	03699
1	03201	03730	04257	04781	05303
2	04440	05170	05896	06616	07330
3	05976	06951	07916	08871	09814
4	07833	09098	10346	11572	12776
1,5	10031	11631	13197	14727	16214
6	12583	14555	16471	18324	20106
7	15491	17868	20152	22333	24401
8	18749	21550	24207	26704	29026
9	22341	25572	28588	3137	3388
2,0	26242	29894	3323	3623	3886
	0,	0,	0,	0,	0,

XIV. ФУНКЦИИ МАТЬЕ (ФУНКЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА)

1. Определения и обозначения

1.1. *Функциями Матье (функциями эллиптического цилиндра)* в общем случае называются решения дифференциального *уравнения Матье*

$$\frac{1}{4}\frac{d^2w}{dz^2}+(a-4q\cos 2z)w=0.$$

В узком смысле под (периодическими) функциями Матье $\varphi_m(z, q)$ понимают периодические решения этого уравнения с периодом 2π.

Не для каждой пары значений a, q уравнение Матье имеет периодическое решение периода 2π. Однако для каждого действительного значения параметра q

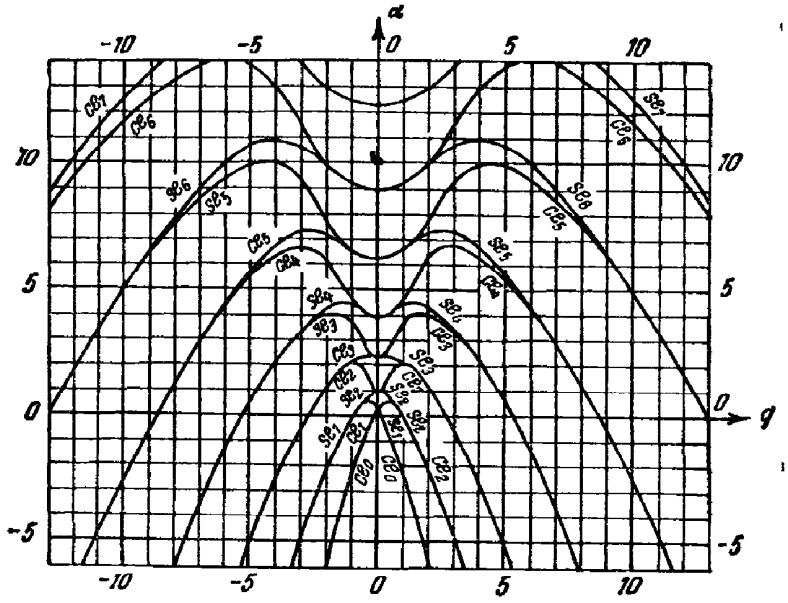


Рис. 175. Собственные значения параметра a как функции q

существует бесконечная последовательность «собственных значений» параметра a (рис. 175), для которых такое решение есть, и оно определяется при $q\neq 0$ с точностью до постоянного множителя. Эти функции $\varphi_m(z, q)$ все являются целыми функциями от z и действительны для действительных значений аргумента $z=x$.

1.2. Функции Матье в зависимости от приводимых ниже свойств разделяются на четыре класса, причем для этих функций и соответствующих собственных значений параметра a обычно употребляют обозначения

$$\begin{array}{llll} \mathrm{ce}_{2n}(z, q), & \mathrm{se}_{2n+1}(z, q), & \mathrm{ce}_{2n+1}(z, q), & \mathrm{se}_{2n+2}(z, q), \\ a_{2n}, & \beta_{2n+1}, & a_{2n+1} & \beta_{2n+2}, \end{array} \qquad n=0, 1, 2, \ldots$$

Если эти функции рассматривают как функции только аргумента z при постоянном значении параметра q, то пишут короче $\mathrm{ce}_{2n}(z)$, $\mathrm{se}_{2n+1}(z)$, ... (рис. 176—187).

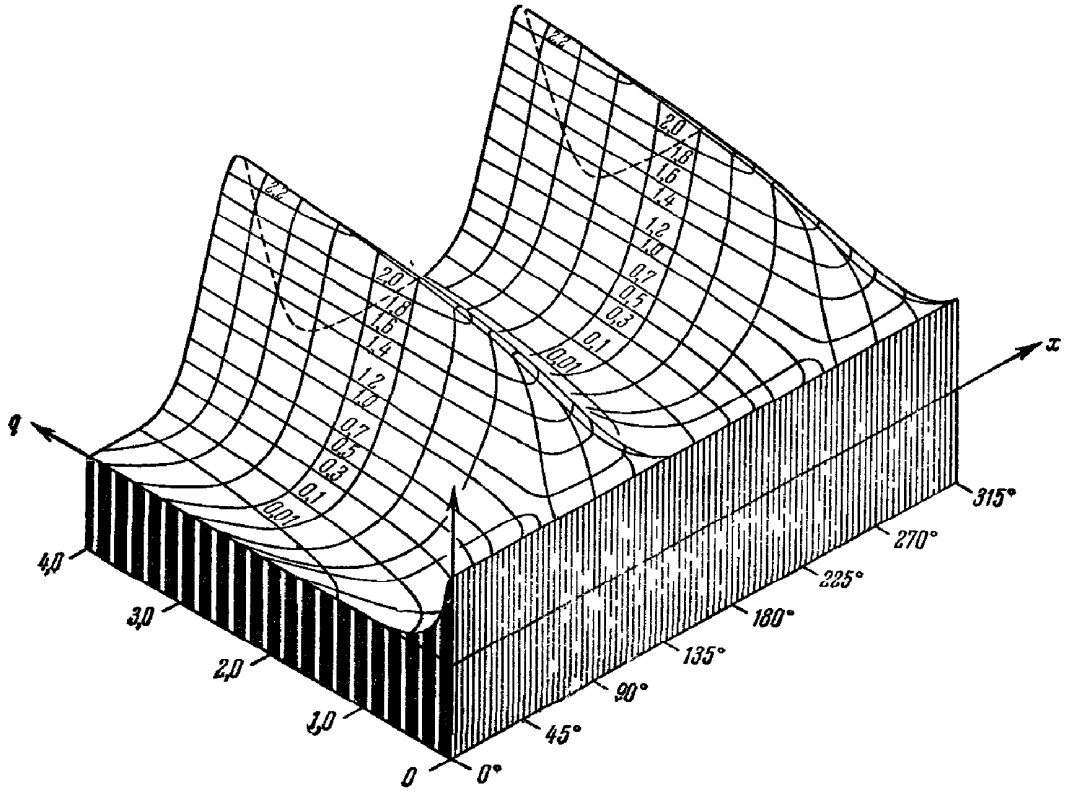


Рис 176. Поверхность функции Матье $ce_0(x, q)$ над плоскостью x, q.

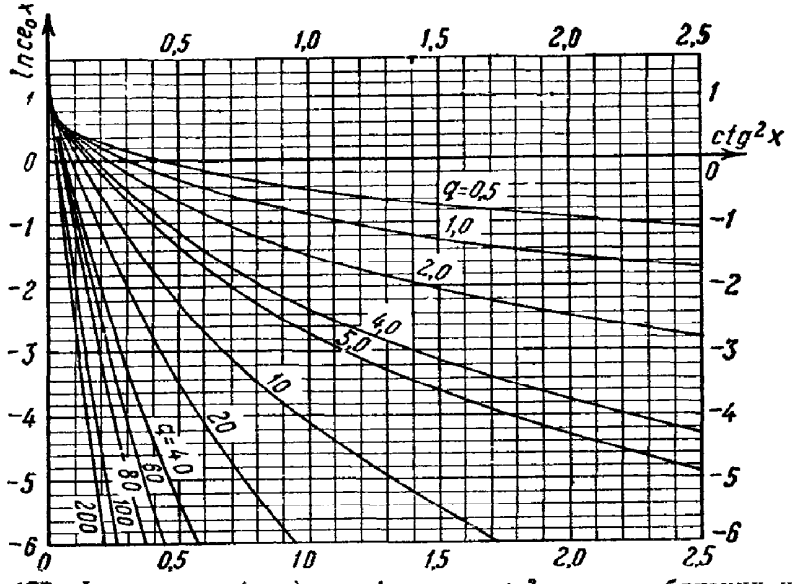


Рис. 177 Функция $ce_0(x, q)$ как функция $\operatorname{ctg}^2 x$ при x, близких к 90°.

Имеют место следующие соотношения (рис. 188):

$$ce_m(z) = ce_m(-z), \qquad se_m(z) = -se_m(-z),$$
$$ce_m(k\pi + z) = +ce_m(k\pi - z), \qquad se_m(k\pi + z) = -se_m(k\pi - z), \quad k \text{—целое},$$
$$ce_m(\pi/2 + z) = (-1)^m ce_m(\pi/2 - z), \qquad se_m(\pi/2 + z) = (-1)^{m+1} se_m(\pi/2 - z),$$
$$\psi_m(z + \pi) = (-1)^m \psi_m(z).$$

Следовательно, достаточно определить функции Матье в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \frac{\pi}{2}$.

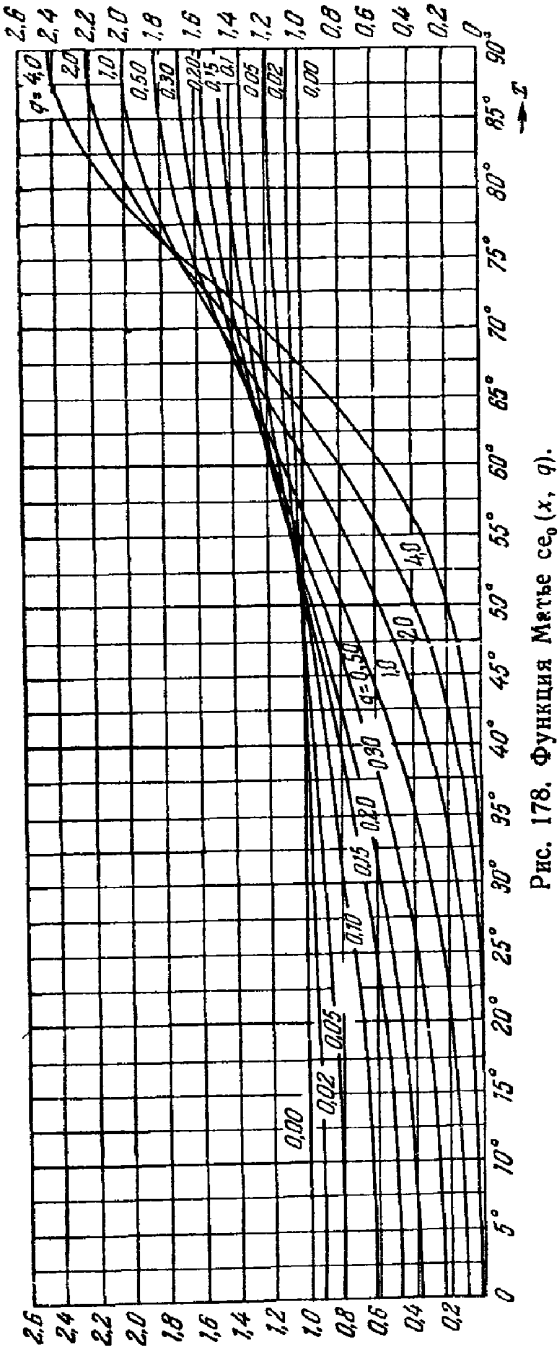


Рис. 178. Функция Матье $ce_0(x, q)$.

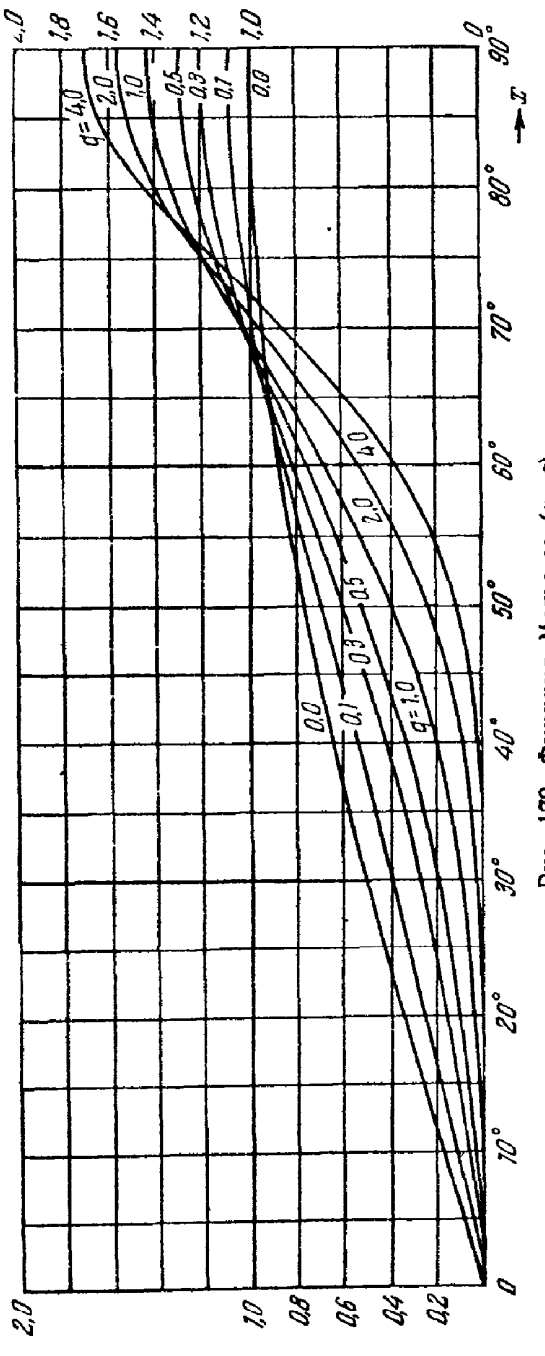


Рис. 179 Функция Матье $se_1(x, q)$.

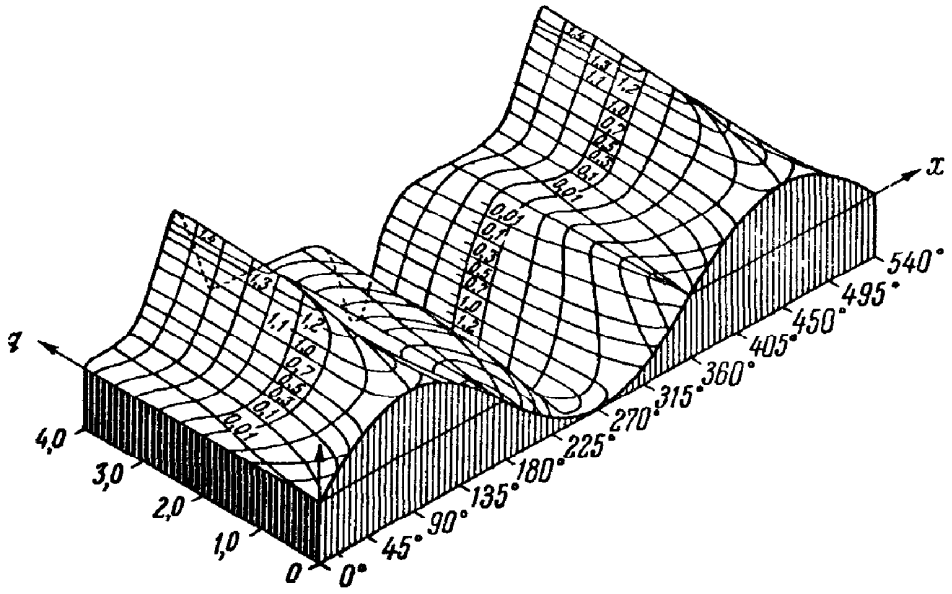


Рис. 180. Поверхность функции Матье $se_1(x, q)$ над плоскостью x, q.

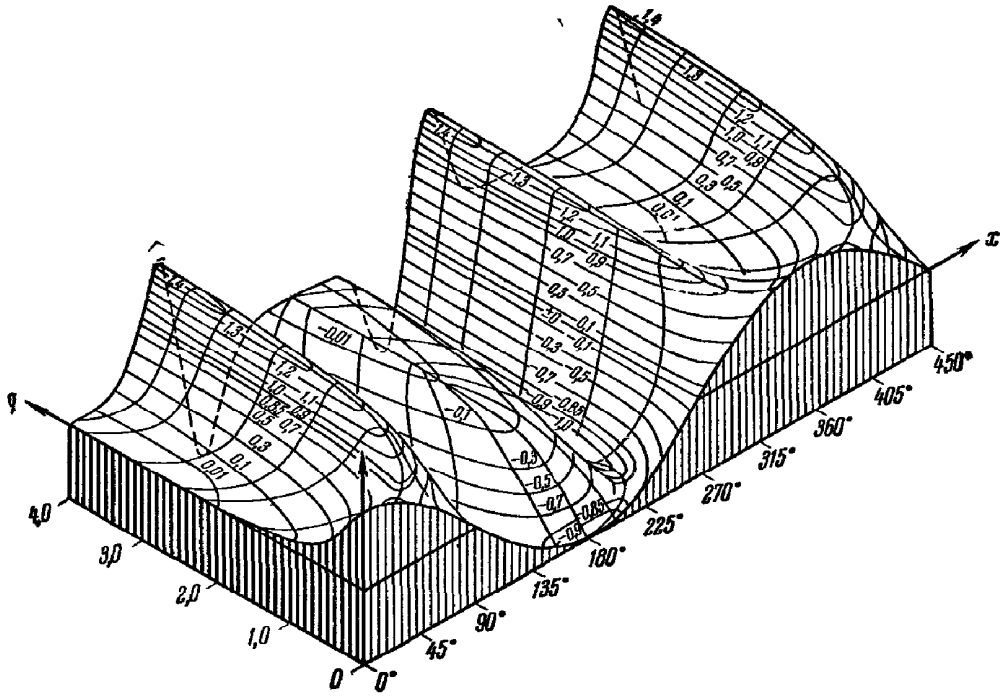


Рис. 181. Поверхность функции Матье $ce_1(x, q)$ над плоскостью x, q.

Нормировка функций производится таким образом, чтобы

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_m^2(x)\,dx = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad m = 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{если} \quad m = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

чтобы при $z = \frac{\pi}{2}$ следующие выражения были положительны:

$$(-1)^n ce_{2n}(z), \quad (-1)^n se_{2n+1}(z), \quad (-1)^n \frac{ce_{2n+1}(z)}{\cos z}, \quad (-1)^{n-1} \frac{se_{2n}(z)}{\cos z}.$$

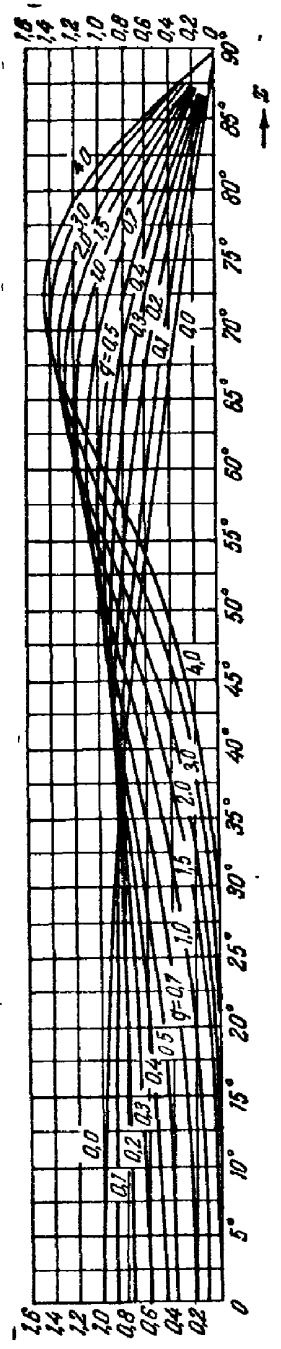


Рис. 182. Функция Матье $ce_1(x, q)$.

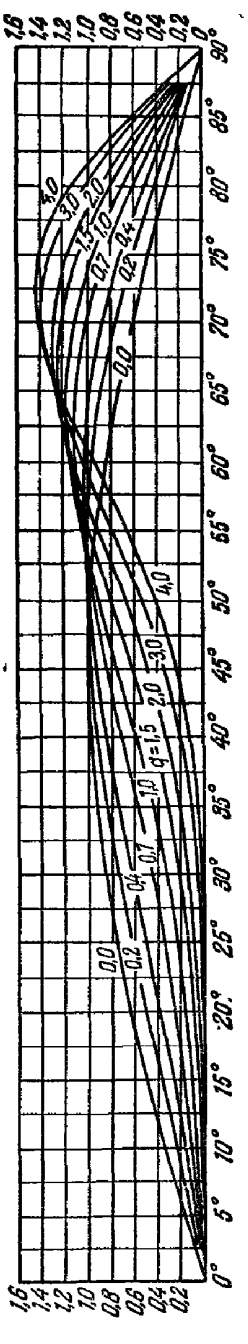


Рис. 183. Функция Матье $se_2(x, q)$

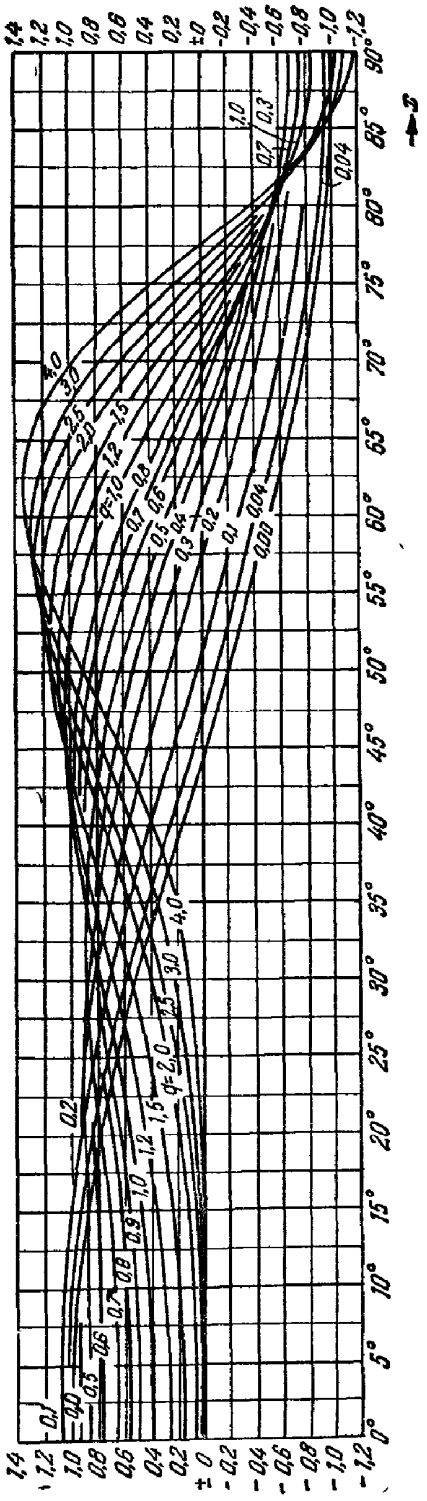


Рис. 184. Функция Матье $ce_3(x, q)$.

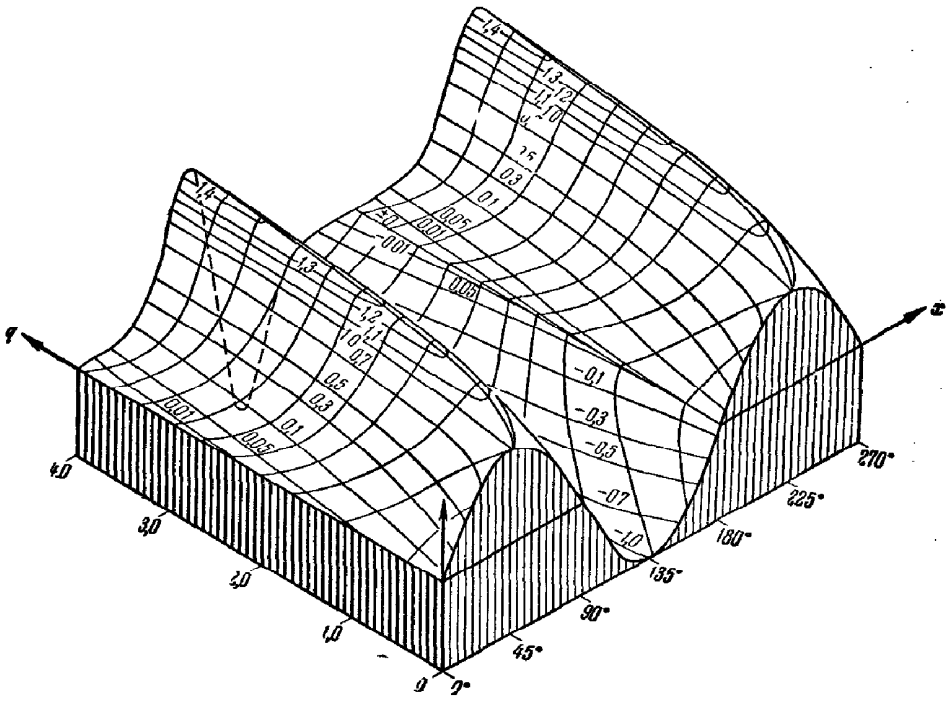


Рис 185 Поверхность функции Матье $se_2(x, q)$ над плоскостью x, q.

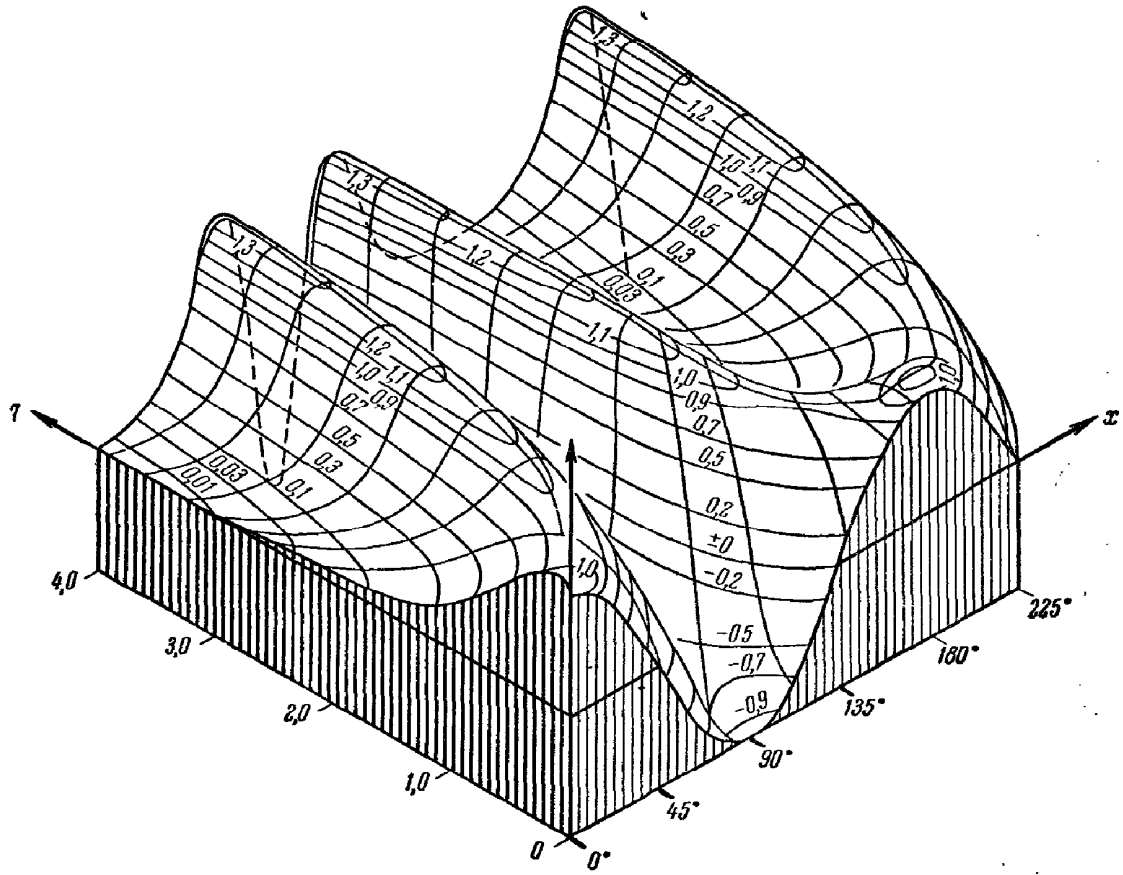


Рис. 186. Поверхность функции Матье $ce_2(x, q)$ над плоскостью x, q.

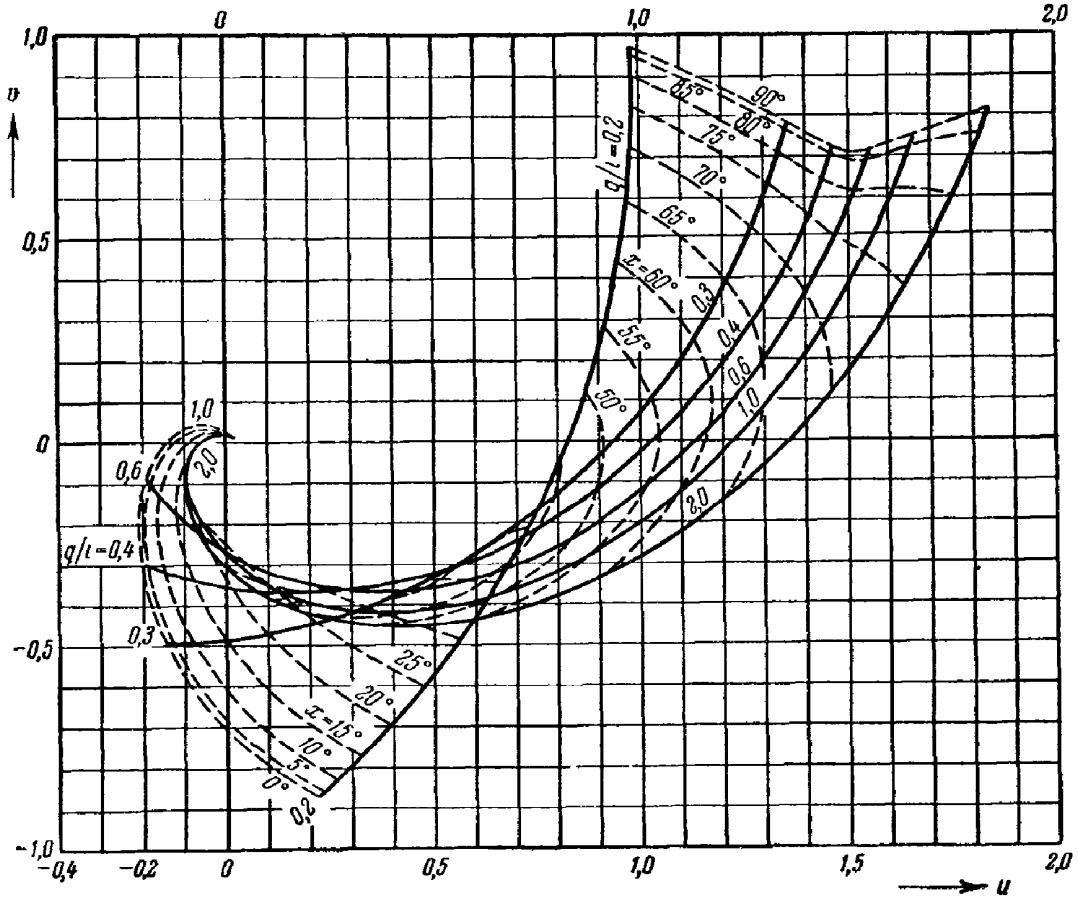


Рис. 187. Функция $ce_0(x, q) = u + iv$ при чисто мнимом q.

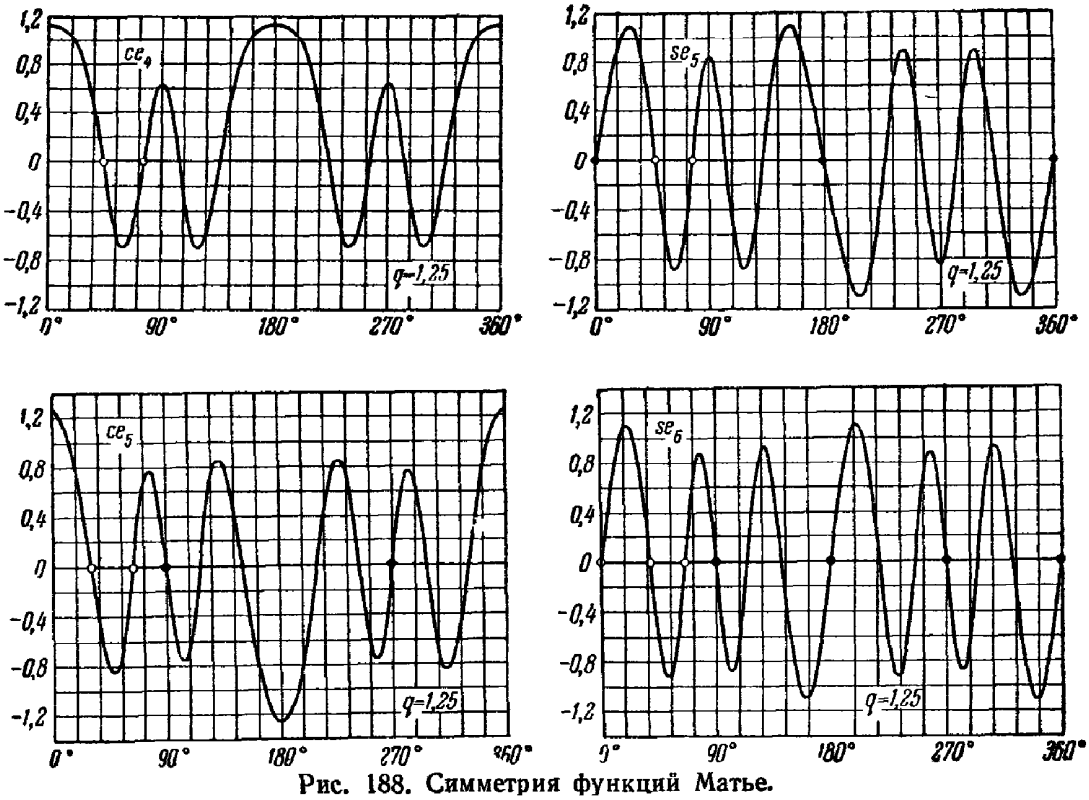


Рис. 188. Симметрия функций Матье.

На каждом действительном интервале длины 2π произведение двух различных функций Матье, соответствующих одному и тому же значению параметра q, имеет среднее значение нуль.

В предположениях, сделанных выше, при $q \to 0$ имеем:

$$4\alpha_m \to m^2, \quad 4\beta_m \to m^2 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$\mathrm{ce}_0(z, q) \to 1, \quad \mathrm{ce}_m(z, q) \to \cos mz, \quad \mathrm{se}_m(z, q) \to \sin mz \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

2. Представления для собственных значений

Если заменить z на $\pi/2 - z$ и q на $-q$, то дифференциальное уравнение Матье не изменится и для значения параметра $-q$ получаем решения:

$$\mathrm{ce}_{2n}(z, -q) = (-1)^n \mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right), \quad \mathrm{ce}_{2n+1}(z, -q) = (-1)^n \mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right),$$
$$\mathrm{se}_{2n}(z, -q) = (-1)^n \mathrm{se}_{2n}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right), \quad \mathrm{se}_{2n+1}(z, -q) = (-1)^n \mathrm{ce}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right).$$

Таким образом, достаточно вычислить функции для положительных значений q.

Представления для первых собственных значений при малых q таковы:

$$4\alpha_0 = -2^5 q^2 + 2^5 \cdot 7q^4 - 2^{10} \cdot \frac{29}{9} q^6 + \ldots, \quad 4\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1 \mp 8q - 8q^2 \pm 8q^3 - \frac{8}{3} q^4 \mp \ldots,$$
$$4\beta_2 = 4 - \frac{16}{3} q^2 + \frac{2^3 \cdot 5}{3^3} q^4 - \ldots, \quad 4\alpha_2 = 4 + \frac{80}{3} q^2 - \frac{2^3 \cdot 7}{3^3} \cdot 109 \cdot q^4 + \ldots,$$
$$4\frac{\beta_2}{\alpha_2} = 9 + 4q^2 \mp 8q^3 + \frac{13}{5} q^4 + \ldots,$$
$$4\beta_4 = 16 + \frac{2^5}{15} q^3 + \frac{2^4 \cdot 317}{3^3 \cdot 5^3} q^4 + \ldots, \quad 4\alpha_4 = 16 + \frac{2^5}{15} q^2 + \frac{2^4 \cdot 433}{3^3 \cdot 5^3} q^4 - \ldots$$

Если число $n = 2\nu - 1$ нечетно, то приближенные значения для собственных значений $\alpha_{\nu-1}$ и β_ν при больших q (для $q > n^2/8$) получают из выражений

$$\left.\begin{matrix} -\alpha_{\nu-1} \\ -\beta_\nu \end{matrix}\right\} \approx 4q - n\sqrt{2q} + \frac{n^2+1}{2^5} + \frac{n}{2^{10}} \frac{n^2+3}{\sqrt{2q}} + \frac{5n^4+34n^2+9}{2^{17}q} + n\frac{33n^4+410n^2+405}{2^{23}q\sqrt{2q}} +$$
$$+ \frac{63n^6+1260n^4+2943n^2+486}{2^{28}q^2} + n\frac{2108n^6+62\,468n^4+276\,004\,n^2+166\,428+\ldots}{2^{34}q^2\sqrt{2q}}$$

При больших положительных q четырем функциям

$$\mathrm{ce}_{2n-1}(z, q), \quad \mathrm{se}_{2n-1}(z, -q), \quad \mathrm{se}_{2n}(z, q), \quad \mathrm{se}_{2n}(z, -q)$$

принадлежит почти одно и то же значение α; это же утверждение справедливо для четырех функций

$$\mathrm{ce}_{2n}(z, q), \quad \mathrm{ce}_{2n}(z, -q), \quad \mathrm{se}_{2n+1}(z, q), \quad \mathrm{ce}_{2n+1}(z, -q).$$

Для функций ce_n и se_n имеется $\alpha = 0$ при следующих значениях q:

$n =$	0	1	2	n велико
$q \approx$	0,11	0,94	2,66	$0{,}109\,(2n+1)^2$

3. Разложение в ряды Фурье

Справедливы следующие разложения в ряды Фурье:

$$\mathrm{ce}_{2n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2n,2r} \cos 2rx, \quad \mathrm{ce}_{2n+1}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2n+1,\,2r+1} \cos(2r+1)x,$$
$$\mathrm{se}_{2n}(x) = \sum_{r=1}^{\infty} B_{2n,\,2r} \sin 2rx, \quad \mathrm{se}_{2n+1}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2n+1,\,2r+1} \sin(2r+1)x.$$

Ряды сходятся тем слабее, чем больше q. Для коэффициентов A, B справедливы следующие рекуррентные формулы:

a) для $\mathrm{ce}_{2n}(x)$:

$$-\alpha A_{2n,0}+2qA_{2n,2}=0,$$

$$4qA_{2n,0}+(1-\alpha)A_{2n,2}+2qA_{2n,4}=0,$$

$$2qA_{2n,2r-2}+(r^2-\alpha)A_{2n,2r}+2qA_{2n,2r+2}=0 \qquad (r>1);$$

b) для $\mathrm{se}_{2n}(x)$:

$$(1-\alpha)B_{2n,2}+2qB_{2n,4}=0,$$

$$2qB_{2n,2r-2}+(r^2-\alpha)B_{2n,2r}+2qB_{2n,2r+2}=0 \qquad (r>1);$$

c) для $\mathrm{ce}_{2n+1}(x)$:

$$2qA_{2n+1,1}+\left(\frac{1}{4}-\alpha\right)A_{2n+1,1}+2qA_{2n+1,3}=0,$$

$$2qA_{2n+1,2r-1}+\left[\left(r+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha\right]A_{2n+1,2r+1}+2qA_{2n+1,2r+3}=0 \qquad (r>0);$$

d) для $\mathrm{se}_{2n+1}(x)$:

$$-2qB_{2n+1,1}+\left(\frac{1}{4}-\alpha\right)B_{2n+1,1}+2qB_{2n+1,3}=0,$$

$$2qB_{2n+1,2r-1}+\left[\left(r+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha\right]B_{2n+1,2r+1}+2qB_{2n+1,2r+3}=0 \qquad (r>0).$$

Из условия нормировки следует при любом q, любом номере функции и любом первом индексе:

$$2A_0^2+A_2^2+A_4^2+\ldots=B_2^2+B_4^2+\ldots=A_1^2+A_3^2+\ldots=B_1^2+B_3^2+\ldots=1;$$

для $\mathrm{ce}_0(x)$ первая сумма равна 2.

4. Нули

$$\mathrm{ce}_0(x)>0;\ \mathrm{se}_{2n}k\frac{\pi}{2}=\mathrm{se}_{2n+1}k\pi=\mathrm{ce}_{2n+1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi=0 \qquad (k\text{—целое}).$$

Каждая из четырех функций

$$\mathrm{ce}_{2n}(x),\quad \mathrm{se}_{2n+1}(x),\quad \mathrm{ce}_{2n+1}(x),\quad \mathrm{se}_{2n+2}(x)$$

имеет n действительных нулей строго между $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$; эти нули приближаются к $\frac{\pi}{2}$ при возрастании q.

5. Функциональные уравнения. Присоединенные функции Матье

Функции Матье удовлетворяют интегральному уравнению

$$\varphi(z)=\lambda\int_{-\pi}^{+\pi}e^{4\sqrt{2q}\sin z\sin t}\varphi(t)\,dt.$$

Если в дифференциальном уравнении Матье сделать замену независимой переменной $t=t(z)$, то получим:

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2\frac{d^2w}{dt^2}+\frac{d^2t}{dz^2}\cdot\frac{dw}{dt}+4(\alpha-4q\cos 2z)w=0.$$

В частности,

$$t=\cos 2z: \qquad (1-t^2)\frac{d^2w}{dt^2}-t\frac{dw}{dt}+(\alpha-4qt)w=0,$$

$$t=e^{i2z}: \qquad t^2\frac{d^2w}{dt^2}+t\frac{dw}{dt}+\left[-\alpha+2q\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]w=0,$$

$$t=\cos^2 z: \qquad t(1-t)\frac{d^2w}{dt^2}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\frac{dw}{dt}+(\alpha+4q-8qt)w=0.$$

Если положить $t=\pm iz$, то функции

$$w=\varphi_m(\pm it,\ k)$$

будут решениями дифференциального уравнения

$$\frac{1}{4}\frac{d^2w}{dt^2}-(\alpha-4q\operatorname{ch}2t)w=0.$$

Полученные таким образом функции

$$\mathrm{Ce}_{2n}(z)=\mathrm{ce}_{2n}(iz),$$
$$\mathrm{Ce}_{2n+1}(z)=\mathrm{ce}_{2n+1}(iz),$$
$$\mathrm{Se}_{2n+1}(z)=-i\,\mathrm{se}_{2n+1}(iz),$$
$$\mathrm{Se}_{2n+2}(z)=-i\,\mathrm{se}_{2n+2}(iz)$$

называются *присоединенными функциями Матье*. Они действительны для действительных значений аргумента $z=x$.

О функциях Матье с чисто мнимым q см. рис. 189—191.

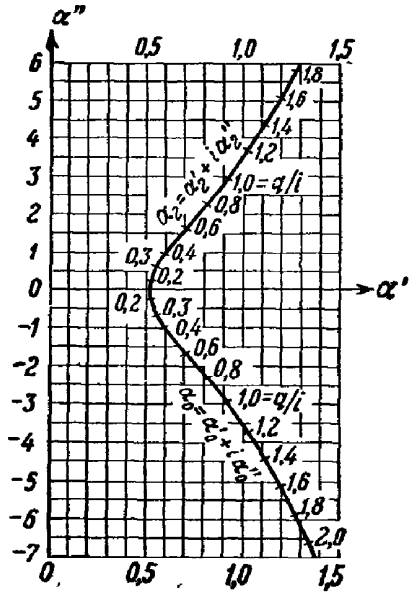
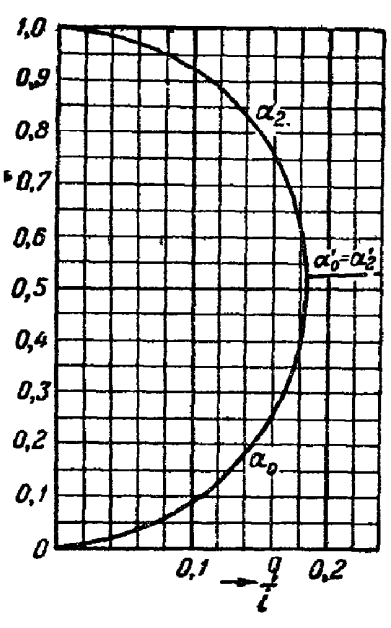


Рис. 189. Параметр $\alpha_n=\alpha'_n+\alpha''_n i$, $n=0$, 2, при q чисто мнимом.



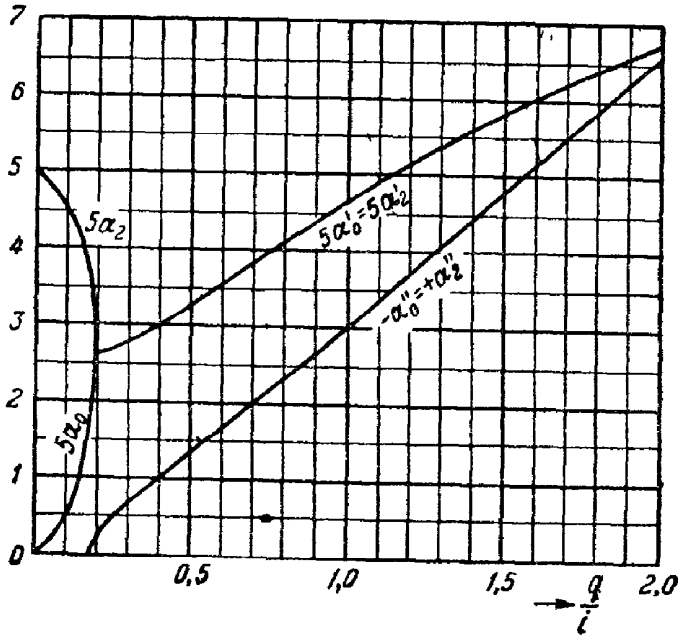


Рис. 190 и 191. Параметр $\alpha_n=\alpha'_n+\alpha''_n i$, $n=0$, 2, как функция $\frac{q}{i}$ при q чисто мнимом.

XV. КОНФЛЮЭНТНЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Функция $\Phi(a, c; z)$

Конфлюэнтными гипергеометрическими функциями называются решения *«конфлюэнтного дифференциального уравнения»* *)

$$z\frac{d^2w}{dz^2}+(c-z)\frac{dw}{dz}-aw=0,$$

где a и c — произвольные комплексные постоянные. Если $c\neq 0, -1, -2, \ldots$, то одним из решений является *функция Куммера* **)

$$\Phi(a, c; z)=1+\frac{a}{c}\frac{z}{1!}+\frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!}+\frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!}+\ldots$$

(Иногда ее обозначают через $M(a, c; z)$.) Если a, c фиксированы, то она является (однозначной) целой функцией z. Для действительных значений параметров a, c и для действительных значений аргумента $z=x$ она действительна (рис. 192—205).

При $0<\operatorname{Re} a<\operatorname{Re} c$ функция $\Phi(a, c; z)$ допускает интегральное представление

$$\Phi(a, c; z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 e^{zt}t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}dt;$$

кроме того, при $\operatorname{Re} a>0$, $\operatorname{Re} c>0$ справедливо представление через функции Бесселя $J_\nu(z)$:

$$\Phi\left(a, c; -\frac{1}{z}\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}z^a\int_0^{+\infty}e^{-zt}t^{a-\frac{c+1}{2}}J_{c-1}(2\sqrt{t})\,dt.$$

Асимптотическое поведение функции Куммера при $|z|\gg|a|$, $|z|\gg|c|$ описывается формулой

$$\Phi(a, c; z)\approx$$

$$\approx\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}\left\{1-\frac{a(a-c+1)}{z}+\frac{a(a+1)(a-c+1)(a-c+2)}{2!\,z^2}-\ldots\right\}+$$

$$+\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}e^z z^{a-c}\left\{1+\frac{(1-a)(c-a)}{z}+\frac{(1-a)(2-a)(c-a)(c-a+1)}{2!\,z^2}+\ldots\right\}$$

$$(-\pi<\arg z\leqslant\pi,\ -\pi<\arg(-z)\leqslant\pi).$$

---

*) Это уравнение называют иногда также *вырожденным гипергеометрическим уравнением.—Прим. ред.*

**) Иначе: *функция Похгаммера* или *вырожденная гипергеометрическая функция.— Прим. ред.*

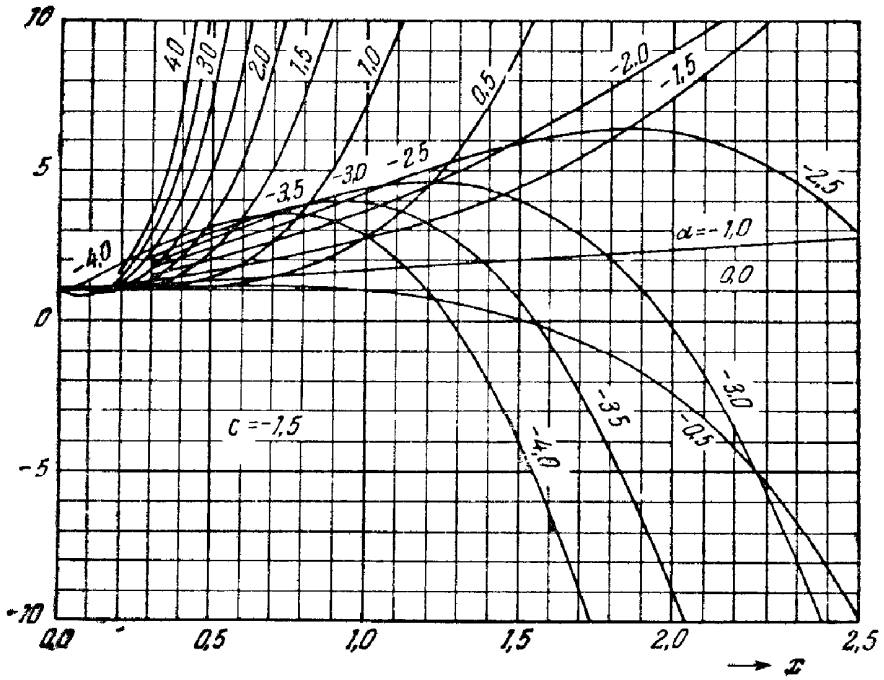


Рис. 192. Функция $\Phi(\alpha, -1{,}5; x)$.

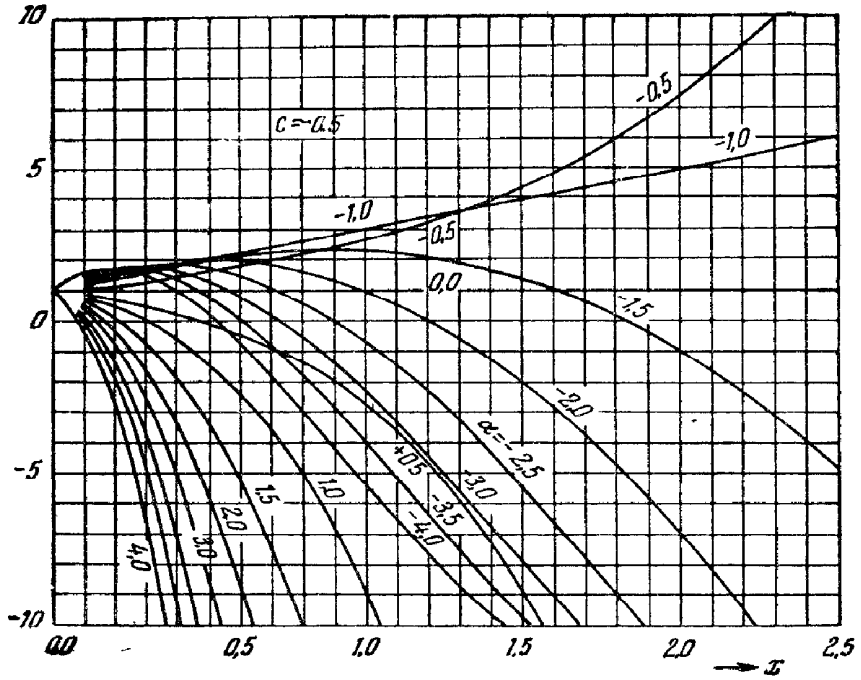
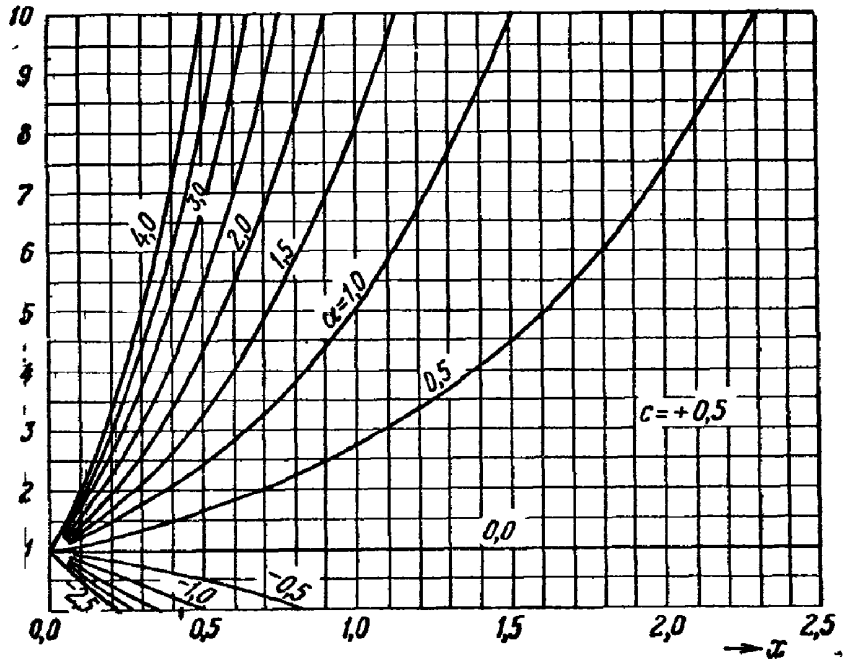


Рис. 193. Функция $(\alpha, -0{,}5; x)$.



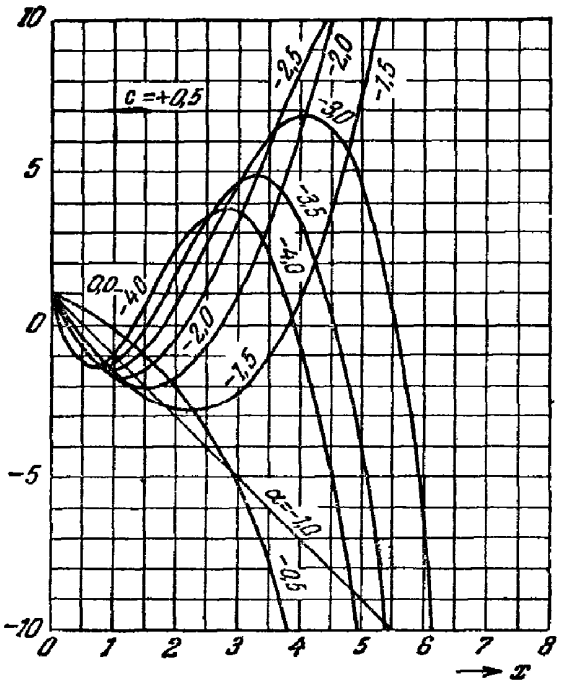
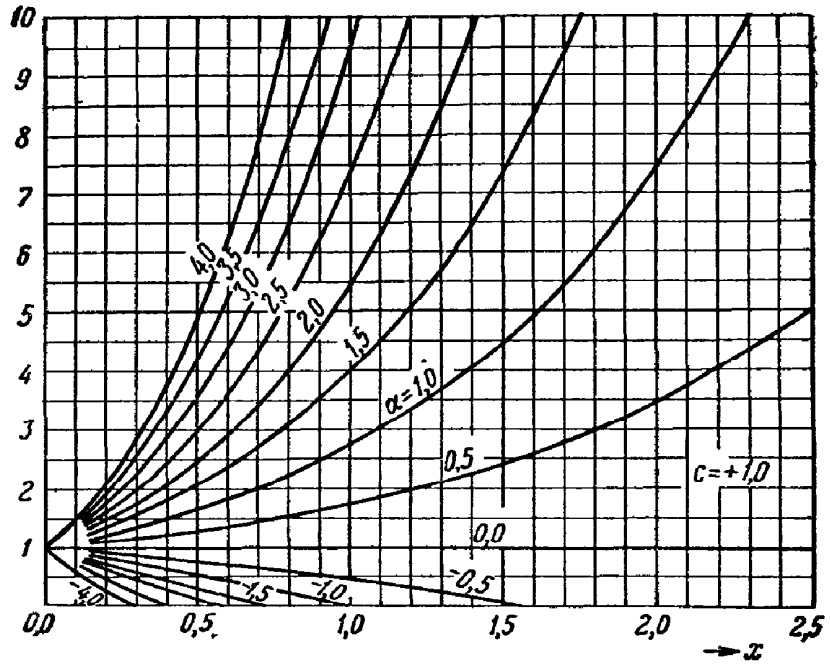


Рис. 194 и 195. Функция $\Phi(\alpha, +0{,}5, x)$.



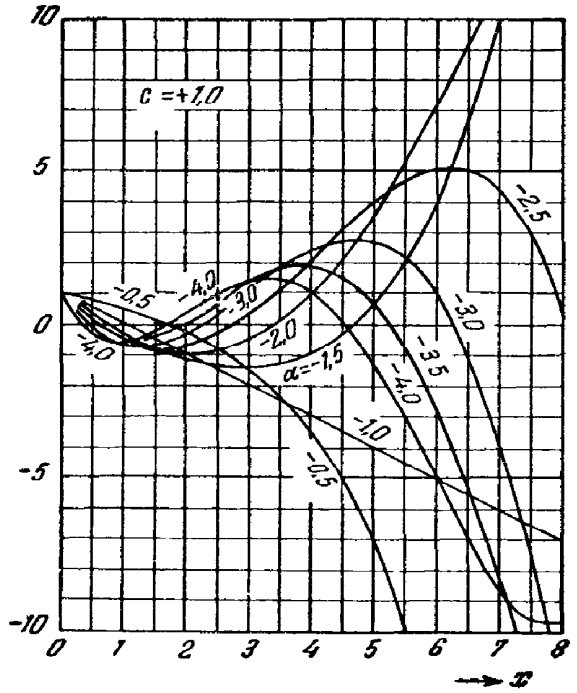
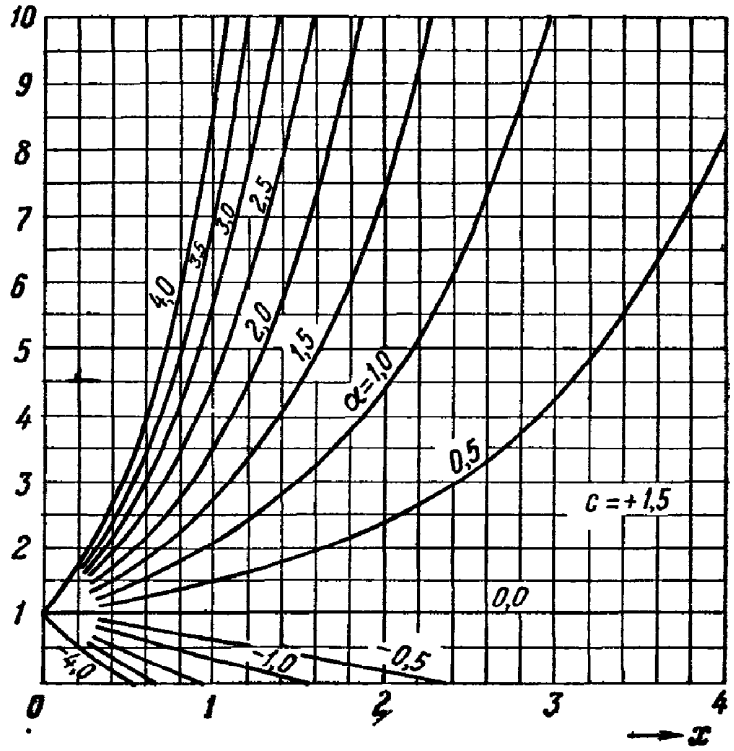


Рис. 196 и 197. Функция $\Phi(a, +1{,}0; x)$.



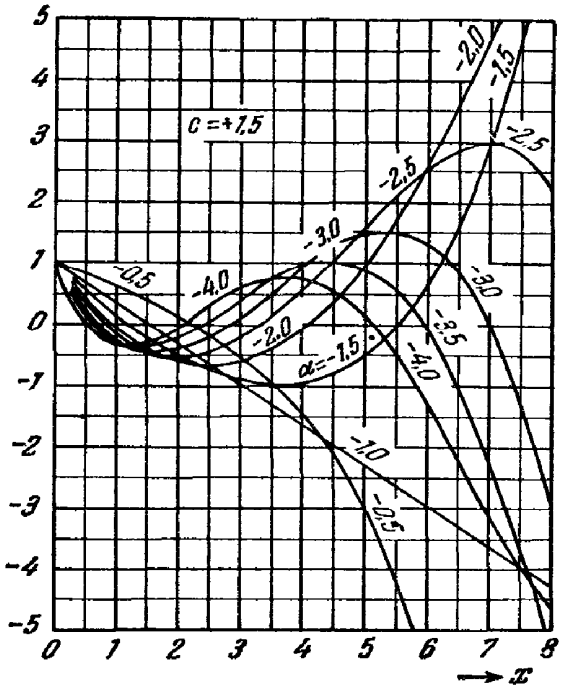
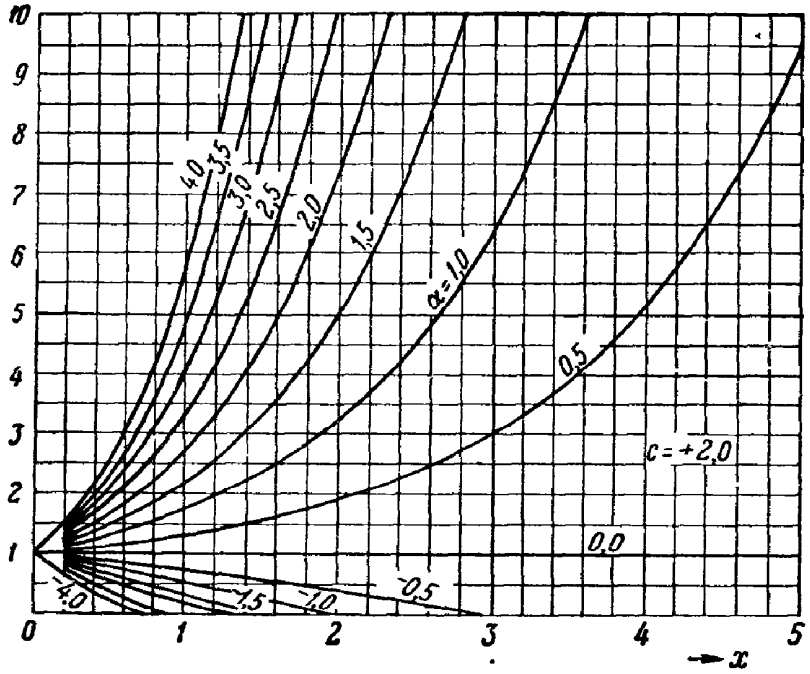


Рис. 198 и 199. Функция $\Phi(\alpha, +1{,}5; x)$.



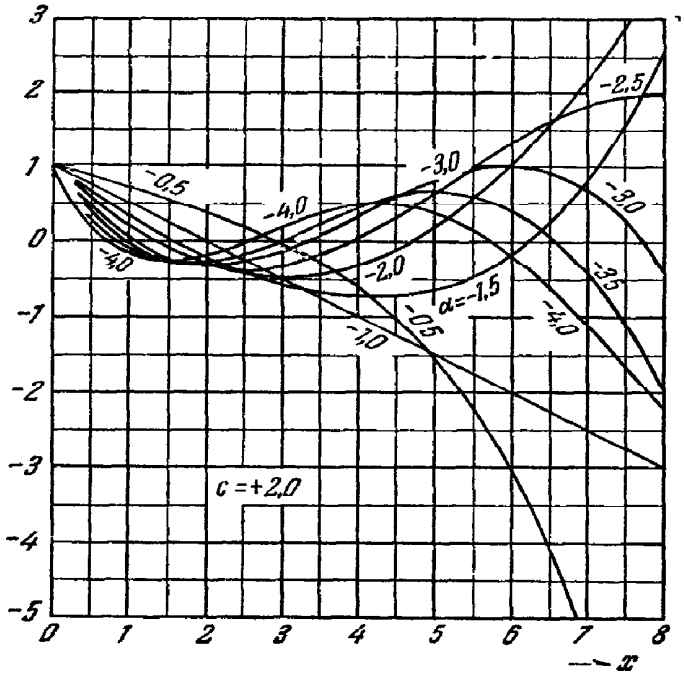
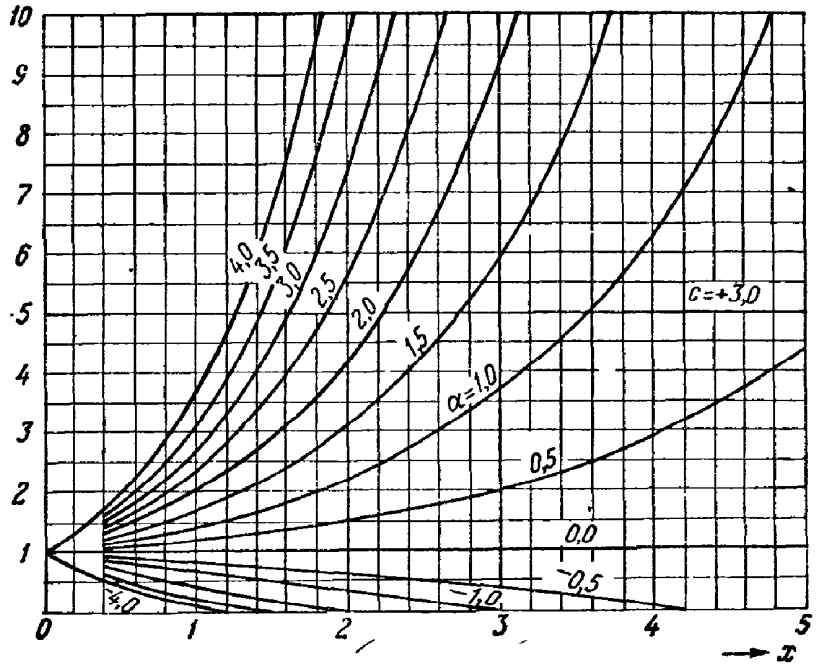


Рис. 200 и 201. Функция $\Phi(a, +2{,}0; x)$.



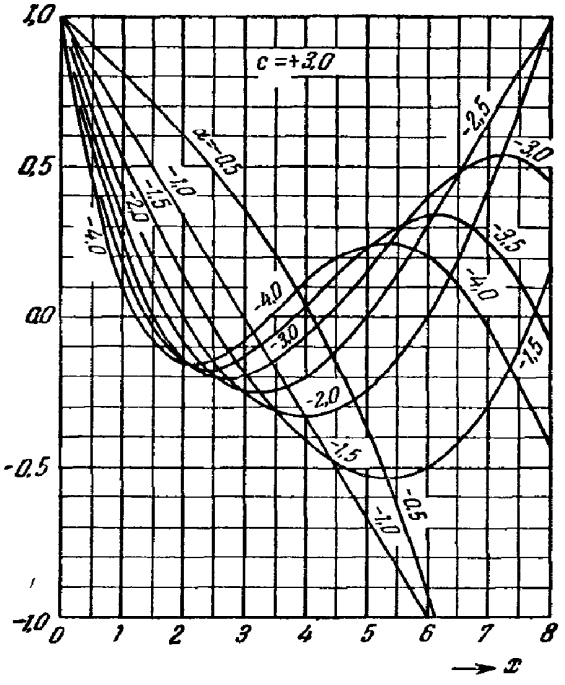


Рис. 202 и 203. Функция $\Phi(\alpha, +3{,}0; x)$.

Имеют место следующие формулы:

$$(c-a)\Phi(a-1, c; z)+(2a-c+z)\Phi(a, c; z)-a\Phi(a+1, c; z)=0,$$

$$c(a+z)\Phi(a, c; z)-(c-a)z\Phi(a, c+1; z)-ac\Phi(a+1, c; z)=0,$$

$$c\Phi(a, c; z)-c\Phi(a-1, c; z)-z\Phi(a, c+1; z)=0,$$

$$(a-1+z)\Phi(a, c; z)+(c-a)\Phi(a-1, c; z)-(c-1)\Phi(a, c-1; z)=0,$$

$$(a-c+1)\Phi(a, c; z)-a\Phi(a+1, c; z)+(c-1)\Phi(a, c-1; z)=0,$$

$$c(c-1)\Phi(a, c-1; z)-c(c-1+z)\Phi(a, c; z)+(c-a)z\Phi(a, c+1; z)=0.$$

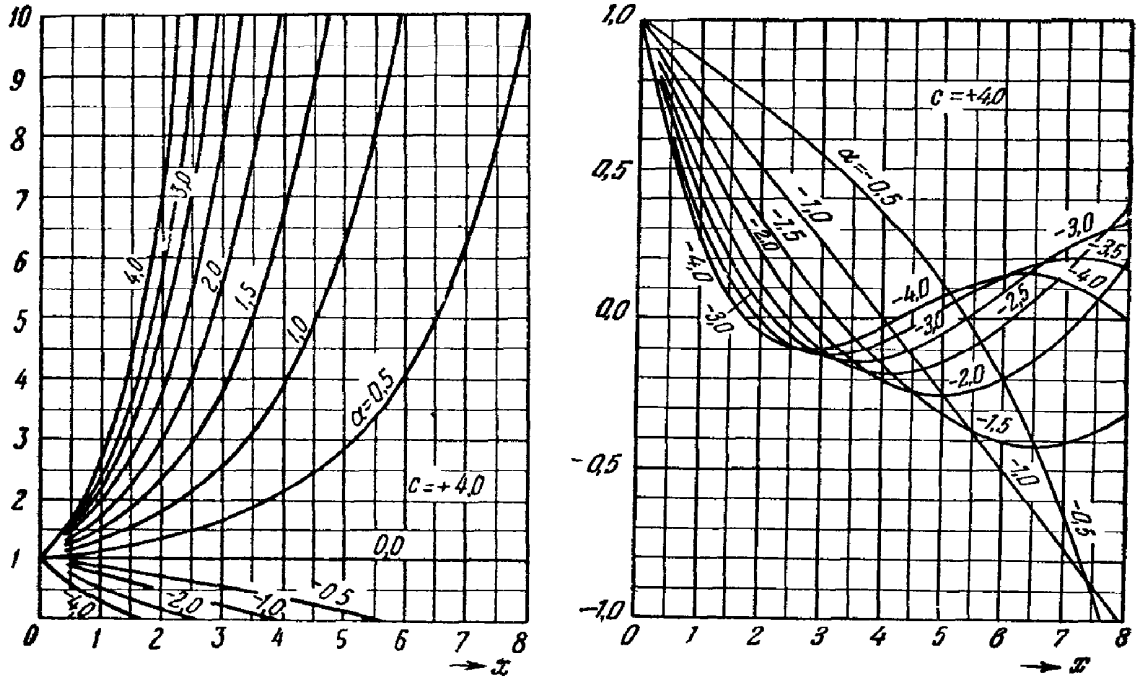


Рис. 204 и 205. Функция $\Phi(a, +4{,}0; x)$.

Правило дифференцирования функции $\Phi(a, c; z)$:

$$\frac{d^n\Phi}{dz^n}=\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)\Gamma(a)}\Phi(a+n, c+n; z).$$

Формула Куммера:

$$\Phi(a, c; z)=e^z\Phi(c-a, c; -z).$$

2. Функция $\Psi(a, c; z)$

Если c не есть целое число, то линейно независимым от $\Phi(a, c; z)$ решением конфлюэнтного дифференциального уравнения является функция

$$z^{1-c}\Phi(a-c+1, 2-c; z).$$

Вместо нее можно взять функцию

$$\Psi(a, c; z)=\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}\Phi(a, c; z)+\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}z^{1-c}\Phi(a-c+1, 2-c; z).$$

Эта последняя с помощью предельного перехода $\Psi(a, n; z)=\lim\limits_{c\to n}\Psi(a, c; z)$

может быть определена и для всех целых значений параметра c. Для $n=0, 1, 2, \ldots$ получим:

$$\Psi(a, n+1; z)=\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(a-n)\,n!}\left\{\Phi(a, n+1; z)\ln z+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\left[\psi(a+k)-\psi(1+k)-\psi(1+n+k)\right]\frac{z^k}{k!}\right\}+$$

$$+\frac{(n-1)!}{\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(a-n)(a-n+1)\ldots(a-n+k-1)}{(1-n)(2-n)\ldots(k-n)}\frac{z^{k+n}}{k!}$$

$\left(\psi(z)=\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right.$; в случае $n=0$ последняя сумма должна быть отброшена)

Если c не есть целое положительное число, то представление для $\Psi(a, c; z)$ можно получить из следующей формулы, которая справедлива при всех значениях c:

$$\Psi(a, c; z)=z^{1-c}\Psi(a-c+1, 2-c; z).$$

При a и c фиксированных $\Psi(a, c; z)$ является (в общем случае) бесконечнозначной аналитической функцией от z с единственной конечной точкой ветвления $z=0$. При положительных действительных значениях аргумента $z=x>0$ эта функция имеет действительную ветвь. При $\operatorname{Re} a>0$, $\operatorname{Re} c>0$ функция $\Psi(a, c; z)$ допускает интегральное представление

$$\Psi(a, c; z)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}e^{-zt}t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}\,dt.$$

Асимптотическое поведение функции $\Psi(a, c; z)$ при $|z|\gg|a|$, $|z|\gg|c|$ в области $-\dfrac{3\pi}{2}<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}$ дается формулой

$$\Psi(a, c; z)\approx z^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{c-a-1}{n}\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{z^n}.$$

Имеют место следующие рекуррентные формулы:

$$\Psi(a-1, c; z)-(2a-c+z)\Psi(a, c; z)+a(a-c+1)\Psi(a+1, c; z)=0.$$

$$(a+z)\Psi(a, c; z)+a(c-a-1)\Psi(a+1, c; z)-z\Psi(a, c+1; z)=0,$$

$$(c-a)\Psi(a, c; z)-z\Psi(a, c+1; z)+\Psi(a-1, c; z)=0,$$

$$(a-1+z)\Psi(a, c; z)-\Psi(a-1, c; z)+(a-c+1)\Psi(a, c-1; z)=0,$$

$$\Psi(a, c; z)-a\Psi(a+1, c; z)-\Psi(a, c-1; z)=0,$$

$$(c-a-1)\Psi(a, c-1; z)-(c-1+z)\Psi(a, c; z)+z\Psi(a, c+1; z)=0.$$

Правило дифференцирования функции $\Psi(a, c; z)$:

$$\frac{d^n\Psi}{dz^n}=(-1)^n\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}\Psi(a+n, c+n; z).$$

3. Функции $M_{\varkappa, \mu}(z)$ и $W_{\varkappa, \mu}(z)$

С помощью функций $\Phi(a, c; z)$ и $\Psi(a, c; z)$ можно получить такие интегралы конфлюэнтного дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{\Gamma(c)}\Phi(a, c; z),\qquad \frac{1}{\Gamma(2-c)}z^{1-c}\Phi(a-c+1, 2-c; z),\qquad \Psi(a, c; z),$$

$$e^z\Psi(c-a, c; -z)$$

(причем первые два имеют смысл также и при неположительном целом значении параметра c). Среди них всегда существуют пары независимых интегралов.

Для фундаментальной системы интегралов употребляют и другое представление, данное Э. Уиттекером и Дж. Ватсоном. После преобразования

$$\omega = e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{c}{2}} w, \qquad \varkappa = \frac{c}{2} - a, \qquad \mu = \frac{c-1}{2}$$

конфлюэнтное дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\varkappa}{z} + \frac{1-4\mu^2}{4z^2}\right)\omega = 0.$$

Решениями этого уравнения являются:

$$M_{\varkappa,\mu}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^{\mu+\frac{1}{2}} \Phi\left(\mu - \varkappa + \frac{1}{2},\ 2\mu+1;\ z\right),$$

$$W_{\varkappa,\mu}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^{\mu+\frac{1}{2}} \Psi\left(\mu - \varkappa + \frac{1}{2},\ 2\mu+1;\ z\right);$$

последняя функция называется *функцией Уиттекера*. Если 2μ не есть целое число, то обе функции связаны соотношением

$$W_{\varkappa,\mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - \varkappa\right)} M_{\varkappa,\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \varkappa\right)} M_{\varkappa,-\mu}(z).$$

Функции $M_{\varkappa,\mu}(z)$, $W_{\varkappa,\mu}(z)$ являются бесконечнозначными аналитическими функциями, которые имеют действительную ветвь при действительных положительных значениях аргумента.

4. Частные случаи

Конфлюэнтные гипергеометрические функции содержат как частные случаи: функции Бесселя при $c = 2a$, функции параболического цилиндра при $c = \frac{1}{2}$, неполные гамма-функции при $a = 1$ и полиномы Лагерра при $a = -n$.

XVI. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ФИЗИКИ

А. ФУНКЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ПЛАНКА

Тело, имеющее абсолютную температуру T, испускает электромагнитные волны со всевозможными длинами λ. Излучаемая при этом энергия распределяется весьма неравномерно по волнам различной длины.

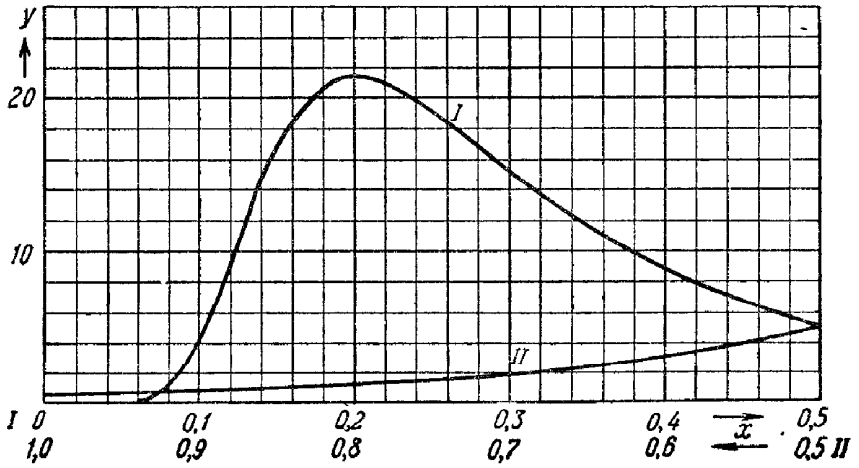


Рис. 206. Функция излучения Планка.

Волнам, длины которых заключены между λ и $\lambda + d\lambda$, соответствует плотность излучения $J\,d\lambda$. Тогда, согласно Планку,

$$J = hc^2 \lambda^{-5} \left(e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1\right)^{-1}.$$

Здесь c означает скорость света в пустоте, k — постоянную Больцмана, h — постоянную Планка. Если ввести два числа x и y, положив

$$\lambda = \frac{hc}{kT} x, \qquad J = \frac{k^5 T^5}{h^4 c^3} y,$$

то уравнение Планка принимает вид:

$$\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) x^5 y = 1.$$

Зависимость y от x называется *функцией излучения Планка* (рис. 206, таблица 68) Эта функция показывает, как при постоянной температуре плотность излучения зависит от длины волны.

Таблица 68. **Функция излучения Планка**

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0,060	0,07430	0,110	6,998	0,160	18,446	0,350	11,601	0,600	2,995
1	0,08990	1	7,259	1	18,589	55	11,279	05	2,922
2	0,10797	2	7,522	2	18,73	60	10,965	10	2,852
3	0,12875	3	7,787	3	18,86	65	10,658	15	2,783
4	0,15249	4	8,053	4	18,99	70	10,360	20	2,717
0,065	0,17946	0,115	8,320	0,165	19,12	0,375	10,069	0,625	2,653
6	0,2099	6	8,588	6	19,24	80	9,787	30	2,590
7	0,2441	7	8,856	7	19,36	85	9,512	35	2,529
8	0,2823	8	9,125	8	19,48	90	9,245	40	2,470
9	0,3248	9	9,393	9	19,59	95	8,985	45	2,412
0,070	0,3718	0,120	9,662	0,170	19,69	0,400	8,733	0,650	2,356
1	0,4235	1	9,931	2	19,89	05	8,488	55	2,302
2	0,4802	2	10,198	4	20,08	10	8,250	60	2,249
3	0,5422	3	10,465	6	20,25	15	8,020	65	2,198
4	0,6095	4	10,731	8	20,40	20	7,796	70	2,148
0,075	0,6825	0,125	10,996			0,425	7,578	0,675	2,099
6	0,7613	6	11,259	0,180	20,54	30	7,368	80	2,052
7	0,8460	7	11,521	5	20,82	35	7,163	85	2,006
8	0,9368	8	11,781	0,190	21,02	40	6,965	90	1,961
9	1,0339	9	12,040	5	21,15	45	6,773	95	1,918
0,080	1,1373	0,130	12,296	0,200	21,20	0,450	6,586	0,700	1,875
1	1,2471	1	12,550	05	21,18	55	6,406	05	1,8341
2	1,3635	2	12,801	10	21,11	60	6,231	10	1,7939
3	1,4864	3	13,050	15	20,99	65	6,061	15	1,7548
4	1,6160	4	13,296	20	20,82	70	5,896	20	1,7168
0,085	1,7521	0,135	13,540	0,225	20,61	0,475	5,736	0,725	1,6797
6	1,8948	6	13,780	30	20,36	80	5,582	30	1,6436
7	2,044	7	14,017	35	20,08	85	5,432	35	1,6085
8	2,200	8	14,251	40	19,78	90	5,286	40	1,5743
9	2,362	9	14,482	45	19,45	95	5,145	45	1,5409
0,090	2,531	0,140	14,710	0,250	19,10	0,500	5,009	0,750	1,5084
1	2,706	1	14,934	55	18,74	05	4,876	55	1,4768
2	2,887	2	15,154	60	18,372	10	4,748	60	1,4459
3	3,074	3	15,371	65	17,989	15	4,623	65	1,4158
4	3,267	4	15,584	70	17,600	20	4,502	70	1,3865
0,095	3,466	0,145	15,793	0,275	17,206	0,525	4,385	0,775	1,3580
6	3,671	6	15,998	80	16,809	30	4,271	80	1,3301
7	3,880	7	16,200	85	16,411	35	4,161	85	1,3029
8	4,095	8	16,397	90	16,013	40	4,054	90	1,2764
9	4,315	9	16,591	95	15,617	45	3,951	95	1,2506
0,100	4,540	0,150	16,780	0,300	15,224	0,550	3,850	0,800	1,2254
1	4,769	1	16,966	05	14,834	55	3,753	05	1,2009
2	5,003	2	17,147	10	14,449	60	3,658	10	1,1769
3	5,241	3	17,324	15	14,070	65	3,566	15	1,1535
4	5,482	4	17,497	20	13,696	70	3,477	20	1,1307
0,105	5,727	0,155	17,666	0,325	13,329	0,575	3,390	0,825	1,1084
6	5,976	6	17,830	30	12,968	80	3,307	30	1,0867
7	6,227	7	17,990	35	12,615	85	3,225	35	1,0655
8	6,481	8	18,146	40	12,270	90	3,146	40	1,0448
9	6,738	9	18,298	45	11,932	95	3,069	45	1,0246
0,110	6,998	0,160	18,446	0,350	11,601	0,600	2,995	0,850	1,0048

Продолжение табл. 68

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
	1,		0,		0,		0,1		0,0
0,850	0048	0,975	6344	1,20	3089	1 45	5711	1 70	8795
55	*9856	80	6235	1	3000	6	5325	1	8607
60	9667	85	6128	2	2914	7	4951	2	8424
65	9484	90	6023	3	2831	8	4588	3	8246
70	9304	95	5920	4	2751	9	4236	4	8073
0,875	9129	1,00	5820	1,25	2674	1 50	3895	1,75	7904
80	8958	1	5625	6	2599	1	3564	6	7740
85	8790	2	5438	7	2527	2	3242	7	7580
90	8627	3	5259	8	2458	3	2930	8	7424
95	8467	4	5087	9	2390	4	2627	9	7272
0,900	8311	1,05	4922	1 30	2326	1,55	2333	1,80	7124
05	8158	6	4764	1	2263	6	2047	1	6979
10	8009	7	4611	2	2202	7	1770	2	6838
15	7863	8	4465	3	2144	8	1500	3	6701
20	7721	9	4325	4	2087	9	1239	4	6567
0,925	7581	1,10	4190	1 35	2032	1 60	0984	1,85	6437
30	7445	1	4060	6	1979	1	0737	6	6309
35	7311	2	3935	7	1928	2	0496	7	6185
40	7181	3	3814	8	1878	3	0262	8	6064
45	7054	4	3699	9	18298	4	0035	9	5946
0,950	6929	1,15	3587	1 40	17831	1 65	*9814	1,90	5830
55	6807	6	3480	1	17380	6	9599	1	5718
60	6687	7	3377	2	16943	7	9389	2	5608
65	6571	8	3277	3	16519	8	9186	3	5501
70	6456	9	3181	4	16109	9	8988	4	5396
0,975	6344	1,20	3089	1,45	15711	1,70	8795	1,95	5294
	0,		0,		0,		0,0		0,0

B. ФУНКЦИЯ ЛАНЖЕВЕНА

Рассмотрим систему одинаковых молекулярных магнитных стрелок во внешнем магнитном поле. Если μ означает молекулярный магнитный момент, $\mathfrak{H}$ — напряженность магнитного поля и k — постоянную Больцмана, то поведение молекулярного магнетика при данной температуре T определяется средним моментом (*формула Ланжевена*):

$$\bar{\mu} = \mu\left(\operatorname{cth} x - \frac{1}{x}\right),$$

где $x = \frac{\mu\mathfrak{H}}{kT}$. Входящая сюда функция

$$L(x) = \operatorname{cth} x - \frac{1}{x}$$

называется *функцией Ланжевена* (таблица 69).

C. ФУНКЦИИ ПЛАНКА — ЭЙНШТЕЙНА И ДЕБАЯ

1. Функции Планка — Эйнштейна

Обозначим через $\Theta = \frac{h\nu}{k}$ характеристическую температуру для системы частиц, которые совершают свободные гармонические колебания с частотой ν (h — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана) Тогда характеризующие эту систему атомная теплоемкость C_v, отношение полной энергии $U - U_0$ к абсолютной температуре T, отношение свободной энергии $F - F_0$ к абсолютной температуре T и энтропия S могут быть представлены, согласно Планку и

Таблица 69. Функция Ланжевена

x	$L(x)$		x	$L(x)$		x	$L(x)$		x	$L(x)$		x	$L(x)$	
	0,			0,			0,			0,			0,	
0,00	000000	3333	1,00	3130	27,5	2,00	5373	17,5	4,0	7507	59	11,0	9091	7,8
02	006666	3333	02	3185	27,5	02	5408	17	1	7566	57	5	9130	7,4
04	013332	3331,5	04	3240	27	04	5442	17	2	7623	55	12,0	9167	6,6
06	019995	3330	06	3294	27	06	5476	17	3	7678	52	5	9200	6,2
08	026655	3328	08	3348	26,5	08	5510	16,5	4	7730	50	13,0	9231	5,6
0,10	03331	332 5	1,10	3401	26,5	2,10	5543	16,2	5	7780	48	5	9259	5,4
12	03996	332 5	12	3454	26 5	15	5624	15,8	6	7828	46	14,0	9286	4,8
14	04661	331 5	14	3507	26	20	5703	15,4	7	7874	44	5	9310	4,6
16	05324	331,5	16	3559	26	2,25	5780	15,0	8	7918	42	15,0	9333	4,4
18	05987	331	18	3611	25 5	30	5855	14,6	9	7960	41	5	9355	4,0
0,20	06649	330,5	1,20	3662	25,5	35	5928	14 2	5,0	8001	39	16,0	9375	3,8
22	07310	329 5	22	3713	25	40	5999	13 8	1	8040	38	5	9394	3,6
24	07969	329,5	24	3763	25	45	6068	13,4	2	8078	36	17,0	9412	3,4
26	08628	328,5	26	3813	25	2,50	6135	13,2	3	8114	35	5	9429	3,0
28	09285	328	28	3863	24 5	55	6201	12,8	4	8149	33	18,0	9444	3,0
0,30	09941	327	1,30	3912	24,5	60	6265	12,4	5	8182	33	19	9474	26
32	10595	326	32	3961	24,5	65	6327	12,0	6	8215	31	20	9500	24
34	11247	325	34	4010	24	70	6387	11,8	7	8246	30	21	9524	22
36	11897	324,5	36	4058	23,5	2,75	6446	11,4	8	8276	29	22	9546	19
38	12546	323 5	38	4105	23,5	80	6503	11 0	9	8305	28	23	9565	18
0,40	13193	322,5	1,40	4152	23,5	85	6558	10,8	6,0	8333	27	24	9583	17
42	13838	321 5	42	4199	23	90	6612	10,6	2	8387	25,5	25	9600	15
44	14481	320	44	4245	23	95	6665	10 2	4	8438	23,5	26	9615	15
46	15121	319	46	4291	22,5	3,00	6716	10 0	6	8485	22	27	9630	13
48	15759	318	48	4336	22,5	05	6766	9,8	8	8529	21	28	9643	12
0,50	16395	317	1,50	4381	22,5	10	6815	9 4	7,0	8571	20	30	9667	10,5
52	17029	315,5	52	4426	22	15	6862	9 2	2	8611	19	32	9688	9
54	17660	314	54	4470	22	20	6908	9,0	4	8649	17,5	34	9706	8
56	18288	312 5	56	4514	21,5	3,25	6953	8,8	6	8684	17	36	9722	7,5
58	18913	311,5	58	4557	21,5	30	6997	8,6	8	8718	16	38	9737	6,5
0,60	19536	310	1,60	4600	21	35	7040	8,2	8,0	8750	15 5	40	9750	6
62	20156	308 5	62	4642	21	40	7081	8,2	2	8781	14 5	42	9762	5,5
64	20773	307	64	4684	21	45	7122	7,8	4	8810	13 5	44	9773	5
66	21387	305	66	4726	20 5	3,50	7161	7,8	6	8837	13 5	46	9783	4,5
68	21997	304	68	4767	20 5	55	7200	7,4	8	8864	12,5	48	9792	4
0,70	22605	302 5	1,70	4808	20	60	7237	7,2	9,0	8889	12	50	9800	3,6
72	23210	300,5	72	4848	20	65	7273	7,2	2	8913	11,5	55	9818	3,0
74	23811	299	74	4888	20	70	7309	7,0	4	8936	11	60	9833	2,6
76	24409	297	76	4928	19,5	3,75	7344	6,8	6	8958	11	65	9846	2,2
78	25003	295,5	78	4967	19,5	80	7378	6,8	8	(990)	10	70	9857	2,0
0,80	25594	294	1,80	5006	19,5	85	7412	6,4	10,0	9000	10	75	9867	1,6
82	26182	292	82	5045	19	90	7444	6,4	2	9020	9,5	80	9875	1,4
84	26766	290	84	5083	19	95	7476	6,2	4	9039	9	90	9889	1,1
86	27346	288 5	86	5121	18,5	4,00	7507		6	9057	8,5	100	9900	
88	27923	286,5	88	5158	18,5		0,		8	9074	8,5		0,	
0,90	28496	284,5	1,90	5195	18				11,0	9091				
92	29065	282,5	92	5231	18					0,				
94	29630	281	94	5267	18									
96	30192	279	96	5303	17,5									
98	30750	277	98	5338	17,5									
1,00	31304		2,00	5373										
	0,			0,										

Таблица 70. Функции Планка — Эйнштейна C_v и $\frac{U-U_0}{T}$

Θ/T	C_v	$\frac{U-U_0}{T}$	Θ/T	C_v	$\frac{U-U_0}{T}$	Θ/T	C_v	$\frac{U-U_0}{T}$
	1,	1,		0,	0,0		0,00	0,00
0,0	987	987	5,0	339	674	10,0	90	09
1	985	889	1	319	622	1	83	08
2	980	795	2	300	573	2	77	08
3	972	704	3	281	528	3	71	07
4	961	616	4	264	487	4	65	06
0,5	946	531	5,5	248	448	10,5	60	06
6	928	450	6	232	413	6	56	05
7	908	372	7	217	380	7	51	05
8	884	297	8	204	350	8	47	04
9	858	225	9	191	322	9	44	04
1,0	829	156	6,0	178	296	11,0	40	04
1	798	091	1	167	272	1	37	03
2	765	028	2	156	251	2	34	03
3	729	*968	3	145	230	3	31	03
4	692	911	4	136	212	4	29	03
1,5	653	856	6,5	127	194	11,5	27	02
6	612	804	6	118	179	6	25	02
7	570	755	7	110	164	7	23	02
8	527	708	8	103	151	8	21	02
9	483	664	9	096	138	9	19	02
2,0	439	622	7,0	0889	127	12,0	18	01
1	393	582	1	0828	116	1	16	0,00
2	348	545	2	0770	107	2	15	
3	302	509	3	0716	098	3	14	
4	256	476	4	0666	090	4	13	
2,5	210	444	7,5	0619	082	12,5	12	
6	164	414	6	0575	076	6	11	
7	119	387	7	0534	069	7	10	
8	074	360	8	0496	064	8	09	
9	030	336	9	0460	058	9	08	
3,0	*986	312	8,0	0427	053	13,0	08	
1	943	291	1	0396	049	1	07	
2	901	270	2	0367	045	2	06	
3	860	251	3	0340	041	3	06	
4	820	233	4	0315	038	4	05	
3,5	782	217	8,5	0292	034	13,5	05	
6	744	201	6	0271	031	6	05	
7	707	186	7	0251	029	7	04	
8	672	173	8	0232	026	8	04	
9	637	160	9	0215	024	9	04	
4,0	604	148	9,0	0199	022	14,0	03	
1	572	137	1	0184	020	1	03	
2	542	127	2	0170	018	2	03	
3	512	118	3	0157	017	3	03	
4	484	109	4	0145	015	4	02	
4,5	457	1004	9,5	0134	014	14,5	02	
6	431	0928	6	0124	013	6	02	
7	407	0857	7	0115	012	7	02	
8	383	0791	8	0106	011	8	02	
9	361	0730	9	0098	010	9	01	
5,0	339	0674	10,0	0090	009	15,0	01	
	0,	0,		0,	0,0		0,00	

Эйнштейну, как универсальные функции от Θ/T. Для случая колебания частиц с одной степенью свободы эти функции имеют вид

$$C_v = R x^2 e^x (e^x - 1)^{-2},$$

$$\frac{U-U_0}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T C_v\, dT = Rx(e^x-1)^{-1},$$

$$\frac{F-F_0}{T}=\frac{1}{T}\int_0^T C_v\,dT-\int_0^T\frac{C_v}{T}\,dT=R\ln(1-e^{-x}),$$

$$S=\int_0^T\frac{C_v}{T}\,dT=\frac{U-U_0}{T}-\frac{F-F_0}{T},$$

где $x=\frac{\Theta}{T}$.

Таблицы 70 и 71 дают значения этих функций в *кал/град·мол*; для газовой постоянной взято значение $R=1{,}987$ *кал/град·мол*.

Асимптотическое поведение функций Планка — Эйнштейна при $x\gg 1$ описывается формулами:

$$C_v=Rx^2e^{-x},\qquad\frac{U-U_0}{T}\approx Rxe^{-x},\qquad-\frac{F-F_0}{T}\approx Re^{-x},\qquad S\approx R(1+x)e^{-x}.$$

Таблица 71. **Функции Планка — Эйнштейна** $-\frac{F-F}{T}$ **и** S

Θ/T	$-\frac{F-F_0}{T}$	S	Θ/T	$-\frac{F-F_0}{T}$	S	Θ/T	$-\frac{F-F_0}{T}$	S
				0,	0,		0,0	0,0
0,0	∞	∞	2,5	170	614	5,0	13	81
1	4,674	6,563	6	153	568	1	12	74
2	3,393	5,188	7	138	525	2	11	68
3	2,683	4,387	8	125	485	3	10	63
4	2,205	3,821	9	112	448	4	09	58
0,5	1,853	3,385	3,0	101	414	5,5	08	53
6	1,581	3,032	1	092	382	6	07	49
7	1,364	2,736	2	083	353	7	07	45
8	1,185	2,483	3	075	326	8	06	41
9	1,037	2,262	4	067	301	9	05	38
1,0	0,911	2,068	3,5	061	277	6,0	05	35
1	0,804	1,895	6	055	256	1	04	32
2	0,712	1,740	7	050	236	2	04	29
3	0,632	1,600	8	045	218	3	04	27
4	0,563	1,473	9	041	201	4	03	24
1,5	0,502	1,358	4,0	037	185	6,5	03	22
6	0,448	1,252	1	033	170	6	03	21
7	0,401	1,156	2	029	157	7	02	19
8	0,359	1,067	3	027	145	8	02	17
9	0,322	0,986	4	025	133	9	02	16
2,0	0,289	0,911	4,5	022	123	7,0	02	15
1	0,260	0,842	6	020	113		0,0	0,0
2	0,233	0,778	7	018	104			
3	0,210	0,719	8	016	096			
4	0,189	0,665	9	015	088			
2,5	0,170	0,614	5,0	013	081			
				0,	0,			

2. Функции Дебая

Если колеблющиеся частицы взаимодействуют друг с другом (случай твердого тела), то вместо фиксированной частоты ν получается спектр частот. В этом случае тоже можно ввести понятие характеристической температуры Θ так, чтобы атомная теплоемкость C_v и другие указанные выше величины являлись универсальными функциями от Θ/T. Если определить функцию

$$D(x)=\frac{3}{x^3}\int_0^x\frac{\xi^3}{e^{\xi}-1}\,d\xi,$$

Таблица 72. **Функции Дебая** C_v **и** $\frac{U-U_0}{T}$

Θ/T	C_v	$\frac{U-U_0}{T}$	Θ/T	C_v	$\frac{U-U_0}{T}$	Θ/T	C_v	$\frac{U-U_0}{T}$
					0,		0,	0,1
0,0	5 961	5,9610	5,0	2,197	7010	10,0	4520	150
1	5,958	5,7404	1	2,128	6718	1	4394	117
2	5,949	5,5258	2	2,060	6439	2	4273	085
3	5,934	5,3172	3	1,994	6173	3	4157	055
4	5,914	5,1144	4	1,930	5919	4	4044	025
0,5	5,887	4,9176	5,5	1,867	5677	10,5	3935	*9966
6	5,855	4,7266	6	1,807	5447	6	3829	9691
7	5,817	4 5414	7	1,748	5226	7	3727	9426
8	5,775	4,3620	8	1,692	5016	8	3629	9170
9	5,726	4,1883	9	1,637	4816	9	3533	8924
1,0	5,673	4,0202	6,0	1,584	4625	11 0	3441	8685
1	5,615	3,8576	1	1,532	4442	1	3352	8456
2	5,553	3,7006	2	1,482	4268	2	3266	8234
3	5,486	3,5489	3	1,433	4102	3	3183	8019
4	5,415	3,4025	4	1,387	3943	4	3102	7812
1,5	5,341	3,2613	6,5	1,342	3791	11,5	3024	7612
6	5 263	3,1252	6	1,298	3647	6	2948	7419
7	5,181	2,9941	7	1,256	3509	7	2875	7232
8	5,097	2,8679	8	1,215	3377	8	2804	7051
9	5,010	2,7464	9	1,176	3250	9	2736	6876
2,0	4 920	2,6296	7,0	1,138	3130	12,0	2669	6706
1	4 829	2,5173	1	1,101	3015	1	2605	6542
2	4,735	2,4094	2	1,066	2905	2	2543	6384
3	4,640	2,3058	3	1,031	2799	3	2482	6230
4	4,544	2,2064	4	0,9985	2699	4	2423	6081
2,5	4,446	2,1110	7,5	0,9667	2602	12,5	2367	5937
6	4,348	2,0195	6	0 9360	2510	6	2312	5798
7	4,249	1,9319	7	0,9064	2422	7	2258	5662
8	4,149	1,8479	8	0,8778	2338	8	2206	5531
9	4,050	1,7674	9	0,8503	2257	9	2156	5404
3,0	3,951	1,6904	8,0	0,8237	2179	13,0	2107	5281
1	3,852	1,6167	1	0,7981	2105	1	2060	5161
2	3,753	1,5462	2	0,7734	2034	2	2014	5045
3	3,655	1,4787	3	0,7496	1966	3	1969	4932
4	3 558	1,4143	4	0,7266	1901	4	1926	4823
3,5	3,462	1,3526	8,5	0,7044	1838	13,5	1883	4717
6	3 366	1,2937	6	0,6830	1778	6	1843	4614
7	3 272	1,2374	7	0,6624	1721	7	1803	4514
8	3 180	1,1837	8	0 6425	1666	8	1764	4417
9	3 088	1,1323	9	0,6234	1613	9	1727	4322
4,0	2 999	1,0833	9,0	0,6048	1562	14,0	1690	4230
1	2 911	1,0365	1	0,5870	1513	1	1655	4141
2	2 824	0,9919	2	0,5698	1466	2	1620	4054
3	2 739	0,9493	3	0,5532	1421	3	1586	3970
4	2,656	0,9086	4	0,5371	1378	4	1554	3888
4 5	2 575	0,8698	9,5	0,5216	1336	14,5	1522	3808
6	2,496	0,8328	6	0,5067	1296	6	1491	3731
7	2,420	0,7978	7	0,4923	1257	7	1461	3655
8	2,343	0,7638	8	0,4784	1220	8	1432	3581
9	2,269	0,7316	9	0,4649	1185	9	1403	3510
5,0	2,197	0,7010	10,0	0,4520	1150	15,0	1375	3440
					0,		0,	0,0

Таблица 73. Функции Дебая $-\frac{F-F_0}{T}$ и S

Θ/T	$-\frac{F-F_0}{T}$	S	Θ/T	$-\frac{F-F_0}{T}$	S	Θ/T	$-\frac{F-F_0}{T}$	S
				0,	0,		0,0	0,1
0,0	∞	∞	5,0	2740	9750	10,0	386	536
1	15,935	21,675	1	2604	9321	1	375	492
2	12,022	17,548	2	2476	8915	2	364	449
3	9,821	15,138	3	2356	8529	3	354	408
4	8,319	13,434	4	2243	8162	4	343	369
0,5	7,199	12,117	5,5	2137	7814	10,5	334	330
6	6,320	11,046	6	2036	7483	6	325	294
7	5,605	10,147	7	1942	7168	7	316	258
8	5,010	9,372	8	1853	6869	8	307	224
9	4,507	8,695	9	1769	6585	9	299	191
1,0	4,074	8,094	6,0	1689	6314	11,0	291	159
1	3,699	7,556	1	1615	6057	1	283	128
2	3,370	7,070	2	1544	5812	2	275	099
3	3,080	6,629	3	1477	5578	3	268	070
4	2,822	6,225	4	1413	5356	4	261	042
1,5	2,592	5,853	6,5	1354	5145	11,5	254	016
6	2,386	5,511	6	1297	4943	6	248	990
7	2,201	5,195	7	1243	4751	7	242	965
8	2,033	4,901	8	1192	4568	8	235	941
9	1,881	4,628	9	1144	4394	9	230	917
2,0	1,7433	4,373	7,0	1098	4228	12,0	224	895
1	1,6178	4,135	1	1054	4069	1	218	873
2	1,5032	3,913	2	1013	3917	2	213	851
3	1,3984	3,704	3	0973	3773	3	208	831
4	1,3024	3,509	4	0936	3635	4	203	811
2,5	1,2142	3,325	7,5	0900	3503	12,5	198	792
6	1,1332	3,153	6	0867	3377	6	193	773
7	1,0587	2,991	7	0834	3256	7	189	755
8	0,9899	2,838	8	0804	3141	8	185	738
9	0,9265	2,694	9	0774	3031	9	180	721
3,0	0,8679	2,558	8,0	0746	2926	13,0	176	704
1	0,8137	2,430	1	0720	2825	1	172	688
2	0,7635	2,310	2	0694	2729	2	168	673
3	0,7169	2,196	3	0670	2636	3	165	658
4	0,6738	2,088	4	0647	2548	4	161	643
3,5	0,6337	1,986	8,5	0625	2463	13,5	157	629
6	0,5964	1,890	6	0604	2382	6	154	615
7	0,5617	1,799	7	0584	2304	7	151	602
8	0,5294	1,713	8	0564	2230	8	147	589
9	0,4993	1,632	9	0546	2158	9	144	576
4,0	0,4713	1,5546	9,0	0528	2090	14,0	141	564
1	0,4451	1,4817	1	0511	2024	1	138	552
2	0,4207	1,4126	2	0495	1961	2	135	541
3	0,3979	1,3471	3	0479	1900	3	132	529
4	0,3765	1,2851	4	0464	1842	4	130	518
4,5	0,3565	1,2263	9,5	0450	1786	14,5	127	508
6	0,3378	1,1706	6	0436	1732	6	124	497
7	0,3204	1,1183	7	0423	1680	7	122	487
8	0,3039	1,0676	8	0410	1630	8	119	478
9	0,2884	1,0201	9	0398	1582	9	117	468
5,0	0,2740	0,9750	10,0	0386	1536	15,0	115	459
				0,	0,		0,0	0,0

то, согласно Дебаю, для случая колебаний частиц с тремя степенями свободы имеем:

$$C_v = 3R\,[4D(x) - 3x\,(e^x - 1)^{-1}], \quad \text{где} \quad x = \frac{\Theta}{T}.$$

Далее, так же как и выше, можно получить выражения для $\frac{U-U_0}{T}$, $\frac{F-F_0}{T}$ и S; в частности:

$$\frac{U-U_0}{T} = 3RD(x).$$

Таблицы 72 и 73 дают значения этих функций в *кал/град·мол*; для газовой постоянной взято значение $R = 1{,}987$ *кал/град·мол*.

Асимптотическое поведение функций Дебая при $x \gg 1$ описывается формулами:

$$C_v \approx \frac{12\pi^4}{5} Rx^3, \quad \frac{U-U_0}{T} \approx \frac{3\pi^4}{5} Rx^3, \quad -\frac{F-F_0}{T} \approx \frac{\pi^4}{5} Rx^3, \quad S \approx \frac{4\pi^4}{5} Rx^3.$$

D. ФУНКЦИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА ОТ ИСТОЧНИКОВ

Пусть в бесконечном однородном не движущемся теле помещен в начальный момент источник тепла в виде точки ($n = 3$), бесконечной прямой ($n = 2$, или плоскости ($n = 1$). Никаких других источников тепла в этот и в последующие моменты времени нет. Пусть соответствующий интеграл от температуры

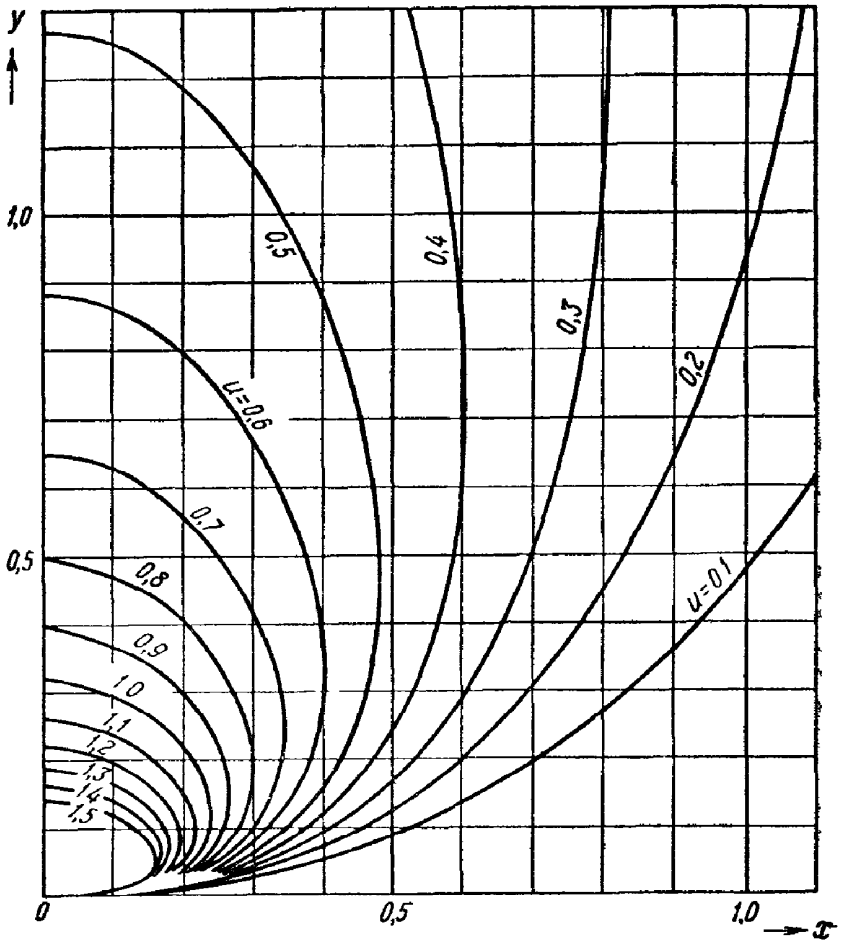


Рис. 207. Функция распространения тепла от нагретой плоскости.

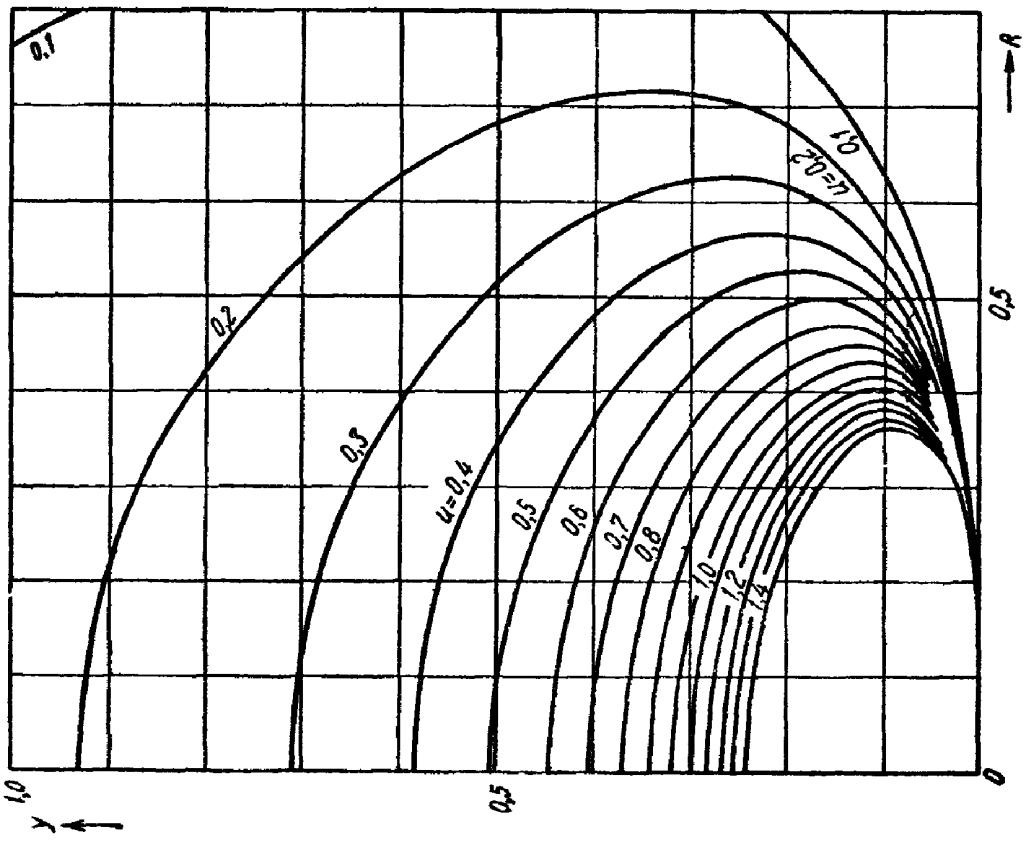


Рис. 209. Функция распространения тепла от нагретой точки

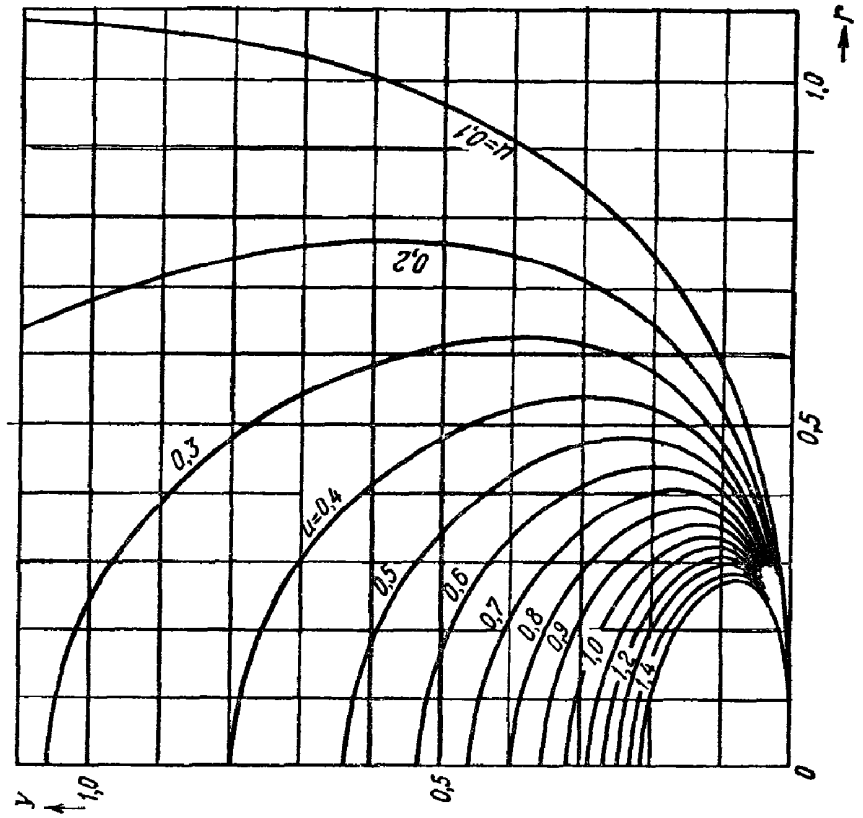


Рис. 208. Функция распространения тепла от нагретой прямой.

распространенный на все пространство, который пропорционален этому количеству тепла и, следовательно, не зависит от времени, равен единице. Тогда в момент времени $t = \frac{y}{4a^2}$ (a^2 — коэффициент теплопроводности тела) температура u на расстоянии x от начала координат будет:

$$u = \frac{e^{-\frac{x^2}{y}}}{\sqrt{(\pi y)^n}}.$$

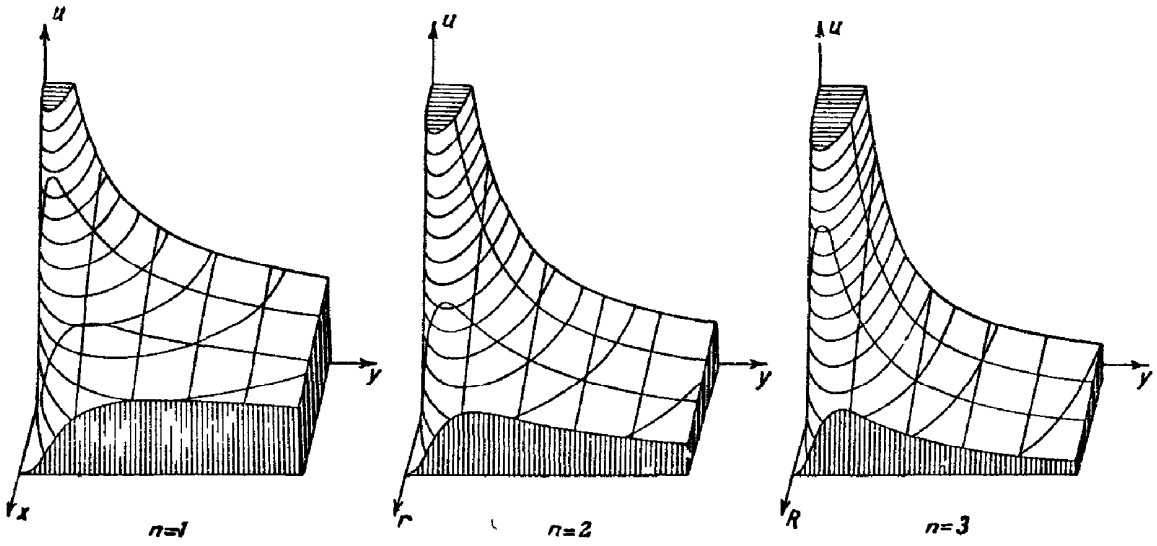


Рис 210. Функции распространения тепла от источников.

Рис. 207—210 представляют эти функции для случаев $n = 1$ (нагретая плоскость, изотермы — плоскости), $n = 2$ (нагретая прямая изотермы — круговые цилиндры $x = r$), $n = 3$ (нагретая точка, изотермы — сферические поверхности $x = R$).

БИБЛИОГРАФИЯ

Сокращения: D—десятичные знаки, S—значащие цифры. [Запись «lg Γ (x) для $x = 1(.001)2$, $12D$» после названия таблицы (см. V, [12]) означает, что в этой таблице приведены значения функции lg Γ (x) для x от 1 до 2 через каждые 0,001 с двенадцатью десятичными знаками.]

Среди перечисленных ниже работ, выбранных из обширной литературы по специальным функциям, прежде всего указаны общие руководства Затем для каждого раздела настоящей книги приведен список работ, специально посвященных тем функциям, о которых идет речь в этом разделе.

Руководства

Смирнов В. И., Курс высшей математики, Физматгиз, т. I, 1962; т. III, ч. II, 1958.

Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, Физматгиз, т. I, 1962; т. II, 1963.

Кузнецов Д. С., Специальные функции, Высшая школа, 1962.

Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, Физматгиз, 1963.

Маделунг Э., Математический аппарат физики, Физматгиз, 1961.

Морс Ф. М. и Фешбах Г., Методы теоретической физики, ИЛ, т. 1, 1958, т. 2, 1960.

Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F. and Tricomi F. G., Higher transcendental functions, т. I—III, New York—Toronto—London, 1953—1955.

Сборники формул

Градштейн И. С. и Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.

Диткин В. А. и Прудников А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление (серия «Справочная математическая библиотека»), Физматгиз, 1961.

Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Физматгиз, 1961.

Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петьо Г., Фогель Т., Функции математической физики, Физматгиз, 1963.

Magnus W. und Oberhettinger F., Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1948.

Таблицы

В следующих книгах содержатся перечни математических таблиц, вышедших в различных странах в разные годы.

Лебедев А. В. и Федорова Р. М., Справочник по математическим таблицам, Изд-во АН СССР, 1956.

Бурунова Н. М., Справочник по математическим таблицам (Дополнение 1), Изд-во АН СССР, 1959.

Fletcher A., Miller C. P., Rosenhead L. and Comrie L. J., An index of mathematical tables, I, II, Oxford, 1962.

Текущие сообщения о всех новых работах в области математических таблиц даются журналом: Mathematical tables and other aids to computation, a Quarterly Journal published by the National Research Council, Washington.

[I] — [IV] ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Руководства

[1] Люстерник Л. А., Червоненкис О. А., Янпольский А. Р., Математический анализ (вычисление элементарных функций), Физматгиз, 1963.

[2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. I, Физматгиз, 1962.

[3] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, т. 1, Физматгиз, 1962.

[4] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, Физматгиз, 1957.
5] Янпольский А. Р., Гиперболические функции, Физматгиз, 1960.

Сборники формул

[6] Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А., Справочник по математике, Физматгиз, 1962.

Таблицы

[7] Ангелов С. А., Шестизначные таблицы тригонометрических функций, Гостехиздат, 1957.
[8] Андреев П. П., Математические таблицы, Госстатиздат, 1958.
[9] Барлоу Питер, Таблицы Барлоу квадратов, кубов, квадратных корней, кубических корней и обратных величин всех целых чисел от 1 до 15 000, ИЛ, 1964
[10] Библиотека математических таблиц, вып. 9, Многозначные таблицы элементарных функции ($\sin x$, $\cos x$, e^x, e^{-x}), ВЦ АН СССР, 1960.
[11] Библиотека математических таблиц, вып. 10, Таблицы $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$, ВЦ АН СССР, 1960.
[12] Библиотека математических таблиц, вып. 11, Таблицы обратных гиперболических функций, ВЦ АН СССР, 1960
[13] Библиотека математических таблиц, вып. 7 и 8, Таблицы натуральных логарифмов, ВЦ АН СССР, тт. I, II, 1960.
[14] Библиотека математических таблиц, вып. 1, Таблицы круговых и гиперболических синусов и косинусов в радианной мере угла, ВЦ АН СССР, 1958.
[15] Библиотека математических таблиц, вып. 6, Таблицы круговых и гиперболических тангенсов и котангенсов в радианной мере угла, ВЦ АН СССР, 1959.
[16] Библиотека математических таблиц, вып. 15 и 16, Томсон А., Таблицы двадцатизначных десятичных логарифмов чисел, ВЦ АН СССР, тт. 1, 2, 1961.
[17] Брадис В. М., Четырехзначные математические таблицы, Учпедгиз, 1963.
[18] Бремикер К., Таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций с шестью десятичными знаками, Физматгиз, 1962.
[19] Вега Г., Таблицы семизначных логарифмов, Геодезиздат, 1962.
[20] Восьмизначные таблицы тригонометрических функции, Геодезиздат, 1959.
[21] Милн-Томсон Л. М. и Комри Л. Дж., Четырехзначные математические таблицы, Физматгиз, 1961.
[22] Пятизначные таблицы натуральных значений тригонометрических величин, их логарифмов и логарифмов чисел, Геодезиздат, 1962.
[23] Сегал Б. И и Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, Физматгиз, 1962.
[24] Субботин М. Ф., Многозначные таблицы логарифмов, Изд-во АН СССР, 1940.
[25] Таблицы e^x и e^{-x}, под ред В. А. Диткина, Изд-во АН СССР, 1955.
[26] Хренов Л. С., Пятизначные таблицы тригонометрических функций, Физматгиз, 1962.
[27] Хренов Л. С., Шестизначные таблицы тригонометрических функций, Физматгиз, 1960.
[28] Хренов Л. С., Семизначные таблицы тригонометрических функций, Гостехиздат, 1956.
[29] Cohen L., Formulae and tables for the calculation of alternating current problems, New York, 1913. Содержит в конце таблицы sh и ch от $z=0$ до $0{,}98+i\cdot 1{,}00$ с интервалами в 0,02 и $i\cdot 0{,}02$.
[30] Hawelka R., Vierstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie ihrer Umkehrfunktionen im komplexen in Schritten von $\frac{\pi}{2}$ 0,02 und $i\cdot 0{,}02$, Berlin, 1931.
[31] Kennelly A. E., Tables of complex hyperbolic and circular functions, Cambridge, 1914. Содержит много таблиц, например sh и ch от $z=0$ до $3{,}95+i\frac{\pi}{2}\cdot 2{,}00$ с интервалами в 0,05 и $i\frac{\pi}{2}\cdot 0{,}05$.

V. ГАММА-ФУНКЦИИ

Руководства

[1] Артин Е., Введение в теорию гамма-функции, ГТТИ, 1934.
[2] Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А., см. I—IV, [6].
[3] Кратцер А. и Франц В., Трансцендентные функции, ИЛ, 1963.
[4] Кузнецов Д. С., Специальные функции, Высшая школа, 1962.
[5] Кузьмин Р. О., Бесселевы функции, ОНТИ, 1935.

[6] Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, Физматгиз, 1963.
[7] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 2, Физматгиз, 1958.
[8] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. I—IV, [3].
[9] Böhmer P. E., Differenzengleichungen und bestimmte Integrale, Leipzig, 1939.
[10] Lösch F. und Schoblik F., Die Fakultät (Gammafunktion) und verwandte Funktionen, Leipzig, 1951.
[11] Nielsen N., Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig, 1906.

Таблицы

[12] Абрамов А. А. Таблицы $\ln\Gamma(z)$ в комплексной области, Изд-во АН СССР, 1953. $\ln\Gamma(x+iy)$ для $x=1(.01)2$, $y=0(.01)4$; $6D$.
[13] Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, Физматгиз, 1962 $\Gamma(x)$ для $x=1(.001)2$; $5D$; $\Gamma(n+1)$ для $n=1(1)50$; $6S$.
[14] Таблицы специальных функций, под ред. Я. Н. Шпильрейна, ГТТИ 1934. $\Gamma(x)$ для $x=1(.002)2{,}5D$.
[15] Legendre A. M., Tables of the logarithms of the complete Γ-function to twelve figures. Tracts for computers Nr. IV, London, 1921. $\lg\Gamma(x)$ для $x=1(.001)2$, $12D$.
[16] Hayashi K., Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen und deren Produkte sowie der Gammafunktion, Berlin, 1926. $\lg\Gamma(x)$ для $x=0(.01)1(.00001)1.001(.0001)1.1(.001)2(.01)3$, $8-13D$; $\Gamma(x)$ для $x=-5(.01)1(.001)2(.01)5{,}7-8D$.
[17] Davis H. T., Tables of the higher mathematical functions I, II, Bloomington, 1933—1935. I: $\lg\Gamma(x)$ для $x=-10(.01)1(.001)2(.01)11(.1)101$, $12-15D$; $1(.0001)1.1$, $10D$; $1(.01)2{,}20D$. $\Gamma(x)$ для $x=-10(.01)1$, $10S$; $1(.001)2$, $10D$; $1(.0001)1.1$, $10D$. $\psi(x)$ для $x=-10(.01)1(.001)2(.02)20$, $10-15D$; $0.5(.5)100$, $16D$; $100(1)450$, $10D$; $1(.0001)1.1$, $10D$; $1(.01)2$, $18D$. $\lg\psi(x)$ для $x=-10(.01)1(.001)2$, $10D$; $1(.0001)1.1$, $10D$. $1/\Gamma(re^{i\Theta})=P(r,\Theta)+Q(r,\Theta)$ для $r=-1(.1)1$, $\Theta=0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$, $120°$, $135°$, $150°$, $12D$. II: $\psi^{(n)}(x)$, $n=1,2,3,4$ для $x=-10(.1)0(.01)4(.02)20(.1)100$, $10-19D$. $\ln\psi^{(n)}(x)$, $n=1,2,3,4$ для $x=-10(.1)0(.01)1$, $10D$.
[18] British Association Mathematical Tables I: Circular and hyperbolic functions, exponential, sine and cosine integrals, factorial function and allied functions, Hermitian probability functions, 3rd ed., Cambridge, 1951. $\Gamma(x)$ для $x=1(.01)2$, $12D$. $\psi^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,3$ для $x=1(.01)2$, $1(.1)61$, $10-12D$. $\int_0^x \lg\Gamma(1+t)\,dt$ для $x=0(.01)1$, $10D$.
[19] Ghizzetti A., Tavola della funzione euleriana $\Gamma(z)$ per valori complessi dell' argomento, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. VIII, Ser. 3 (1947), 254—257. $\Gamma(x+iy)$ для $x=4(.1)5$, $y=0(.1)1$, $5S$.
[20] Stanley J. P. and Wilkes M. V., Table of the reciprocal of the gamma function for complex argument, Toronto, 1950. $1/\Gamma(x+iy)$ для $x=-0.5(.01)0.5$, $y=0(.01)1$, $6D$.
[21] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 34: Table of the gamma function for complex arguments, Washington, 1954. $\ln\Gamma(x+iy)$ для $x=0(.1)10$, $y=0(.1)10$, $12D$.
[22] Pearson K., Tables of the incomplete Γ-function, London, 1922.
$I(u,p)=\int_0^x e^{-t}t^p dt \,/\, \int_0^\infty e^{-t}t^p dt$ с $u=x/\sqrt{p+1}$ для $p=-1(.05)0(.1)5(.2)50$, $u=0(.1)$ до $I(u,p)=1{,}7D$; затем для $p=-1(.01)-0.75$, $u=0(.1)6$, $5D$, $\lg I(u,p)/u^{p+1}$ для $p=-1(.05)0(.1)10$, $u=0(.1)1.5$, $8D$.
[23] Pearson K., Tables of the incomplete beta-function, London, 1934. $I_x(p,q)=B_x(p/q)/B(p,q)$ с $B_x(p,q)=\int_0^x x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, для $p,q=0.5(.5)11(1)50$, $p\geqslant q$, $x=0(.01)1$ и соответствующие значения знаменателя $B(p,q)=B_1(p,q)$, $7D$.

VI. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Руководства

[1] Смирнов В. И., см. V, [7].
[2] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. I—IV, [3].
[3] Böhmer P. E., см. V, [9].
[4] Losch F. und Schoblik F., см. V, [10].
[5] Nielsen N., Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transcendenten, Leipzig, 1906.

Таблицы

[6] Таблицы интегральной показательной функции, под ред. В. А. Диткина, Изд-во АН СССР, 1954. Ei (x), $-\mathrm{Ei}(-x)$ для $x=0$ (.0001)1, 3(.001)3(.0005)10(.1)15; 7S.
[7] Таблицы интегрального синуса и косинуса, под ред. В. А. Диткина, Изд-во АН СССР, 1954. Si (x), Ci (x) для $x=0$(.0001) 2(.001) 10(.005)100; 7D.
[8] Карпов К. А. и Разумовский С. Н., Таблицы интегрального логарифма, Изд-во АН СССР, 1956. li (x) для $x=0$ (.0001) 2,5 (.001) 20 (.01) 200 (.1) 500 (1) 10000; 7S.
[9] National Bureau of Standards, Mathematical Tables Project [MT 5, 6]: Tables of sine, cosine and exponential integrals, I, II, Washington, 1940. I: $-\mathrm{Ei}(-x)$, $\mathrm{Ei}^*(x)$, Si (x), Ci (x) для $x=0$(.0001) 2, 9D; 0(.1) 10, 9D. $-\mathrm{Ei}(-x)+\ln x$, $\mathrm{Ei}^*(x)-\ln x$, Ci $(x)-\ln x$ для $x=0$(.0001) 0.01, 9D. II: $-\mathrm{Ei}(-x)$ для $x=0$(.001) 10, 9S; 10 (.1) 15, 14D. $\mathrm{Ei}^*(x)$ для $x=0$ (.001) 10, 10S; 10(.1)15, 10—11S. Si (x), Ci (x), для $x=0$(.001)10(.1)20(.2)40, 10D.
[10] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 32: Table of sine and cosine integrals for arguments from 10 to 100, Washington, 1954. Si (x), Ci (x) для $x=10$(.01)100, 10D.
[11] British Association Mathematical Tables I: $-\mathrm{Ei}(-x)$, $\mathrm{Ei}^*(x)$ для $x=5$(.1)15, 10—11S. Si (x), Ci (x) для $x=5$(.1)20(.2)40, 10D. $\mathrm{Ei}(-x)-\ln x$, $\mathrm{Ei}^*(x)-\ln x$, Si (x), Ci $(x)-\ln x$ для $x=0$(.1)5, 11D.
[12] Herman R. C. and Meyer Ch. F., The thermoluminescence and conductivity of phosphors, J. Appl. Phys. 17 (1946), 748. $-\mathrm{Ei}(-x)$ для $x=15$(.1)20, 6S.
[13] Akahira T., Sci. Pap. Inst. Phys. and Chem. Res., p. 181—215, Table 3, Tokyo, 1929. $-\mathrm{Ei}(-x)$ для $x=20$(.02)50, 5—6S.
[14] Tani K., Tables of si (x) and ci (x) for the range $x=0$ to $x=50$, Tokyo, 1931. Si (x) для $x=0$(.01)50, 6D; Ci (x) для $x=0$(.0001)0.05(.001)1(.01)50, 6D.

VII. ИНТЕГРАЛ ОШИБОК И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ФУНКЦИИ

Руководства

[1] Ван-дер-Варден Б. Л., Математическая статистика, ИЛ, 1960.
[2] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, Физматгиз, 1961.
[3] Зоммерфельд А., Волновая механика, ГТТИ, 1933.
[4] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, т. II, Физматгиз, 1963.
[5] Böhmer P. E., см. V, [9].
[6] Lösch F. und Schoblik F., см. V, [10].
[7] Nielsen N., см. VI, [5].

Таблицы

[8] Башарин Г. П., Таблицы вероятностей и средних квадратических отклонений потерь на полнодоступном пучке линий, Изд-во АН СССР, 1962.
[9] Берлянд О. С., Гаврилова Р. И. и Прудников А. П., Таблицы интегральных ошибок и полиномов Эрмита, Изд-во АН БССР, 1961.
[10] Библиотека математических таблиц, вып. 2, 3, Таблицы вероятностных функций, ВЦ АН СССР, тт. I, II, 1958.
[11] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, т. II, ИЛ, 1949. $C(x)$, $S(x)$ для $x=0$(.02)1(.5)50; 6D.
[12] Сегал Б. И. и Семендяев К. А., см. V, [13], $\Phi(x)$ для $x=0$ (.001) 2,5 (.01) 3; 5—7 D.
[13] Таблицы, под ред. Я. Н. Шпильрейна, см. V, [14]. $\Phi(x)$ для $x=0$(.001)1,5 (.01) 2,9; 4D.
[14] Смирнов Н. В. и Большев Л. Н., Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения, Изд-во АН СССР, 1962.
[15] Таблицы интегралов Френеля, под ред. В. А. Диткина, Изд-во АН СССР, 1953. $C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ и $S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ для $x=0$ (.001) 25, 7D. Вспомогательные таблицы для малых x.
[16] Таблицы нормального интеграла вероятностей, нормальной плотности и ее нормальных производных, под ред. Н. В. Смирнова, Изд-во АН СССР, 1960.
[17] Таблицы функций распределения и плотностей распределения Стьюдента, под ред. Н. В. Смирнова, Изд-во АН СССР, 1960.
[18] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 41: Tables of the error function and its derivative $H(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\alpha^2}d\alpha$ и $H'(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$. Washington,

1954. $\Phi(x)$, $\Phi'(x)$ для $x=0(.0001)\,1(.001)\,5.6-6,\,15\,D$. $1-\Phi(x)$, $\Phi'(x)$ для $x=4(.01)\,10,\,8\,S$.

[19] Markoff A. A (Марков А. А.), Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig und Berlin, 1912. $\Phi(x)$ для $x=0(.001)\,2.5(.01)\,3.79,\,6\,D$.

[20] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 23: Tables of the normal probability functions $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ and $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x}e^{-\alpha^2/2}\,d\alpha$, Washington, 1953. $2\Phi(x)-1$, $\Phi'(x)$ для $x=0(.0001)\,1(.001)\,7{,}8-8.112$ и $8.285,\,15\,D$. $2[1-\Phi(x)]$, $\Phi'(x)$ для $x=6(.01)\,10,\,7\,S$.

[21] Harvard University, Computation Laboratory, Annals 23: Tables of the error function and of its first twenty derivatives, Cambridge, 1952. $\Phi(x)-\frac{1}{2}$, $\Phi^{(n)}(x)$, $n=1(1)\,11$ для $x=0(.004)\,X,\,6\,D$ с $\Phi(X)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $\Phi^{(n)}(X)=0$ в $6\,D$. $\Phi^{(n)}(x)$, $n=12(1)\,21$ для $x=0(.002)\,X,\,7S$ или $6\,D$, где $\Phi^{(n)}(X)=0$ в $6D$. Нули всех табулированных функций в $10\,D$.

[22] British Association Mathematical Tables VII. The probability integral, Cambridge, 1939. $F(x)=[1-\Phi(x)]/\Phi'(x)$ для $x=0(.1)\,10,\,24\,D$; $0(.01)\,10,\,12\,D$. $L(x)=-\ln[1-\Phi(x)]$ для $x=0(1)\,10,\,24\,D$, $0(.1)\,10,\,16\,D$. $l(x)=-\lg[1-\Phi(x)]$ для $x=0(.1)\,10,\,12D$; $0(.01)\,10,\,8\,D$. Дополнительные таблицы для интерполяции посредством формулы Тейлора.

[23] Pearson K., см. V, [22]. Таблица дает значения $E_n(x)$ при обозначении $E_n(x)=I(u,\ p)$, где $u=\sqrt{n}\,x^n$, $p=-\frac{n-1}{n}$ или $x=(u\sqrt{p+1})^{p+1}$, $n=\frac{1}{p+1}$.

[24] Schumann W. O., Elektrische Durchbruchfeldstärke von Gasen, Berlin, 1923. $\Gamma(5/4)\,E_4(x)$ для $x=0.1\,(.1)\,1,\ 4\,D$. $i^{-1}E_2(ix)$ для $x=0.1\,(.1)\,2.6\,(.2)\,7.4$, 4—5 S.

[25] Terrill H. M. and Sweeny L., An extension of Dawson's table of the integral e^{x^2}, J. Franklin Inst. 237 (1944), 495—497; Table of the integral of e^{x^2}, J. Franklin Inst. 238 (1944), 220—222. $\int_0^x e^{x^2}dx$ для $x=0\,(.01)\,2,\,6D$; $2\,(.01)\,4$, $7-9\,D$.

[26] Lohmander B. and Rittsten S., Table of the function $y=e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$, Lund, 1958. (From Fysiogr. Sällsk. Lund Förhdl. 28 (1958), 45—52.) y для $x=0\,(.01)\,3\,(.02)\,5$, $1/x=0\,(.005)\,0.2,\,10\,D$; $x=0.5\,(.5)\,10,\,20\,D$.

[27] British Association Mathematical Tables I, см. V, [18]. $Hh_0(x)=\int_x^\infty e^{-t^2/2}\,dt$, $Hh_n(x)=\int_x^\infty Hh_{n-1}(t)\,dt$ для $n=0(1)\,11$, $x=-7\,(.1)\,X$; $n=12(1)\,17$, $x=-5\,(.1)\,X$; $n=18(1)\,21$, $x=-2{,}5\,(.1)\,X$; $10\,D$ X всюду $\leqslant 6.6$

[28] Pearsey T., Table of the Fresnel integral to six decimal places, Cambridge, 1957. $C(x)$, $S(x)$ для $x=0(.01)\,1,\,7\,D$; $1(.01)\,50,\,6\,D$.

[29] Von Wijngaarden A. and Scheen W. L., Table of Fresnel integrals, Amsterdam, 1949. $C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$, $S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ для $x=0\,(.01)\,20,\,5\,D$.

[30] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 21: A guide to tables of the normal probability integral, Washington, 1952.

VIII. ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА

Руководства

[1] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, ИЛ, 1953.

[2] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].

[3] Ingham A. E., The distribution of prime numbers, Cambridge, 1932.

[4] Landau E., Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I, II, New York, 1953.

Таблицы

[5] Gram J. P., Tafeln für die Riemannsche Zetafunktion. Danske Vid. Selsk. Skrifter, Nat. Math. Afd. 10 (1925—26), 311—325. $\zeta(s)$ для $s=-24$ (.1) -16.5, 10 S; -16.4 (.1) 24, 10 D. $(s-1)\zeta(s)$ для $s=-2$ (.1) 0, 10 D; 0 (.1) 4, 11 D.

[6] Peters J., Zehnstellige Logarithmentafel I, Berlin, 1922. $\zeta(n)-1$ для $n=2$ (1) 100, 32 D.

[7] Titchmarsh E. C., The zeros of the Riemann zeta-function, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A151 (1935), 234—235 and 157 (1936), 261—263. 1) Сообщение о вычислении: 1) 195 нулей $\frac{1}{2}+it$, где $0<t<390$. 2) 1041 нулей $\frac{1}{2}+it$, где $0<t<1468$.

[8] Lehmer D. H., Extended computation of the Riemann zeta-function, Mathematika 3 (1956), 102—108. Сообщение о вычислении первых 25 000 нулей $\frac{1}{2}+it$. Таблица отклонений от закона Грама.

IX. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Руководства

[1] Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А., см. I—IV, [6].

[2] Градштейн И. С. и Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.

[3] Гурса Э., Курс математического анализа, т. 2, ч. 2, ГТТИ, 1933.

[4] Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958.

[5] Смирнов В. И., см. V, [7].

[6] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, Физматгиз, 1957.

[7] Эрмит Ш., Курс анализа, ОНТИ, 1936.

[8] Byrd P. F. and Friedman M. D., Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1954.

[9] Gröbner W. und Hofreiter N., Integraltafel I, II, 2. Aufl., Wien und Innsbruck, 1957 — 1958.

[10] Hancock H., Elliptic integrals, New York, 1917.

[11] Westropp Roberts W. R., Elliptic and Hyperelliptics integrals and allied theory, Cambridge, 1938.

Таблицы

[12] Беляков В. М., Кравцова Р. И. и Раппопорт М. Г., Таблицы эллиптических интегралов, Изд-во АН СССР, т. 1, 1962; т. 2, 1963.

[13] Ветчинкин В. П., Новые формулы и таблицы эллиптических интегралов и функций с приложением сокращенных семизначных таблиц логарифмов и тригонометрических функций, Изд-во Воен.-возд. акад. РККА, 1935.

[14] Глазенап С. П., Математические и астрономические таблицы (в двух частях), Изд-во АН СССР, 1932.

[15] Самойлова-Яхонтова Н. С., Таблицы эллиптических интегралов, ОНТИ, 1935.

[16] Legendre A. M., Tables of the complete and incomplete elliptic integrals. Reissued by K. Pearson, London, 1934 $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$, $(k=\sin\alpha)$, для φ, $\alpha=$ $=0°$ (1°) 90°, 9—10D $\lg K(k)$, $\lg E(k)$, $(k=\sin\alpha)$, для $\alpha=0°$ (0° 1) 90°, 12 — 14D.

[17] Heuman C. A., Tables of complete elliptic integrals, J Math Physics 20 (1941), p. 127—206, 336. $2K(k)/\pi$, $2E(k)/\pi$, $(k=\sin\alpha)$, для $\alpha=0°$ (0°.1) 90°, 6D. $2(\pi)[K+$ $+\ln(90-\alpha)]$ для $\alpha=65°$ (0°.1) 90°, 6D. Полный интеграл 3-го рода

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha\sin^2\beta}}{\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}}$$

для $\alpha=0°$ (1°) 90°, $\beta=0°$ (1°) 90° и $\alpha=0°$ (0°.1) 5°.9, $\beta=80°$ (1°) 89°, 6D.

[18] Hayashi K., Tafeln der Besselschen, Theta-, Kugel- und anderen Funktionen, Berlin, 1930. $K(k)$, $K'(k)$, K'/K, K/K' для $k^2=0$ (.001) 1, 10—12D; $k^2=$ $=0\,(10^{-7})\,10^{-5}\,(10^{-5})\,0.003$, 8—10$D$.

[19] Hayashi K., Tafeln für die Differenzengleichung sowie für die Hyperbel-, Besselschen, elliptischen und anderen Funktionen, Berlin, 1933. $E(k)$, $E'(k)$ для $k^2=0$(.001) 1, 10D.

X. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Руководства

[1] Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, 1948.
[2] Гурвиц А., Теория аналитических и эллиптических функций, ГТТИ, 1933.
[3] Гурса Э., Курс математического анализа, т. 2, ч. 1, ГТТИ, 1933.
[4] Журавский А. М., Справочник по эллиптическим функциям, Изд-во АН СССР, 1941.
[5] Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., см. IX, [4].
[6] Сикорский Ю. С., Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике, ОНТИ, 1936.
[7] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].
[8] Appell P. et Lacour E., Principes de la théorie des fonctions elliptiques, Paris, 1922.
[9] Hurwitz A. und Courant R., Funktionentheorie, Berlin, 1929.
[10] Neville E. H., Jacobian elliptic functions, Oxford, 1951.
[11] Oberhettinger F. und Magnus W., Anwendungen der elliptischen Funktionen in Physic und Technik, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1949.
[12] Thomae J., Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen, Leipzig, 1905.
[13] Tricomi F., Funzioni Ellittiche, Bologna, 1951.

Таблицы

[14] Библиотека математических таблиц, вып. 13, Таблицы эллиптических функций, ВЦ АН СССР, 1961.
[15] Мілн-Томсон Л., Еліптичні функції Якобі, ДНТВУ, 1933.
[16] Schuler M. und Gebelein H., Acht- und neunstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955. С использованием аргумента $z=\cos 2x=\cos(\pi u/\mathrm{K})$ и вспомогательных функций G, H, $\overline{G}$, $\overline{H}$, где $\vartheta_1(x)=2q^{1/4}\sin x\overline{G}$, $\vartheta_3(x)=\overline{H}$, $\overline{G}=1-q^2G$, $\overline{H}=1+qH$, даны таблицы: $G(q^4z)$ для $q^4=0\,(.001)\,0.1$, $z=-1\,(.05)\,1$, $9D$. $H(q^3, z)$ для $q^3=0\,(.002)\,0.176$, $z=-1\,(.05)\,1$, $9D$. $\lg(\mathrm{sn}\,u/\sin x)$, $\lg(\mathrm{cn}\,u/\cos x)$, $\lg\mathrm{dn}\,u$ для $q=0\,(.01)\,0.55$, $z=-1\,(.05)\,1$, $8D$. α, q для $q^4=0\,(.001)\,0.1$, $q^3=0\,(.002)\,0.176$ с $0'.0001$ соотв. $7D$. α, $-\lg\cos\alpha$, K, K/E для $q=0\,(.01)\,0.55$ с $0'.01$ соотв. $8D$. $1/(1-q)$, K, K/E для $-\lg k'=-\lg\cos\alpha=0\,(.005)\,3$ с $8D$.
[17] Schuler M. und Gebelein H., Fünfstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955. С использованием обозначений [16] даны таблицы: $G(q, z)$, $\overline{H}(q, z)$ для $q=0\,(.01)\,0.5$, $z=-1\,(.1)\,1$, $5D$. $\lg(\mathrm{sn}\,u/\sin x)$, $\lg(\mathrm{cn}\,u/\cos x)$, $\lg\mathrm{dn}\,u$ для $q=0\,(.01)\,0\,5$, $z=-1\,(.1)\,1$, $5D$. α, $-\lg\cos\alpha$, K, K/E для $q=0\,(.01)\,0.5$ с $0'.01$ соотв. $5D$. α, $1/(1-q)$, K, K/E для $-\lg k'=-\lg\cos\alpha=0\,(.01)\,2.5$ с $0'.01$ соотв. $5D$.
[18] Adams E. P. and Hippisley R. L., Smithsonian mathematical formulae and tables of elliptic functions, Smithson. Misc. Coll. 74 (1922), 259—309; reprint 1939. K, E для $\alpha=0°\,(1°)\,10°\,(5°)\,80°\,(1°)\,90°$, $9-10D$. $\mathrm{am}\,u$ для $\alpha=0°\,(5°)\,80°\,(1°)\,89°$, $x=\pi u/2\mathrm{K}=0°\,(1°)\,90°$ в $1'$. $\mathrm{zn}\,u$ для $\alpha=0°\,(5°)\,80°\,(1°)\,89°$, $x=\pi u/2\mathrm{K}=0°\,(1°)\,90°$, $10D$. ϑ_2, ϑ_4 для $\alpha=0°\,(5°)\,80°\,(1°)\,89°$, $10-12D$. $\vartheta_1(x)/\vartheta_2$, $\vartheta_2(x)/\vartheta_2$, $\vartheta_3(x)/\vartheta_4$, $\vartheta_4(x)/\vartheta_4$ для $\alpha=0°\,(5°)\,80°\,(1°)\,89°$, $x=\pi v=\pi u/2\mathrm{K}=0°\,(1°)\,90°$, $10D$. q для $\alpha=0°\,(5°)\,80°\,(1°)\,90°$, $14-15D$. $u=2\mathrm{K}v=2\mathrm{K}x/\pi$ для $\alpha=0°\,(5°)\,80°\,(1°)\,89°$, $x=0°\,(1°)\,90°$, $10D$.
[19] Hayashi K., см. IX, [18]. ϑ_1', ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4, $\vartheta_1'''/\vartheta_1'$, $\vartheta_2''/\vartheta_2$, $\vartheta_3''/\vartheta_3$, $\vartheta_4''/\vartheta_4$, q, q^4, $q^{1/4}$, $q^{9/4}$, $q^{25/4}$ для $k^2=0\,(.001)\,0.5$, $8D$. $\lg q$, $\lg q'$ для $k^2=0\,(.001)\,1$, $10D$; $k^2=0\,(10^{-7})\,10^{-5}\,(10^{-5})\,0.003$, $8D$.

XI. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

Руководства

[1] Джексон Д., Ряды Фурье и ортогональные полиномы, ИЛ, 1948.
[2] Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, 1951.
[3] Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., см. IX, [4].
[4] Лебедев Н. Н., см. V, [6].
[5] Сеге Г., Ортогональные многочлены, Физматгиз, 1962.
[6] Смирнов В. И., см. V, [7].
[7] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].
[8] Tricomi F. G., Vorlesungen über Orthogonalreihen, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.

Таблицы

[9] Библиотека математических таблиц, вып. 19, Таблицы полиномов Чебышева, ВЦ АН СССР, 1963.
[10] Митропольский А. А., Интеграл вероятностей, изд. Лесотехн. акад. им. Кирова, Л., 1948, $H_n(x)$ для $x=0(.01)4$, $n=2, 3, 4$; 4—8D.
[11] Таблицы, под ред. Я. Н. Шпильрейна, см. V, [14]. $P_n(x)$ для $x=0(.01)1$ и $P_n(\cos\theta)$ для $\theta=0(1°)90°$; $n=1(1)7$; 4D.
[12] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 9: Tables of Chebyshev polynomials $S_n(x)$ and $C_n(x)$, Washington, 1952. При $(T_n x)=\frac{1}{2}C_n(2x)$, $U_n(x)/\sqrt{1-x^2}=S_{n-1}(2x)$ даны таблицы: $C_n(x)$, $S_n(x)$ для $n=2(1)12$, $x=0(.001)2$, 12D. $C_n(x)$, $S_n(x)$, $T_n(x)$, $U_{n+1}(x)/\sqrt{1-x^2}$ явно для $n=0(1)12$, $T_n^*(x)=\frac{1}{2}C_n(4x-2)$ для $n=0(1)20$.
[13] Salzer H. E., Tables for facilitating the use of Chebyshev's quadrature formula, J. Math. Physics 26 (1947), 191—194. Нули полиномов $T_n(x)$ для $n=3(1)7$, 9, 10D. Соответствующие множители для численного интегрирования, 9S.
[14] Tricomi F. G., Valori numerici di funcioni ortogonali di Laguerre, Atti Accad. Sci. Torino 90 (1956). $l_n(x)$ для $n=0(1)10$, $x=0(.1)1(.25)6(1)14(2)34$, 6S.
[15] Slater L. J., A short table of the Laguerre polynomials, Inst. Elect. Engineers, Monograph, London, 1955. $L_n(x)$ для $n=0(1)10$, $x=0(.1)5$, 5—6D.
[16] Head J. W. and Wilson W. P., Laguerre functions: Tables and properties, Inst. Elect. Engineers, Monograph, London, 1956. $e^{-x}L_n(x)$ для $n=0(1)20$, $x=0(.1)1(.2)3(.5)6(1)14(2)40(5)100$, 4D или 2S. Нули полиномов $L_n(x)$ для $n=1(1)20$, 6D.
[17] Salzer H. E. and Zucker R., Table of the zeros and weight factors of the first fifteen Laguerre polynomials, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 1004—1012. Нули полиномов $L_n(x)$ для $n=1(1)15$, 12D, соответствующие множители для численного интегрирования, 12S.
[18] Smith E. R., Zeros of the Hermitian polynomials, Amer. Math. Monthly 43 (1936), p. 354—358. Нули полиномов $H_n(x/\sqrt{2})$ для $n=3(1)27$, 6D.
[19] Salzer H. E., Zucker R. and Capuano R., Table of the zeros and weight factors of the first twenty Hermite polynomials, NBS, J. Res. 48 (1952), 111—116. Нули полиномов $H_n(x)$ для $n=1(1)20$, 15D; соответствующие множители для численного интегрирования, 13 S.

XII. ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

Руководства

[1] Вебстер А. и Сеге Г., Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, ч. 2, ОНТИ, 1934.
[2] Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.
[3] Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М., Основные дифференциальные уравнения математической физики, Физматгиз, 1962.
[4] Кузнецов Д. С., см. V, [4].
[5] Курант Р. и Гильберт Д., см. XI, [2].
[6] Лебедев Н. Н., см. V, [6].
[7] Смирнов В. И., см. V, [7].
[8] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1954.
[9] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].
[10] Lense J., Kugelfunktionen, Leipzig, 1954.
[11] MacRobert T. M., Spherical harmonics, London, 1947.
[12] Robin L., Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroidales, I—III, Paris, 1957—1959.

Таблицы

[13] Белоусов С. Л., Таблица нормированных присоединенных полиномов Лежандра, Изд-во АН СССР, 1956. $P_n^m(\cos\theta)$ для $\theta=0^c(2^c,5)90°$, $m=0(1)36$, $n=m(1)56$; 6D.
[14] Библиотека математических таблиц, вып. 14, Таблицы присоединенных функций Лежандра, ВЦ АН СССР, 1962.
[15] Журина М. И. и Кармазина Л. М., Таблицы функций Лежандра $P_{-1/2+i\tau}(x)$, Изд-во АН СССР, т. 1, 1960; т. 2, 1962; т. 3, 1963. Даны таблицы для $x=-1(.1)1$, $\tau=0(.01)50$; 7S и т. д.
[16] Журина М. И. и Кармазина Л. М., Таблицы и формулы для сферических функций $P^m_{-1/2+i\tau}(z)$, Изд-во АН СССР, 1962.

[17] Hayashi K., см. IX, [18]. $P_n(x)$ для $n=2(1)8$, $x=0(.01)1$, точно. $P_n(\cos\vartheta)$ для $n=1(1)8$, $\vartheta=0°(1°)90°$. 10*D*.

[18] British Association Mathematical Tables, Part-Volume A: Legendre polynomials, Cambridge, 1946 $P_n(x)$ для $n=2(1)12$, $x=0(.01)1$, 7*D*; $n=2(1)12$, $x=1(.01)6$, 6—8*S*; $n=2(1)6$, $x=6(.1)11$, 7—8*S*.

[19] Tallqvist Hj., Sechsstellige Tafeln der 16 ersten Kugelfunktionen $P_n(x)$, Acta Soc. Sci. Fennicae, n Ser. A 2, № 4 (1937) $P_n(x)$ для $n=1(1)16$, $x=0(.001)1$, 6*D*.

[20] Tallqvist Hj., Sechsstellige Tafeln der 32 ersten Kugelfunktionen $P_n(\cos\theta)$, Acta Soc. Sci. Fennicae, n. Ser. A 2, № 11 (1938). $P_n(\cos\vartheta)$ для $n=1(1)32$, $\vartheta=0°(10')90°$, 6*D*.

[21] Clark G. C. and Churchill St. W., Tables of Legendre polynomials $P_n(\cos\theta)$ for $n=0(1)80$ and $\theta=0°(1°)180°$, Ann Arbor, 1957. $P_n(\cos\vartheta)$ для $n=1(1)80$, $\vartheta=1°(1°)180°$, 6*D*.

[22] Mursi Z., Tables of Legendre associated functions, Fouad I University, Faculty of Science, № 4, Cairo, 1941. $P_n^m(x)$ для $n=1(1)10$, $m=1(1)n$, $x=0(.001)1$, 8—13*S*.

[23] National Bureau of Standards, Mathematical Tables Project [MT 18]: Tables of associated Legendre functions, Washington, 1945. $P_n^m(\cos\vartheta)$, $dP_n^m(\cos\vartheta)/d\vartheta$ для $n=0(1)10$, $m=0(1)4$, $m\leqslant n$, $\vartheta=0°(1°)90°$, 6*S*. $\mathfrak{P}_n^m(x)$, $(-1)^m\mathfrak{Q}_n^m(x)$, $d\mathfrak{P}_n^m(x)/dx$, $(-1)^{m+1}d\mathfrak{Q}_n^m(x)/dx$ для $n=0(1)10$, $m=0(1)4$, $m\leqslant n$, $x=1(.1)10$, 6*S*. $i^{-n}\mathfrak{P}_n^m(ix)$, $i^{n+2m+1}\mathfrak{Q}_n^m(ix)$, $i^{-n}d\mathfrak{P}_n^m(ix)/dx$, $i^{n+2m-1}d\mathfrak{Q}_n^m(ix)/dx$ для $n=0(1)10$, $m=0(1)4$, $m\leqslant n$, $x=0(.1)10$, 6*S*. $\mathfrak{P}_{n+1/2}^m(x)$, $(-1)^m\mathfrak{Q}_{n+1/2}^m(x)$, $d\mathfrak{P}_{n+1,2}^m(x)/dx$, $(-1)^{m+1}d\mathfrak{Q}_{n+1/2}^m(x)/dx$ для $n=-1(1)4$, $m=0(1)4$, $x=1(.1)10$, 4—6*S*.

[24] Prévost G., Tables des fonctions sphériques et de leurs intégrales, Paris, 1933. $P_n^m(x)$ для $n=1(1)8$, $m=0(1)n$ и $(n, m)=(9, 0), (9, 1), (10, 0)$, $x=0(.01)1$, 5—6*S*. $\int_0^x P_n^m(x)\,dx$ для $n=0(1)8$, $m=0(1)n$ и $(n, m)=(9, 0), (9, 1), (10, 0)$, $x=0(.01)1$, 5—7*S*. Нули функций $P_n^m(x)$ для $n=2(1)8$, $m=0(1)n$ и $(n, m)=(9, 0), (9, 1), (10, 0)$, 4*D*. Нули функций $P_n^m(\cos\vartheta)$ для $n=2(1)10$, $m=0$ и $n=2(1)8$, $m=1(1)n$, 1′.

[25] Schmidt A., Tafeln der normierten Kugelfunktionen, Gotha, 1935. $P_n(x)$, $\log P_n(x)$ для $n=1(1)7$, $x=0(.1)1$, 5—6*D*. $P_n(\cos\vartheta)$, $\log P_n(\cos\vartheta)$ для $n=1(1)7$, $\vartheta=0°(5°)90°$, 5—6*D*. $\frac{2}{\sqrt{2n+1}}\overline{P_n^m}(x)$, $\log\frac{2}{\sqrt{2n+1}}\overline{P_n^m}(x)$ для $n=1(1)6$, $m=1(1)n$, $x=0(.1)1$, 5—6*D*. $\frac{2}{\sqrt{2n+1}}\overline{P_n^m}(\cos\vartheta)$, $\log\frac{2}{\sqrt{2n+1}}\overline{P_n^m}(\cos\vartheta)$ для $n=1(1)6$, $m=1(1)n$, $\vartheta=0°(5°)90°$, 5—6*D*. Нули полиномов $P_n(x)$, $P_n(\cos\vartheta)$ для $n=2(1)6$, 7*D* соотв. 1″. Нули полиномов $P_n^m(x)$, $P_n^m(\cos\vartheta)$ и первых производных для $n=2(1)6$, $m=1(1)n$, 7*D* соотв. 1″.

[26] Lowan A. N., Davids N. and Levenson A., Table of the zeros of the Legendre polynomials of order 1—16 and the weight coefficients for Gauss' mechanical quadrature formula, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 739—743. Нули полиномов $P_n(x)$ для $n=2(1)16$, 15*D*; соответствующие множители для численного интегрирования, 15*D*.

[27] Smith E. R. and Higdon A., Zeros of the Legendre polynomials, Iowa State College, J. Sci. 12 (1938), 263—274. Нули полиномов $P_n(x)$ для $n=2(1)40$, 6*D*.

[28] Gray M. C., Legendre functions of fractional order, Quart. Appl. Math. 11 (1953), 311—318. $P_\nu(\cos\vartheta)$ для $\nu=0.1(.1)2$, $\vartheta=10°(10°)170°, 175°$, 6*D*.

[29] Le Centre National d'Études des Télécommunications: Tables des fonctions de Legendre associées, Paris, 1952. $(-1)^m P_\nu^m(\cos\vartheta)=(-\sin\vartheta)^m d^m P_\nu(\cos\vartheta)/(d\cos\vartheta)^m$ для $m=0(1)5$, $\nu=-0.5(.1)10$, $\vartheta=0°(1°)90°$, точность различная.

XIII. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Руководства

[1] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, т. 1, ИЛ, 1949.

[2] Грей Э. и Мэтьюз Г. Б., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, ИЛ, 1953.

[3] Карман Т. и Био И. М., Математические методы в инженерном деле, Гостехиздат, 1948.

[4] Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М., см. XII, [3].

[5] Кратцер А. и Франц В., см. V, [3].
[6] Кузнецов Д. С., см. V, [4].
[7] Кузьмин Р. О., см. V, [5].
[8] Курант Р. и Гильберт Д., см. XI, [2].
[9] Лебедев Н. Н., см. V, [6].
[10] Смирнов В. И., см. V, [7].
[11] Соболев С. Л., см. XII, [8].
[12] Сонин Н. Я., Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах, Гостехиздат, 1954.
[13] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].
[14] McLachlan N. W., Bessel functions for engineers, Oxford, 1955.
[15] Nielsen N., Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, Leipzig, 1904.
[16] Petiau G., La théorie des fonctions de Bessel exposée en vue de ses applications à la physique mathématique, Paris, 1955.
[17] Weyrich R., Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Leipzig und Berlin, 1937.

Таблицы

[18] **Ватсон Г. Н., см. VII, [11].**
[19] Библиотека математических таблиц, вып. 12, Таблицы функций Бесселя целого положительного индекса, ВЦ АН СССР, 1960.
[20] Библиотека математических таблиц, вып. 4 и 5, Таблицы функций Бесселя дробного индекса, ВЦ АН СССР, тт. 1—2, 1959.
[21] Библиотека математических таблиц, вып. 20 и 21, Таблицы сферических функций Бесселя, тт. 1, 2, ВЦ АН СССР, 1963.
[22] Динник А. Н., Таблицы бесселевых функций дробного порядка, Київ, Зак. прир. техн. відділу АН УРСР, 29 (1933).
[23] Люстерник Л. А., Акушский И. Я. и Диткин В. А., Таблицы бесселевых функций, Гостехиздат, 1949. $J_0(x)$ и $J_1(x)$ для $x=0\,(.001)\,16\,(.01)\,25$; 7*D*. Корни уравнений $J_0(x)=0$, $J_1(x)=0$, $J_1'(x)=0$ и ряд связанных с ними величин.
[24] Фадеева В. Н. и Гавурин М. К., Таблицы функций Бесселя целых номеров от 0 до 120, Гостехиздат, 1950. $J_n(x)$ для $x=0\,(.1)\,125$, $n=0\,(1)\,120$; 6*D*. $J_n(x)$ для $x=0\,(.01)\,15$, $n=0\,(1)\,13$; 8*S*. Вычислены корни уравнений $J_n(x)=0$ для $n=0\,(1)\,115$.
[25] Сегал Б. И. и Семендяев К. А., см. V, [13]. Даны функции Бесселя индексов 0 и 1 для $x=0\,(.01)\,10$; 5*D*, 5—6*S*.
[26] Чистова Э. А., Таблицы функций Бесселя от действительного аргумента и интегралов от них, Изд-во АН СССР, 1958. Даны функции Бесселя индексов 0 и 1 для $x=0\,(.001)\,15\,(.01)\,100$; 7*D*, 7*S*.
[27] Кармазина Л. Н. и Чистова Э. А., Таблицы функций Бесселя от мнимого аргумента и интегралов от них, Изд-во АН СССР, 1958.
[28] Таблицы значений функций Бесселя от мнимого аргумента, под ред. И. М. Виноградова и Н. Г. Четаева, Изд-во АН СССР, 1950. $I_n(x)$ и $K_n(x)$ для $n=0, 1$, $x=0\,(.001)\,10$; 8*D*, 8*S*.
[29] Деканосидзе Е. Н., Таблицы цилиндрических функций от двух перемеиных, Изд-во АН СССР, 1956.
[30] Барк Л. С. и Кузнецов П. И., Таблицы цилиндрических функций от двух мнимых переменных, Изд-во АН СССР, 1962.
[31] Смирнов А. Д., Таблицы функций Эйри и специальных вырожденных гипергеометрических функций, Изд-во АН СССР, 1955.
[32] Карпов К. А. и Киреева Н. Е., Таблицы функций Вебера, т. 1, Изд-во АН СССР, 1959; т. 2, ВЦ АН СССР, 1963.
[33] Носова Л. Н., Таблицы функций Томсона и их первых производных, Изд-во АН СССР, 1960.
[34] Носова Л. Н. и Тумаркин С. А., Таблицы обобщенных функций Эйри для асимптотического решения дифференциальных уравнений $\varepsilon(py')'+(q+\varepsilon r)y=f$, ВЦ АН СССР, 1961.
[35] Фок В. А., Таблицы функций Эйри, 1946.
[36] Harvard University, Computation Laboratory, Annals 3—14: Tables of the Bessel functions, Cambridge, 1947, 1951. $J_n(x)$ для $n=0\,(1)\,3$, $x=0\,(.001)\,25\,(.01)\,99.99$, 18*D*; для $n=4\,(1)\,15$, $x=0\,(.001)\,25\,(.01)\,99.99$, 10*D*; для $n=16\,(1)\,111$, $x=0\,(.01)\,99.99$, 10*D*; для $n=112\,(1)\,135$, $x=0\,(.1)\,99.99$, 10*D*. Последний том дает далее $J_n(100)$ для $n=0\,(1)\,135$ и $J_n(n)$ для $n=0\,(1)\,100$, 10*D*.

[37] British Association Mathematical Tables VI: Bessel functions, Cambridge, I, 1950, II, 1952. I: $J_0(x)$, $J_1(x)$ для $x=0(.001)16(.01)25$, $10D$; $N_0(x)$, $N_1(x)$ для $x=0(.01)25$, $8D$; Вспомогательные таблицы для $x=0(.01)0.5$ и $25\leqslant x\leqslant 6000$. $I_0(x)$, $I_1(x)$ для $x=0(.001)5$, $7-8D$; $K_0(x)$, $K_1(x)$ для $x=0(.01)5$, $8-9S$; Вспомогательные таблицы для $x=0(.01)0.5$ и $x=5(.01)10(.1)20$. Нули $j_{0,s}$ и значения $J_1(j_{0,s})$ для $s=1(1)150$, $10D$; нули $j_{1,s}$ и значения $J_0(j_{1,s})$ для $s=1(1)150$, $10D$. II: $J_n(x)$ для $n=2(1)12$, $x=0(.01)10(.1)25$; $n=13(1)20$, $x=0(.01)5(.1)25$, $8D$. $N_n(x)$ для $n=2(1)11$, $x=0(.01)10(.1)25$; $n=12(1)20$, $x=0(.1)25$, $8S$. $I_n(x)$, $K_n(x)$ для $n=2(1)11$, $x=0(.01)5(.1)20$; $n=12(1)20$, $x=0(.1)20$, $8S$. Для осуществления интерполяции N, I, K частично заменены через x^nN_n, $x^{-n}I_n$, $e^{-x}I_n$, x^nK_n, e^xK_n. $J_n(x)$, $N_n(x)$ для $n=0(1)20$, $x=0(.1)25$, $10D$ соотв. $10S$. $I_n(x)$, $K_n(x)$ для $n=0(1)20$, $x=0(.1)20$, $10S$.

[38] Hayashi K., см. IX, [18]. $J_0(x)$, $J_1(x)$ для $x=0(.001)0.11(.01)25.1$, $12-18D$. $J_n(x)$ для n при $0\leqslant n\leqslant 135$, $x=0.01(.01)0.05$, $0.1(.1)0.5$, 1, 2, $10(10)50$, 100, $10-103D$. $J_{\pm 1/2}(x)$, $J_{\pm 3/2}(x)$ для $x=0(.01)10(.1)20(1)100$, $9-12D$.

[39] Cambi E., Eleven- and fifteen-place tables of Bessel functions of the first kind, to all significant orders, New York, 1948. $J_n(x)$ для $x=0(.01)10.5$, $11D$; $x=0(.001)0.5$, $15D$. Включены все J_n, которые $>0.5\cdot 10^{-11}$ соотв. $>10^{-15}$. Коэффициенты разложения в ряд Тейлора $J_n(x+h)$ и разложения $J_n(x+h)$ по функциям Бесселя $J_k(h)$.

[40] Goodwin E. T. and Staton J., Table of $J_0(j_{0,n}r)$, Quart. J Mech. Appl. Math. 1 (1948), 220—224. $J_0(j_{0,s}x)$ для $s=1(1)10$, $x=0(.01)1$, $5D$.

[41] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series I: Tables of the Bessel functions $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$. Washington, 1948. Reissued as NBS, Applied Mathematics Series 25, Washington, 1952. $N_0(x)$, $N_1(x)$ для $x=0(.0001)0.05(.001)1$, $8D$ или $8-9S$; вспомогательные таблицы для $x=0(.0001)0.005$, $8D$. $K_0(x)$, $K_1(x)$ для $x=0(.0001)0.033(.001)1$, $8D$ или $8-9S$; вспомогательные таблицы для $x=0(.001)0\,03$, $8D$.

[42] National Bureau of Standards, Mathematical Tables Project [MT 14]: Table of the Bessel functions $J_0(z)$ and $J_1(z)$ for complex arguments, 2nd ed., New York, 1947. Действительная и мнимая части $J_0(re^{i\varphi})$, $J_1(re^{i\varphi})$ для $r=0(.01)10$, $\varphi=0°(5°)90°$, $10D$.

[43] National Bureau of Standards, Computation Laboratory: Table of the Bessel functions $Y_0(z)$ and $Y_1(z)$ for complex arguments, New York, 1950. Действительная и мнимая части $N_0(re^{i\varphi})$, $N_1(re^{i\varphi})$ для $r=0(.01)10$, $\varphi=0°(5°)90°$, $10D$. Вспомогательные таблицы для $r=0(.01)0.5$, $10D$. Комплексные нули $z_{0,s}$ функции N_0, $z_{1,s}$ функции N_1, $z'_{1,s}$ функции Y'_1 для $s=1(1)15$, $5D$; $z_{0,s}$ со значениями N_1 и N'_1 для $s=1(1)3$, $9D$; $z_{1,s}$ со значениями $N_0=N'_1$ для $s=1(1)3$, $9D$; $z'_{1,s}$ со значениями N_0 и N_1 для $s=1(1)4$, $9D$.

[44] Tölke F., Besselsche und Hankelsche Zylinderfunktionen, Stuttgart, 1936. $J_n(r\sqrt{i})$ и $\frac{i\pi}{2}H_n^{(1)}(r\sqrt{i})$ для $n=0(1)3$, $r=0(.01)21$, $4S$.

[45] British Association Report, 1923. $M_0(r)$, $M_1(r)$, $\Theta_0(r)$, $\Theta_1(r)-180°$ для $r=0(.1)10$, $6-5D$ соотв. $0°.00001$.

[46] National Bureau of Standards, Computation Laboratory: Tables of Bessel functions order I, II, New York, 1948—1949. I: $J_\nu(x)$ для $\nu=-3/4$ и $-2/3$, $x=0(.001)0.9(.01)25$; $\nu=-1/3$ и $-1/4$, $x=0(.001)0.8(.01)25$; $\nu=1/4$ и $1/3$, $x=0(.001)0.6(.01)25$; $\nu=2/3$ и $3/4$, $x=0(.001)0.5(.01)25$; $10D$. Вспомогательные функции $A_\nu(x)$, $B_\nu(x)$ для $x=25(.1)50(1)500(10)5000(100)10\,000(200)30\,000$, $10D$. Нули $j_{\nu,s}$ для $s=1(1)30$, $10D$. II: $I_\nu(x)$ для $\nu=-3/4$ и $-2/3$, $x=0(.001)1(.01)13$; $\nu=-1/3$ и $-1/4$, $x=0(.001)0.8(.01)13$; $\nu=1/4$ и $1/3$, $x=0(.001)0.6(.01)25$; $\nu=2/3$ и $3/4$, $x=0(.001)0.5(.01)25$; $10D$ или $10S$. Вспомогательные функции $e^{-x}I_\nu(x)$ для $x=25(.1)50(1)500(10)5000(100)10\,000(200)30\,000$, $10D$.

[47] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 37: Tables of functions and the zeros of functions, Washington, 1954. Нули $j_{\nu,s}$, см. [42]. Нули $j'_{\nu,s}$ для $\nu=\pm 3/4$, $\pm 2/3$, $\pm 1/3$, $\pm 1/4$, $s=1(1)8$, $7D$. Комплексные нули функций N_0, N_1, N'_1, см. [39].

[48] British Association Report, 1927. Нули $j_{\nu,1}$ функций $J_\nu(x)$ для $\nu=-1(.01)1$, $5D$.

[49] British Association Report, 1928. $\partial J_\nu(x)/\partial\nu$ для $\nu=\pm 1/2$, $\pm 3/2$, $x=0(.1)20$, $6D$.

[50] National Bureau of Standards, Computation Laboratory: Tables of spherical Bessel functions, I, II, New York, 1946—1947. I: $\sqrt{\pi/2x}\,J_\nu(x)$ для $\pm\nu=\frac{1}{2}(1)\frac{25}{2}$, $x=0(.01)10(.1)25$; $\pm\nu=\frac{27}{2}$, $x=0(.01)10(.05)10.5(.1)25$; 8—10S для $x\leqslant 10$, 7S для $x>10$. II: $\sqrt{\pi/2x}\,J_\nu(x)$ для $\pm\nu=\frac{29}{2}(1)\frac{43}{2}$, $x=0(.01)10(.1)25$; $\pm\nu=\frac{45}{2}(1)\frac{61}{2}$, $x=10(.1)25$; 8—10S для $x\leqslant 10$, 7S для $x>10$. $\Lambda_\nu(x)$ для $\nu=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{41}{2}(1)\frac{61}{2}$, $x=0(.1)10$, 9D; $\nu=\frac{1}{2}(1)\frac{61}{2}$, $x=10(.1)25$, большей частью 7S; $-\nu=\frac{29}{2}(1)\frac{61}{2}$, $x=0(.1)25$, большей частью 7S. Нули $j_{\nu,s}$, $j'_{\nu,s}$ функций $J_\nu(x)$, $J'_\nu(x)$ с соответствующими значениями J'_ν соотв. J_ν для $\pm\nu=\frac{1}{2}(1)\frac{39}{2}$, $s=1(1)S$, где $1\leqslant S\leqslant 8$, 6—10D.

[51] Crowder H. K. and Francis G. C., Tables of spherical Bessel functions and ordinary Bessel functions of order half an odd integer of the first and second kinds, Ballistic Research Laboratories, Mem. Report 1027, Aberdeen Proving Ground, Maryland, 1956. $\sqrt{\pi/2x}\,J_\nu(x)$, $\sqrt{\pi/2x}\,N_\nu(x)$, $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$ для $x=1(1)50$ и $\nu=n+\frac{1}{2}$, $n=0(1)m$ $\left[\text{где } N_\mu(x)<10^{10}<N_{\mu+1}(x) \text{ для } \mu=m+\frac{1}{2}\right]$, 9D для $n<x$, 7S для $n\geqslant x$.

[52] Royal Society Mathematical Tables Committee: Short table of Bessel functions $I_{n+\frac{1}{2}}(x)$, $K_{n+\frac{1}{2}}(x)$, Cambridge, 1952. $x^{-\nu}I_\nu(x)$, $(2/\pi)x^\nu K_\nu(x)$ для $\nu=n+\frac{1}{2}$, $n=0(1)10$, $x=0(.1)5$; $e^{-x}I_\nu(x)$, $(2/\pi)e^xK_\nu(x)$ для $\nu=n+\frac{1}{2}$, $n=0(1)10$, $x=5(.1)10$; большей частью 8S.

[53] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 28: Tables of Bessel—Clifford functions of orders zero and one, Washington, 1953. $x^{-n/2}J_n(2\sqrt{x})$, $x^{-n/2}N_n(2\sqrt{x})$ для $n=0$, 1, $x=0(.02)1.5(0.5)3(.1)13(.2)45(.5)115(1)410$, 8—9D. $x^{-n/2}I_n(2\sqrt{x})$, $x^{-n/2}K_n(2\sqrt{x})$ для $n=0$, 1, $x=0(.02)1.5(.05)(6.2)$, 6—9D. $e^{-2\sqrt{x}}x^{-n/2}I_n(2\sqrt{x})$, $e^{2\sqrt{x}}x^{-n/2}K_n(2\sqrt{x})$ с 8—9 десятичными знаками для $n=0$, 1, $x=6.2(.1)13(2)36(.5)115(1)160(5)410$.

[54] British Association Report, 1924. $-E_n(x)$ для $n=0$, 1, $x=0(.02)16$, 6D.

XIV. ФУНКЦИИ МАТЬЕ

Руководства

[1] Купрадзе В. Д., О функциях Матье — Ханкеля, Изд-во АН СССР, 1933.
[2] Мак-Лахлан Н., Теория и приложения функций Матье, ИЛ, 1953.
[3] Смирнов В. И., см. V, [7]
[4] Стрэтт М. Д. О., Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, Харьков — Киев, 1935.
[5] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].
[6] Meixner J. und Schäfke F. W., Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen mit Anwendungen auf physikalische und technische Probleme. Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1954.

Таблицы

[7] Goldstein S., Mathieu functions, Trans. Cambridge Philos. Soc. 23 (1927), 303—336. Собственные значения a_0, b_1, a_1, b_2, a_2 и коэффициенты Фурье ce_0, se_1, ce_1, se_2, ce_2 для $q=0.1(.1)1(.2)4(1)5(5)30(10)40(20)100(50)200$, 5D.

[8] Ince E. L., Tables of the elliptic-cylinder functions, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 52 (1932), 355—423, 424—433. С использованием обозначения $a=4\alpha$, $\theta=8q$ таблицы дают: собственные значения $a_n=4\alpha_n$, $n=0(1)5$; $b_n=4\beta_n$, $n=1(1)6$ и коэффициенты Фурье для соответствующих функций ce_n, se_n для $\theta=8q=0(1)10(2)20(4)40$, 7D.

$ce_n(x, q)$, $n=0(1)5$; $se_n(x, q)$, $n=1(1)6$ для $\Theta=8q=1(1)10$, $x=0°(1°)90°$, $5D$. Нули функции ce_n, $n=2(1)5$, se_n, $n=3(1)6$ и экстремальные значения функций ce_n, $n=1(1)5$, se_n, $n=2(1)6$ при $0<x<\pi/2$ для $\Theta=8q=0(1)10(2)20(4)40$ в 0°.0001.

[9] Hidaka K., Tables for computing the Mathieu functions of odd order $se_1(x, \Theta)$, $ce_1(x, \Theta)$, $se_3(x, \Theta)$, , $se_7(x, \Theta)$ and $ce_7(x, \Theta)$ and their derivatives, Mem. Imp. Marine Obs 6, № 2 (1936), 137—157. Собственные значения $b_n=4\beta_n$, $a_n=4\alpha_n$, $n=1(2)7$, и коэффициенты Фурье для соответствующих функций и их производных для $\Theta=8q=0(.1)2.3$, $7D$

[10] National Bureau of Standards, Computation Laboratory: Tables relating to Mathieu functions, New York, 1951. С использованием обозначения $s=32q$, $b=4\alpha+\frac{s}{2}$ для коэффициентов дифференциального уравнения Матье, $be_r-\frac{1}{2}s=4\alpha_r$, $bo_r-\frac{1}{2}s=4\beta_r$ для собственных значений и $Se_r(s, x)=\frac{1}{A}ce_r(x, q)$, $So_r(s, x)=\frac{1}{B}se_r(x, q)$ для нормированных в соответствии с $Se_r(s, 0)=1$, $[dSo_r(s, x)/dx]_{x=0}=1$ периодических функций Матье таблицы дают. $be_r(s)$, $r=0(1)15$; $bo_r(s)$, $r=1(1)15$ для области $0\leqslant s\leqslant 100$ с табличными шагами между 0.2 и 10 в $8D$. Коэффициенты Фурье соответствующих функций $Se_r(s, x)$, $So_r(s, x)$, которые позволяют составить ряды Фурье в области $0\leqslant s\leqslant 100$ с точностью $9—10D$. Нормирующие множители A, B и соответствующие множители для вычисления видоизмененных функций Матье.

[11] Blanch G. and Rhodes I., Table of characteristic values of Mathieu's equation for large values of the parameter, J. Washington Acad. Sci. 45 (1955), 166—196 В дополнение к [10] таблица дает $Be_r(t)=be_r(s)-(2r+1)/t$, $Bo_r(t)=bo_r(s)-(2r-1)/t$ для $r=0(1)15$ и $s=1/t^2>100$. Табличный шаг для аргумента t выбран так, что возможно получать значения с точностью в $8D$.

XV. КОНФЛЮЭНТНЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Руководства

[1] Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петьо Г., Фогель Т., Функции математической физики, Физматгиз, 1963

[2] Кратцер А. и Франц В., см. V, [3].

[3] Кузнецов Д. С, см. V, [4].

[4] Лебедев Н. Н., см V, [6].

[5] Сансоне Д., Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. I, ИЛ, 1953.

[6] Смирнов В. И., см. V, [7].

[7] Трикоми Ф, Дифференциальные уравнения, ИЛ, 1962.

[8] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].

[9] Buchholz H., Die konfluente hypergeometrische Funktion mit Berücksichtigung ihrer Anwendungen, Berlin—Gottingen—Heidelberg, 1953.

[10] Slater L. J., Confluent hypergeometric functions, Cambridge, 1960.

[11] Tricomi F., Fonctions hypergéométriques confluentes, Paris, 1960.

[12] Appell P., Kampé de Fériet J., Fonctions hypergéométriques et hypersphériques; polynomes d'Hermite, Paris, 1926.

Таблицы

[13] British Association Report, 1926. 1926: $M(\alpha, \gamma, x)$ для $\gamma=\pm 1/2, \pm 3/2$, $\alpha=-4(.5)4$, $x=0(.1)1(.2)3(.5)8$, $5D$ или $6—7S$. 1927: $M(\alpha, \gamma, x)$ для $\gamma=\pm 1/2, \pm 3/2$, $\alpha=-4(.5)4$, $x=0(.02)0.08$, $0.15(.1)0.95$, $1.1(.2)1.9$, $5D$ или $6S$; и для $\gamma=1(1)4$, $\alpha=-4(.5)4$, $x=0(.02)0.1(.05)1(.1)2(.2)3(.5)8$, $5D$ или $6—7S$.

[14] Conolly B. W., A short table of the confluent hypergeometric function $M(\alpha, \gamma, x)$, Quart. J. Mech. Appl. Math. 2 (1950), 236—240. $M(\alpha, \gamma, x)$ для $\gamma=0.2(.2)1$, $\alpha=-1(.2)1$, $x=0.1, 0.2(.2)1$, $11D$.

[15] Slater L. J., On the evaluation of the confluent hypergeometric function, Proc. Cambridge Philos. Soc. 49 (1953), 612—622. $M(\alpha, \gamma, x)$ для $\gamma=0.1(.1)1$, $\alpha=-1(.1)1$, $x=1(1)10$, $8S$.

[16] Nath P, Confluent hypergeometric function, Sankhyā 11 (1951), 153—166. $M(\alpha, \gamma, x)$ для $\gamma=3$, $\alpha=1(1)40$ и $\gamma=4$, $\alpha=1(1)50$, $x=0.02(.02)0.1(.1)1(1)10(10)50$, 100, 200, $7S$.

[17] Rushton S. and Lang E. D., Tables of the confluent hypergeometric function, Sankhyà **13** (1954), 377—411. $M(\alpha, \gamma, x)$ для $\gamma=0.5(.5)3.5, 4.5$, α — целое и половина целого из $0\leqslant\alpha\leqslant25$ до $0\leqslant\alpha\leqslant50$ с табличным шагом 0.5 или 1, x как и в [14].

[18] Gran Olsson R., Tabellen der konfluenten hypergeometrischen Funktion erster und zweiter Art, Ingenieur-Arch. 8 (1937), 99—103. $M(\alpha, \gamma, k\varrho^n)$ для $n=2$, 4, частные значения α между —0.675 и 1.65, частные значения γ между 0.5 и 3. $k=-2(.5)2$, $\varrho=0(.1)1$, 4*D*.

[19] Gran Olsson R., Über einige Lösungen des Problems der rotierenden Scheibe, II, Ingenieur. Arch. 8 (1937), 373—380. $M(1.3, 3, x)$, $M(0.65, 2, x)$, $M(0.325, 1.5, x)$, $x^{-1/2}M(-0.175, 0.5, x)$ для $x=0.02(.02)0.1(.05)1(.1)2.5$, 4*D*.

[20] Chappel G. E., The properties of a new orthogonal function associated with the confluent hypergeometric function, Proc. Edinburgh Math. Soc. **43** (1925), 117—130. $M(\alpha, \gamma, x)$ для $\gamma=1$, $\alpha=1/2-k$, $k=1(1)10$, $kx=0.1(.1)10$, $kx=0.1(.1)1.5$, $2(1)10$, 4*D*.

[21] Lowan A. N. and Horenstein W., On the function $H(m, a, x)=\exp(-ix)F(m+1-ia, 2m+2; 2ix)$, J. Math. Physics **21** (1942), 264—283. Reprint in NBS, Applied Mathematical Series 37, Washington, 1954. $H(m, a, x)=e^{-ix}M(m+1-ia, 2m+2, 2ix)$ и $dH(m, a, x)/dx$ для $a=0(1)10$, $m=0(1)3$, $x=0(1)10$, 7*S*.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Амплитуда гиперболическая amph x 33
— Якоби am (u, k) 120
Ангера функции $\mathbf{J}_\nu(z)$ 287
— — неполные 288

Бернулли числа B_n 15, 53, 57, 60
Бесселя интегральное представление 221, 287
Бесселя функции 178, 317
— —, асимптотические разложения 222
— — второго рода см Неймана функции
— — мнимого аргумента $I_\nu(z)$ 247
— — модифицированные 247
— —, нули 229
— — первого рода $J_\nu(z)$ 181
— —, порядок (параметр, индекс) 178
— —, теоремы сложения и умножения 244, 245
— — третьего рода см Ганкеля функции
— —, формулы дифференцирования и интегрирования 244, 245
Бэта-функция $B(z, w)$ 55

Ватсона формула 227
Вебера функции $E_\nu(z)$ 287
— — неполные 288
Вейерштрасса эллиптические функции $\wp u$, ζu, σu 127, 128

Гамма-функции $\Gamma(z)$, $\Pi(z)$, $z!$ 49, 52
— —, логарифмическая выпуклость 49, 57
— —, логарифмическая производная $\psi(z)$, $\Psi(z)$ 49, 56, 316
— — неполные $\Gamma(a, z)$, $\gamma(a, z)$, $P(a, z)$, $Q(a, z)$, $(a-1, z)!$ 60, 62, 70, 71, 317
— —, формулы дополнения и умножения 54, 55
Ганкеля контурный интеграл 52
— разложение асимптотическое 222
— функции $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ 70, 189
— — модифицированные $K_\nu(z)$ 247
Гармоники сферические 178
Гейне интегральное представление 164
Гиперболические функции sh x, ch x, th x, cth x 30
— — комплексного аргумента 36
— — обратные Arsh x, Arch x, Arth x 30
— —, связь с показательной и логарифмической функциями 32
— —, формулы дифференцирования и интегрирования 32
— —, формулы сложения 31
Гипергеометрическая вырожденная функция $\Phi(a, c, z)$ 308
Гипергеометрические конфлюэнтные функции $\Phi(a\ c, z)$, $\Psi(a, c, z)$, $M_{\varkappa, \mu}(z)$, $W_{\varkappa, \mu}(z)$ 308
Гипергеометрическое уравнение 119
— — вырожденное 308
Гидерманиан gd x 33

Дебая ряды 224
— функции 326

Зоммерфельда интегральное представление 222

Интеграл вероятности см. Интеграл ошибок
—, главное значение в смысле Коши 63
— ошибок $\Phi(z)$, $\Phi(v)$, Erf (x), Erfc (v), Erfi (x), $\Theta(x)$, $H(x)$ $\alpha(x)$ 60, 70, 72, 82
— —, обобщение $E_n(z)$ 71
— —, производные $\Phi_{n+1}(x)$, $\varphi(x)$ 71, 72
— **эллиптический см. Эллиптический интеграл**
Интегральная показательная функция $\mathrm{Ei}(z)$, $\mathrm{Ei}(-x)$, $\mathrm{Ei}^{\pm}(x)$, $\mathrm{Ei}^*(z)$, $\overline{\mathrm{Ei}}(z)$ 60, 62, 67
Интегральный гиперболический косинус $\mathrm{chi}(z)$ 67
— — синус $\mathrm{shi}(z)$ 67
— косинус $\mathrm{ci}(z)$ $\mathrm{Ci}(z)$ 60, 65
— логарифм $\mathrm{li}(z)$, $\mathrm{Li}(x)$ 60, 63, 67
— синус $\mathrm{si}(z)$, $\mathrm{Si}(z)$ 60, 65
Интерполяция квадратичная 13
— линейная 13

Каталана постоянная G 16, 116
Кельвина функции $\mathrm{ber}_\nu(z)$, $\mathrm{bei}_\nu(z)$, $\mathrm{her}_\nu(z)$, $\mathrm{hei}_\nu(z)$, $\mathrm{ker}_\nu(z)$, $\mathrm{kei}_\nu(z)$ 264
Клотоида 83
Конфлюэнтное дифференциальное уравнение 308, 315—317
Куммера формула 315
— функция $\Phi(a, c, z)$, $M(a, c; z)$ 308

Лагерра полиномы $L_n^{(\alpha)}(z)$, $l_n(x)$ 147, 151, 317
Лангера формула 227
Ланжевена функция $L(x)$ 320

Лапласа интегральное представление 163
Лежандра соотношение 116
— функции второго рода $Q_n(z)$, $\mathfrak{Q}(z)$ 159, 160
— —, индексы 158
— — нормированные 166
— — первого рода $P_n(z)$, $\mathfrak{P}(z)$ 158, 159
— —, порядок 159
— — присоединенные 1-го и 2-го рода $P_n^m(z)$, $Q_n^m(z)$, $\mathfrak{P}_n^m(z)$, $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ 159, 162, 163
— —, степень 159
— —, теорема сложения 165
Ломмеля—Вебера функция $\Omega_\nu(z)$ 287

Макдональда функция $K_\nu(z)$ 247
Матье дифференциальное уравнение 298, 306
— функции $ce_n(z, q)$, $se_n(z, q)$ 298
— — нормированные 301
— — присоединенные $Ce_n(z)$, $Se_n(z)$ 307
Меллера интегральное представление 163, 221

Неймана интегральное представление 163
— функции $N_\nu(z)$ 184
Никольсона формулы 227

Планка уравнение 318
— функция излучения 318
Планка—Эйнштейна функции 322, 323
Показательные функции $e^{\pm x}$, $e^{\pm \frac{\pi}{2} x}$ 32, 34
Постоянная циклическая 62
Постоянные π, e и т д 15
Похгаммера функция $\Phi(a, c; z)$ 308
Пуассона интегральное представление 221, 288
Разности 1-го порядка 13
— 2-го порядка $\delta^2 y_0$ 13
— — — видоизмененные $\hat{\delta}^2 y_0$ 14
Римана дзета-функция $\zeta(z)$ 88

Сонина интегральное представление 221, 222
Спираль Корню 83
— sici 66
Стирлинга формула 53
Струве функция $\mathbf{H}_\nu(z)$ 288
Сферические функции см. Лежандра функции

Тригонометрические функции 24, 29
— — комплексного аргумента $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\arcsin z$, $\operatorname{arctg} z$ 36, 39, 40, 43
Тэта-функции $\vartheta_n(v, \varkappa)$ 130

Уиттекера функция $W_{\gamma, \mu}(z)$ 317
Уравнения элементарные трансцендентные 24, 35

Френеля интегралы $C(z)$, $S(z)$ 60, 82, 87
Функции параболического цилиндра $D_\nu(z)$, $\Psi_n(z)$, $\varphi_n(z)$ 153, 317
— распространения тепла от источников 326
— цилиндрические см. Бесселя функции
— эллиптического цилиндра см. Матье функции

Чебышева ортогональные полиномы 1-го и 2-го рода $T_n(z)$, $U_n(z)$ 144
Числа комплексные 16, 18, 20, 21

Эверетта—Лапласа формула 14
Эйлера интегралы 1-го и 2-го рода 52, 55
— постоянные c, γ 15, 52, 57, 63, 184, 249
— числа E_n 16
Эллиптическая функция 120
— — модулярная 133
Эллиптический интеграл 94
— —, дополнительный модуль 95
— —, модуль 95, 133
— — неполный 1-го, 2-го или 3-го рода в нормальной форме Лежандра $D(\varphi, k)$, $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$, $\Pi(\varphi, n, k)$ 95, 99
— —, нормальная форма Вейерштрасса 127
— —, параметр 95
— — полный в нормальной форме $\mathbf{K}(k)$, $\mathbf{E}(k)$, $\mathbf{D}(k)$, $\mathbf{B}(k)$, $\mathbf{C}(k)$ 96, 109, 114, 133
— —, приведение к нормальной форме 96
Эрмита полиномы $H_n(z)$, $\varphi_n(z)$ 151, 153

Якоби дзета-функция $\operatorname{zn}(u, k)$ 127, 134
— эллиптические функции $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$ 122, 134